



**Digitization of the scientific library of the
State Museum of Natural History of NAS**

Bezout P. Nauka matematyki do użycia artyleryi francuzkiey napisana przez P. Bezout, Towarzysza Akademij Nauk, i Marynarskiey etc. a dla pożytku pospolitego, osobliwiey dla Korpusu Artyleryi Narodowey na Polski ięzyk przełożona z rozkazu i nakładem Jego Królewskiej Mci. / P. Bezout. – w Warszawie: W Druk.XX. Missyonarzow, 1781. T. II: O Algebrze. – [4], 447 s., 6; 3 algebry pl.

Download a copy of the book from the site:

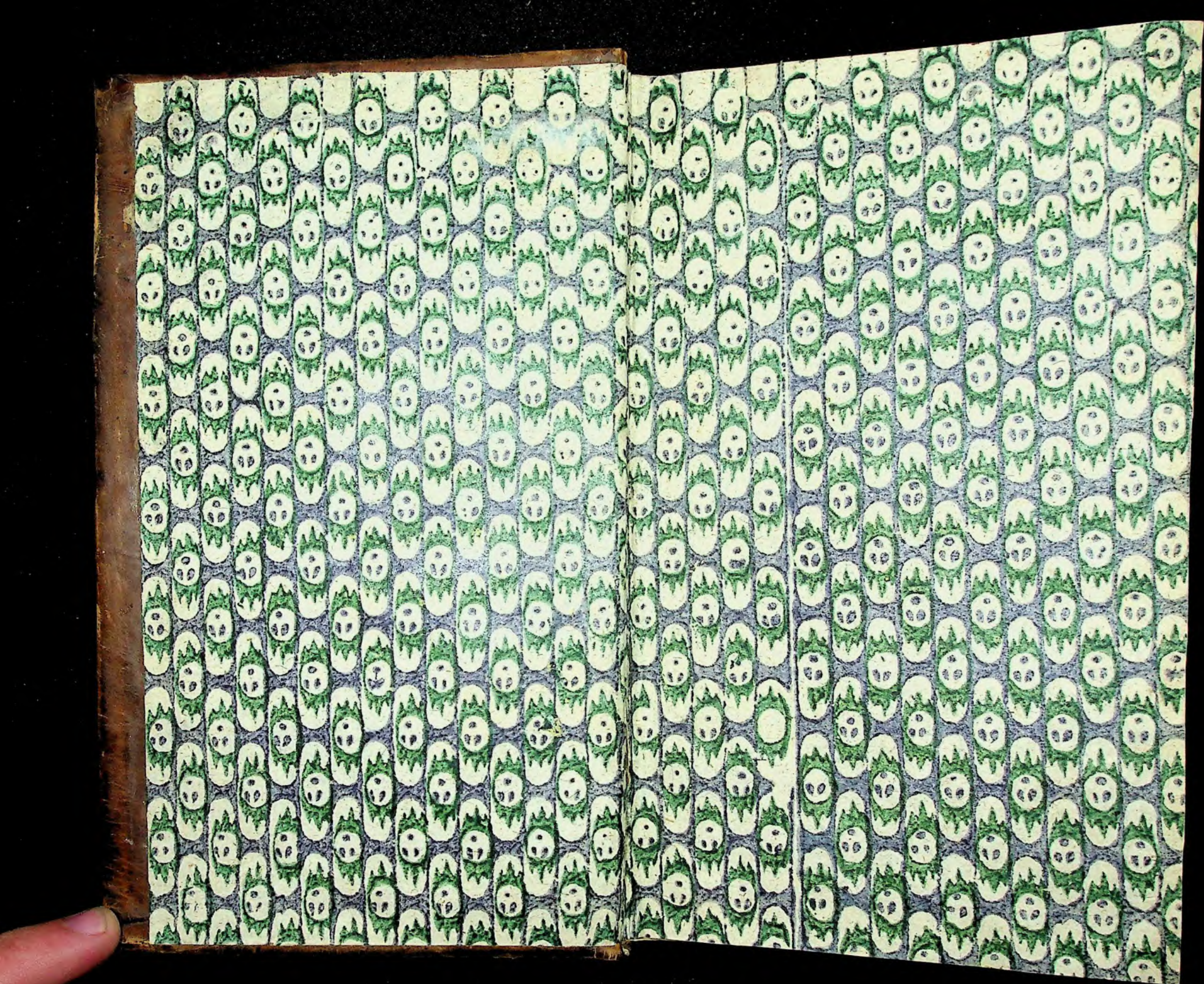
<http://libsmnh.com.ua>

Permanent link to the book page:

http://libsmnh.com.ua/books/bezout_p/nauka_matematyki_do_uzycia_artyleryi_t2/

Biblioteka Muzeum im. Dzieduszyckich
we Lwowie.

Se 27a № 9



4312

Nr. inwentarza

B - 2784.

NAUKA

MATEMATYKI.

do użycia

ARTYLERYI FRANCUZKIEY

napisana przez P. Bezout

Towarzystwa Akademij Nauk, i Marynarzkiej &c.

a dla pożytku pospolitego, osobiście dla

KORPUSU ARTYLERYI

NARODOWEY

na Polski język

PRZEŁOŻONA

z Rozkazu i Nakładem

JEGO KROLEWSKIEY MCI.

PANA NASZEGO MIŁOSCIWEGO

do druku

PODANA

TOM DRUGI.

Zawierający w sobie Algebrę, i przy-
stosowanie Algebry do Geometrii.



WARSZAWIE

W Drukarni XX. MISSIONARZOW.

R. P. M. DCC. LXXXI.



❧) (❧

Z B I O R

*Wyrazów Polskich użytych w tym drugim
Tomie, albo nowych albo mało znaiomych,
niepowtarzając tych, które już
położyły się na początku
Piérwszego Tomu.*

Część zrównania 1a, 2ga.	Membrum.
Głoska	Litera.
Kóńcotyczne w Hiperboli.	Asymptoti.
Międzyłęgła.	Subnormalis.
Nawias.	Parenthesis.
Nieokreślone linie.	Indeterminata.
Niepiérwiafkowa ilość.	Quantitas rationalis.
Odbicia ką.	Angulus reflexionis.
Odcinek.	Abscissa.
Oś odcinków.	Axis abscissarum.
Padnięcia ką.	Angulus incidentiæ.
Palirzędna.	Parameter.
Piérwiafkowa ilość.	Quantitas Radicalis.
Piérwiafkowy znak.	Signum radicale.
Początek odcinków.	Origo abscissarum.
Podtyczna.	Subtangens.
Przecięcia albo Przecinki stożkowe.	Sectiones Conicæ.
Przybliżony przypadek w Algebrze.	Casus irreducibilis. Przy-

Przyrodna ważność.	-	Gravitas specifica.
Przytyczna.	-	Normalis.
Reguła mieszaniny.	-	Regula alligationis.
Rozbiór.	-	Analysis.
Rząd wyrazów, progres.	-	Series.
Rzędna.	[syi. -	Ordinata.
Spółczynnik.	-	Coefficiens.
Spółmierny.	-	Commensurabilis.
Spółrzedne.	-	Coordinata.
Srzednica.	-	Diameter.
Srzednica dostawna.	-	Diameter conjugata.
Szódpał.	-	Focus.
Tofamość.	-	Identitas.
Wielosłowna ilość.	-	Polynomium.
Wykładnik.	-	Exponens.
Zebranie.	-	Reductio.
Zrównanie.	-	Equatio.



O ALGEBRZE.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

W którym dają się fundamenta rachowania ilościów Algebraicznych.

I. **C**élém téy nauki, którą nazywają *Algebrą*, iest podać sposoby wynalezienia reguł powszechnych, do rozwiązywania wszelkich zagadnień, iakie tylko trafić się mogą względem ilościów.

Te reguły żeby były powszechnemi, niepowinny zależyć od osobnych wartości ilościów podpadających pod uwagę,

Tom. II.

A 2

ale

OAL

ale raczemy od treści samego zagadnienia, i powinny służyć do wszelkich zagadnień, które są jednakowego rodzaju.

Za tem następuje, iż Algebra w oznaczaniu ilościów, nie może używać tychże samych charakterów i znaków, co Arytmetyka. Jakóż doszedłszy iakiego wypadku przez reguły Arytmetyki, niezostanie w umyśle, żadnego śladu téj drogi, którą przyszło się do takowego wypadku. *Np.* z iednego lub więcej działań Arytmetycznych, wypadła liczba 12, w tych 12 niewiadać żadnego śladu, jeżeli powstały z rozmnożenia 3 przez 4, albo 2 przez 6, czy z dodania 5 do 7, albo 2 do 10, albo w powszechności, bądź z iakiegokolwiek związku działań przedsięwziętych. Arytmetyka daie sposoby do wynalezienia pewnych wypadków, ale te wypadki czynić reguł nie mogą. Algebra powinna to oboie wypełnić; tym końcem ona wystawia nam ilości, przez znaki powszechne, (iakiemi są głoski Abecadła (litera), które nie mają żadnego związku szczególniejszego, raczemy z iedną iak z drugą liczbą, oznaczają to co chcemy, albo co należy ażeby oznaczały. Te znaki zawsze przytomne oczom naszym, w całym przeciągu

gu rachunku, przyjmują na siebie (że tak powiem), piętno tych działań przez które przechodzą, albo przynajmniej w wypadkach wynikających z takowych działań, wskazują nam tor téj drogi, który trzymać się potrzeba, ażeby dósłszy zamięrnego celu najprościęszemi sposobami. Niemyślimy tu, obzerniey rozwodzić tego lętkiego wyobrażenia Algebry, dalsza osnowa niniejszego dzieła, iest na to wyznaczona.

W Algebrze, nie tylko ilości oznaczają się znakami powszechnymi, ale téż oraz oznacza się sposób iestestwa iednych względem drugich, i różne działania, które mają być z niemi przedsięwzięte: słowem, wszystko iest oznaczeniem; i gdy mówi się, że czyniemy działanie to tylko znaczy, że daemy ilości nową postać. Takowe różne sposoby oznaczenia tego wszystkiego co ściągac się może do ilościów, opiszą się w dalszym przeciągu na swoich mięyscach.

O działaniach fundamentalnych, z ilościami uważonemi w powszechności.

2. **W** Algebrze, z ilościami wyrażonemi przez głoski, czynić się zwykły podobne tym działania, które czynią się

się w Arytmetyce z liczbami, to jest że dodają się, odęymia, rozmnażają, dzielą się, i. t. d. ale te działania w tém różnią się od Arytmetycznych, że częstokroć wypadki ich, są tylko wskazaniem działań Arytmetycznych.

O dodawaniu i odęymowaniu.

3. **D**odawanie ilościów sobie podobnych, niepotrzebuje żadney reguły: iawna jest że chcąc dodać ilość wyrażoną przez a , do podobnéyże drugiey ilości a , trzeba napisać $2a$; żeby dodać $2a$ do $3a$, napisze się $5a$, i. t. d.

Co się tćnie ilościów, które sobie nie są podobne, i które zawsze oznaczają się zwykły różnemi głoskami, w takowych dodanie tylko wskazuje się, przy pomocy znaku $+$ który wymawia się *więcący*.

Tak mając dodać ilość wyrażoną przez a , do drugiey ilości wyrażonej przez b , nie trzeba tylko napisać $a+b$; w takim razie, niepoznaie się wartość tego wypadku, chyba wiedząc osobne wartości ilościów oznaczonych przez a i przez b ; jeżeli a jest warto 5, a b , 12, tedy $a+b$, będzie warto 17.

Podobnie mając dodać $5a+3b$
do $9a+2c$
do $9b+3d$

Napisze się: $5a+3b+9a+2c+9b+3d$
co przemieni się, połączwszy ilości sobie podobne,
w następujący wyraz. $14a+12b+2c+3d$.

4. Względem odęymowania, można powiedzieć toż samo, co się rzekło o dodawaniu. Jeżeli ilości są sobie podobne, nie trzeba żadney reguły: iawna jest, że odęymiając $2a$, od $5a$, zostanie się $3a$.

Lecz jeżeli ilości niebędą sobie podobne, to odęymowanie tylko wskazuje się, przy pomocy znaku $-$, który wymawia się *mniey*.

Tak mając odjąć b od a , pisze się $a-b$.

Zeby odjąć $3b$ od $5a$ napisze się $5a-3b$.

Jeżeli od $-$ $-$ $-$ $-$ $9a+6b$

ma być odjęto $-$ $-$ $-$ $5a+4b$.

Napisze się $-$ $9a+6b-5a-4b$.

Co przemienia się na $-$ $-$ $-$ $4a+2b$

połączwszy ilości jednakowe, co nazywa się *zobrac*, *pozbić*, (*reducere*).

5 Liczba położona przed głoską, nazywa się *spółczynnik* téy głoski (*coefficient*); tak w wyrazie $3b$, 3 są współczynnikiem głoski b . Kiedy iaka głoska, ma mieć za współczynnika 1, natenczas, takowy współczynnik niepisze się: i tak odjąwszy $2a$, od $3a$, zostaje $1a$, ale pisze się tylko a . Trzeba więc o tém pamiętać, i nierozumieć żeby współczynnikiem głoski było zero, kiedy współczynnika niema napisanego, bo w ten czas jedność, to jest 1, jest takowym współczynnikiem.

6. Mało na tém zależy, w jakim porządku będą napisane ilości, które mają dodawać się albo odéymować; żeby dodać a do b , można zarówno pisać $a + b$, albo $b + a$; odéymując także b od a , można podobnie napisać $a - b$, albo $-b + a$.

7. Uważmy ięszcze i to, że gdy ilość niema żadnego znaku, należy dorozumić się że ma znak $+$; a znaczy toż samo, co $+a$. Poszło w zwyczaj, opuścić znak, każdéy ilości na początku wyrazu położonéy, która ma mieć znak $+$; gdyby ię zaś należał się znak $-$, natenczas nietrzeba go opuszczać.

8. Gdy po skończoném działaniu czyni się zebranie (reductio), trafić się może, że ilość poprzedzona znakiem $-$, mieć będzie większego spółczynnika, iak podobnaż ilość poprzedzona znakiem $+$; lecz w każdym razie, działanie stósować się powinno do téy powszechnéy reguły: *Dodawanie ilościów Algebraicznych od prawia się, pisząc części ich iedne po drugich, z takiemi znakami iakie mają: po-
tém ilości iednakowe zbierają się w iedną, zgromadzając z iednéy strony, wszystkie poprzedzone znakiem $+$, a z drugiéy strony wszystkie poprzedzone znakiem $-$; naostatek, mniejszy wypadek z tych dwóch, odéymuje*

muie się od większego, a reszcie daie się znak taki iaki miał większy wypadek.

Np. iezeli na końcu działania wypadnie $14a + 12b + 2c + 3d + b + 4d - 4c$; zbiorą się te ilości na $15a + 13b - 2c + 7d$; gdzie zamiast $2c - 4c$, iak było pierwéy pisze się $-2c$. Albowiem mając odjąć $4c$, od ilości w któręy nieznayduie się tylko $2c$, trzeba naznaczyć, że zostaie się ięszcze $2c$ do odjęcia z całkowitości innych ilościów.

P R Z Y K Ł A D.

Mając dodać cztery ilości następujące.

$$5a + 3b - 4c$$

$$2a - 5b + 6c + 2d.$$

$$a - 4b - 2c + 3e$$

$$7a + 4b - 3c - 6e.$$

$$\text{Summa. } 5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e.$$

Uczyniwłszy zebranie; zbierze się z ilościów a , $15a$; co do ilościów b , mając z iednéy strony $+7b$, a z drugiéy strony $-9b$, zostanie reszty $-2b$; w ilościach c , mając z iednéy strony $-9c$, a z drugiéy $+6c$, będzie reszta $-3c$; tymże sposobem zbierając inne ilości, zrobi się następujący wypadek: $-$ $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9. Iłości oddzielone znakami $+$ i $-$, nazywają się *wyrazami* ilościów, których składają części.

10. Iłość nazywa się, *iednostłowna*, *dwustłowna*, *trzystłowna*, i. t. d. (monomium, binomium &c), kiedy składa się z iednego, dwóch, trzech, i. t. d. wyrazów: ilość złożona z wielu wyrazów, których liczba nieieft określona, nazywa się w powszechności *wielostłowna* (polinomium).

II. Co się tknie odéymowania ilościów Algebraicznych, do tego fluży, powszechna reguła następująca. Trzeba odmiénic znaki wyrazów téy ilości, która ma być odjęta, to jest, zamiast $+$ położyć $-$, a zamiast $-$ położyć $+$; potem ilość tak odmiénioną, dodać do téy ilości, od której ma być odjęta, i uczynić zebranie.

P R Z Y K Ł A D.

Od	-	-	$6a - 3b + 4c$
Ma być odjęto	-	-	$5a - 5b + 6c$
Pisz się	-	-	$6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$
Po zebraniu będzie	-	-	$a + 2b - 2c$

Zeby pojąć przyczynę téy reguły, obierzmy sobie prościęjszy przykład. Dajmy że od a ma być odjęto b ; iawna jest, iż trzeba napisać $a - b$; lecz gdyby przyшло, od a odjąć $b - c$; powiedziało się, że trzeba napisać $a - b + c$; iakóż oczywista jest, że nie całe b powinno być odjęte, ale tylko b zmniejszone o c , jeżeli tedy odéymie się z razu całe b , pisząc $a - b$, trzeba potem nadgrodzić tę ilość, o którą zawiele odjęto się, to jest że trzeba przydać c , i napisać $a - b + c$; co wychodzi na to, zeby odmiénic znaki wszystkich ilościów, które mają być odjęte.

12. Iłości poprzedzone znakiem $+$, nazywają się ilości twierdzące (positivus); ilości zaś poprzedzone znakiem $-$, są ilości przeczące (negativus). Rozbierzemy potem nieco obłzérnię, istotę i użycie tych ilościów, uważając je z osobna, iedne naprzeciw drugim.

O mnożeniu.

13. Mnożenie Algebraiczne, wyciąga pewnych uwag szczególnięszych, które nie są potrzebne w mnożeniu Arytmetyczném: oprócz ilościów, należy ieszcze dać baczenie na znaki.

W reszcie mając wzgląd na wartości liczebne, ilościów wyrażonych przez głoski, można sobie uczynić, toż samo wyobrażenie mnożenia Algebraicznego, co i mnożenia Arytmetycznego: tak mnożyć a przez b , jest to powtórzyć ilość oznaczoną przez a tyle razy, ile znajduje się iednościów w ilości oznaczony przez b .

14. Lecz ponieważ tu jest zamiarém naszym, odprawiać albo oznaczać mnożenie, bez względu na wartości liczebne, przeto trzeba żebyśmy ustanowili znaki, którymi wskazywać się ma to mnożenie.

Oprócz znaku $\times$ który podał się w Arytmetyce, używa się także punktu położonego między dwiema ilościami, mającemi mnożyć się; tak że $a.b$, albo $a \times b$, znaczy toż samo.

Znaczy się i jeszcze mnożenie, (przynajmniej w ilościach jednoślownych), niekładąc żadnego znaku, między mnożnym i mnożnikiem; tak: $a \times b$, $a.b$, ab , są trzy wyrażenia, z których każde znaczy, że trzeba rozmnożyć a przez b ; ostatni sposób, jest pospolicię używany.

15. Zeby rozmnożyć $a b$ przez c , pisze się abc ; mnożąc ab przez cd , pisze się $abcd$ i. t. d. mało na tém zależy, w jakimkolwiek porządku napiszą się te głoski: albowiem takowe, bądź jakim spodobą się porządkiem będą rozmnożone, zawsze dadzą w wypadku też samą mnogość.

16. Z tego sposobu, dopiero opisanego, w jaki oznacza się mnożenie ilościów jednoślownych, trzeba sobie wnieść: Ze mnogość powstająca z rozmnożenia wielu ilościów Algebraicznych jednoślownych, powinna zawierać w sobie wszystkie głoski składające tak mnożnego, iak mnożnika.

17. Kiedy ilości, które mają być rozmnożone, składają się z iednéyze głoski,

flki, takowa głoska, w mnogości znaydować się musi tyle razy napisana, ile razy jest położona w obu czynnikach; liczba ilościów mnożnych, niech będzie iaka chce.

Tak a , rozmnożone przez a , daie aa ; aa rozmnożone przez aaa , daie $aaaaa$; aa rozmnożone przez aaa , i jeszcze przez a , daie $aaaaa$.

W takim razie, zgodzono się na to, ażeby takową głoskę napisać tylko raz, przydaiać ię przyzwoitą cyfrę, która nazywa się *wykładnik* (exponens), i która pisze się po prawéy ręce głoski, nieco powyżéy; ten wykładnik wyraża, wiele razy ta głoska była czynnikiem, albo wiele razy powinny być napisana.

I tak zamiast aa , pisać się będzie a^2 ; zamiast $aaaa$, napisze się a^4 , zamiast $aaaaa$, napisze się a^5 i. t. d.

Trzeba to należycie wbić sobie w pamięć: Ze *wykładnik* głoski, znaczy wiele razy ta głoska, była czynnikiem w mnogości.

W ilości a^3b^2c , są trzy czynniki różnéy wartości, to jest a, b, c ; ale z tych trzech głosek pierwsza, była czynnikiem trzy razy, druga dwa razy, a trzecia raz: iakóż a^3b^2c , jest warto tak wiele, iak $aaabbc$.

18. Ponieważ wykładnik oznacza, wiele razy ilość iakowa była czynnikiem, prze-

przeto pokazuje oraz, do jakiego stopnia ta ilość jest podniesiona.

Tak w a , wykładnik 5 znaczy, że a jest podniesione do piątego stopnia.

19. Należy o tem dobrze pamiętać, żeby współczynnika nie mieszać z wykładnikiem, to jest niebrać np. a^2 , za $2a$, a^3 za $3a$: albowiem w wyrażeniu $2a$, współczynnik 2, oznacza że a jest dodane do a , to jest że $2a$, są warte tyle co $a + a$; w wyrażeniu zaś a^2 , wykładnik 2 oznacza, że głoska powinna być wcięż napisana dwa razy, bez żadnego znaku, to jest że rozumie się sama przez siebie rozmnożona, albo że jest czynnikiem dwa razy; słowem a^2 , znaczy tyle co $a \times a$, tak iż jeżeli a , warto np. 5, $2a$ będą warte 10; lecz a^2 , są warte 25.

20. A stąd pokazuje się, że chcąc rozmnożyć dwie ilości jednostajne, które miałyby w sobie wspólne głoski, działania może być skrócone, dodając wykładniki głosek jednakowych w mnożnym i mnożniku.

Tak mając rozmnożyć a^5 przez a^3 , napisze się a^8 ; to jest pisze się głoska a , dodawszy ię za wykładnika, sumę dwóch wykładników $5 + 3$. Podobnie chcąc rozmnożyć, $a^3 b^2 c$, przez $a^4 b^3 c d$, napisze się $a^7 b^5 c^2 d$, kładąc naprzód wszystkie różne głoski $a b c d$, a potem dając pierwszemu za wykładnika 7, to jest sumę dwóch wykładników $3 + 4$, drugiemu 5, albo sumę dwóch wykładników $2 + 3$, trze-

zeciemy 2, to jest sumę dwóch wykładników $1 + 1$; bo lubo wykładnik ilości c , nie jest naznaczony, jednakże dorozumiewać się powinien, gdyż c znajduje się czynnikiem raz jeden.

Przeto: Każda głoska, której nie jest przydany wykładnik, ma za wykładnika 1; i odwrotnie, ile razy głoska ma mieć za wykładnika 1, w pisanu można opuścić takiego wykładnika.

Taka jest reguła służąca do głosek, w ilościach jednostajnych.

21. Kiedy ilości jednostajne, są poprzedzone jaką cyfrą, to jest współczynnikiem, mnożenie trzeba zacząć od współczynnika, które odbywa się podług reguł Arytmetyki.

Tak mając rozmnożyć $5a$ przez $3b$, mnoży się naprzód 5 przez 3, a potem a przez b , i wypadnie mnogość $15ab$. Podobnie mając rozmnożyć $12a^3 b^2$ przez $9a^4 b^3$, będzie $108a^7 b^5$.

22. Założywszy te fundamenta, przystąpmy teraz do mnożenia ilości w wielostronnych. W takowem mnożeniu, zachowa się tenże porządek, który przepisał się w Arytmetyce do liczb złożonych z wielu cyfer; to jest że trzeba rozmnożyć kolejno, każdy wyrząd mnożnego, przez każdy wyrząd mnożnika, zachowując reguły podane do ilości w jednostajnych. W Algebrze, niema koniecznej potrzeby, że-

żeby iak w Arytmetyce, poczynąć działa-
nie raczćy od prawćy ku lewćy stronie,
aniżeli od lewćy ku prawćy, bo to iest
wszystko iedno, i owizćm my w działa-
niach naszych, używać bćdzićmy tego
ostatniego sposobu, iako wziętego w po-
spolitzcy zwyczaj.

P R Z Y K Ł A D I.

Niech bćdzie zadano rozmnożyć $a + b$
przez $c + d$

Mnogość $ac + bc + ad + bd$.

1^o Mnoży się a przez c , co daie (14) ac . *2^o* Mno-
ży się b przez c , i bćdzie bc ; dodaie się ta druga
mnogość do pićrwszćy, przy pomocy znaku $+$,
i bćdzie $ac + bc$, to iest mnogość z iloścć $a + b$,
rozmnożonćy przez c .

Mnoży się podobnićż a i b , przez d , co uczy-
ni $ad + bd$, które dodane do pićrwszćy mnogoścć,
nczynią $ac + bc + ad + bd$.

Jakóż mnożyć $a + b$, przez $c + d$, iest to brać
nietylko a ale oraz b tyle razy, ile znayduie się
iednoścćw w całkowitoścć $c + d$, to iest tyle ra-
zy, ile iest iednoścćw w c , wićcćy tyle razy, ile
iest iednoścćw w d .

P R Z Y K Ł A D II.

Jest zadano rozmnożyć $a - b$
przez $c - d$.

Mnogość $ac - bc - ad + bd$.

Rozmnożywszy a przez c , co uczyni ac , mnoży się
dalćy b przez c , skąd wypada bc ; lecz zamiast do-
dania tćy mnogoścć do pićrwszćy, owizćm odćy-
muie się: albowiём mnożąc całe a , iak uczyniło się
w pićrwszćm działaniu, iawna iest, że o iloścć roz-
mno-

zmnożyło się wićcćy, iak należało, gdyż a , powin-
no było bydż zmnićyszone o b ; a zatćm trzeba z
tćy mnogoścć odćić iloścć b rozmnożoną przez c ,
to iest odćić bc .

Podobnićmżć sposobćm znaydzie się, że $a - b$
rozmnożone przez d , uczyni $ad - bd$; lecz ponie-
waż znak obecnego mnożnika d , iest $-$, dla tego
trzeba odćić tć drugą mnogość od pićrwszćy, co
uczyni (11) $ac - bc - ad + bd$.

Jakóż ponieważ mnożnik $c - d$, iest mnićyszy
od c o iloścć d , przeto iawna iest, że mnożnego,
trzeba powtórzyć tylko tyle razy, ile znayduie się
iednoścćw w c zmnićyszonćm o a ; a zatćm wzię-
wszy $a - b$, tyle razy ile iest iednoścćw w c , mno-
gość bćdzie zawielka o wartość $a - b$, powtórzo-
ną tyle razy, ile iest iednoścćw w d ; wićcć trze-
ba odćić takową mnogość, wypadłą z rozmnoże-
nia $a - b$ przez d .

23. Wziąwszy na uwagć, znaki wy-
razów składaiących mnogość całkowitą
 $ac - bc - ad + bd$, i przyrównawszy ie do
znaków, wyrazów mnożnego i mnożni-
ka, z których powstały, pokaże się *1^o* Ze
wyraz a , w którym dorozumićwa się znak
 $+$, bćdąc rozmnożony przez c , w którym
także dorozumićwa się znak $+$, dał mno-
gość ac , w którćy podobnićż dorozumić-
wa się znak $+$.

2^o Ze wyraz b maiaćy znak $-$, bć-
dąc rozmnożony przez wyraz c , w któ-
rym dorozumićwa się znak $+$, dał mno-
gość bc , poprzedzoną znakićm $-$.

3^o Ze wyraz a , maiaćy znak $+$, roz-
mnożony przez wyraz d , maiaćy znak $-$,
Tom. II. B dał

dać mnogość $a d$ poprzedzoną znakiem —.
^{4te} Nakoniec, że wyraz b mający znak —, rozmnożony przez wyraz d , mający także znak —, dać mnogość $b d$, poprzedzoną znakiem +.

A zatem, w mnożeniach tym podobnych, zawsze łatwo będzie można rozpoznać, kiedy mnogości szczególne powinny być odjęte, a kiedy dodane: doślyć będzie zachować tym końcem, dwie reguły następujące, wynikające z uwag poprzedzających.

24. Jeżeli dwa wyrazy, które mają być rozmnożone, są poprzedzone oba podobnym znakiem, to jest oba mają znak +, lub oba znak —; mnogość powstająca z nich, zawsze mieć będzie znak +; jeżeli zaś przeciwnie, dwa wyrazy, będą poprzedzone różnymi znakami, to jest jeden znakiem +, a drugi znakiem —, albo jeden znakiem —, a drugi znakiem +, mnogość powstająca z nich, zawsze mieć będzie znak —.

Przy pomocy tych reguł, odprawić można wszelkie mnożenia Algebraiczne; lecz żeby w tém zachować jakiś porządek, naprzód trzeba dać baczenie na regułę znaków, potem na regułę spółczynników, a naostatek, na regułę głosek i wykładników.

Zo-

Zobaczmy te wszystkie reguły przyśtósowane w następującym przykładzie.

P R Z Y K Ł A D III.

Jest zadano rozmnożyć $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
 przez $-a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{r} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{array}$$

Mnogość $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Mnożą się porządkiem trzy wyrazy, $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$, przez pierwszy wyraz mnożnika a^3 . Ponieważ dwa wyrazy $5a^4$ i a^3 mają znak iednakowy, przeto mnogość powstająca z nich powinna mieć znak + (24); lecz takowy znak niepisze się, iako należący pierwszemu wyrazowi mnogości (7).

Mnoży się potem spółczynnik ilości a^4 , który jest 5, przez spółczynnika i. ilości a^3 , co uczyni 5; naostatek mnoży się a^4 przez a^3 , czyniąc dodanie obu wykładników 4 i 3 podług reguły (20), co da a^7 , a zatem mnogość będzie $5a^7$.

Przystępując do wyrazu $-2a^3b$, żeby go rozmnożyć przez a^3 , trzeba uważać, że te dwie ilości mają znaki różne, a zatem mnogość powstająca z nich powinna mieć znak —; mnoży się więc spółczynnik 2 wyrazu a^3b , przez spółczynnika i. wyrazu a^3 , a potem a^3b przez a^3 , skąd wypadnie mnogość $-2a^6b$.

Podobnymże sposobem, wyraz $+4a^2b^2$, rozmnożony przez a^3 , da $4a^5b^2$.

Rozmnożywszy wszystkie wyrazy mnożnego przez a^3 , trzeba je rozmnożyć podobnie przez następujący drugi wyraz mnożnika $-4a^2b$. A tak wyraz $5a^4$, rozmnożony przez $-4a^2b$, mając baczenie na różność znaków, da $-20a^6b$; wyraz $-2a^3b$, rozmnożony przez $4a^2b$, iednakowego znaku,

B a

da

7368

da $+ 8a^3b^2$; wyraż $4a^2b^2$, rozmnożony przez $4a^2b$, różnego znaku, da $- 16a^4b^3$.

Nakoniec, przystępując się do mnożenia przez trzeci wyraż mnożnika $2b^3$; w którym postępując sobie według tychże samych reguł, znajdzie się trzecia mnożność cząstkowa, iako to: $+ 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Uczyniwszy dodanie, i zebranie tych wszystkich mnożności, wypadnie na mnożność całkowitą $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

25. Zeby nabyć przyzwyczajenia, i wprawności do tych reguł, można zabawiać się przykładami niżej położonemi w tablicy, do których służą następujące uwagi.

W pierwszym przykładzie jest rozmnożony wyraż $a + b$, znaczący w powłeczności summy dwóch ilościów jakichkolwiek, przez wyraż $a - b$, znaczący w powłeczności, różnicę między temi ilościami, skąd wypada mnożność $a^2 - b^2$, która jest różnicą, między kwadratem pierwszym, a kwadratem drugim, to jest różnicą kwadratów, dwóch ilościów. A zatem można powiedzieć w powłeczności, *Ze summa dwóch ilościów, rozmnożona przez ich różnicę, daie zawsze, na mnożność powstającą z nich, różnicę między kwadratami tychże ilościów.* Wziąwszy dwie liczby jakiekolwiek np. 5 i 3, summa ich czyni 8; a różnicą są 2; te dwie liczby rozmnożone jedna przez drugą, dadzą mnożność 16, która jest różnicą między kwadratami liczb 5 i 3; to jest, między 25 i 9. I odwrotnie, różnica między kwadratami dwóch ilościów, zawsze może być wzięta, za mnożność pochodzącą z rozmnożenia tych dwóch ilościów, przez ich różnicę. I tak ilość $b^2 - c^2$, która jest różnicą, między kwadratem głośki b , a kwadratem głośki

ki c , pochodzi z rozmnożenia ilości $b + c$, przez $b - c$. Te dwa podania będą nam użyżne w dalszym przeciągu: a tym czasem pokazuje się już iedna użyteczność Algebry, że przez nią odkrywają się prawdy powszechne.

Drugi przykład dowodzi sposobem powłecznym i prostym, to co powiedziało się w Arytmetyce, o złożeniu kwadratu; to jest. *Ze kwadrat summy dwóch ilościów $a + b$, zawiera w sobie kwadrat a^2 pierwszej ilości, podwójność $2ab$, pierwszej ilości rozmnożonej przez drugą, i kwadrat b^2 drugiej ilości.*

Trzeci znowu przykład, potwierdza to co przepisało się w Arytmetyce o złożeniu sześcianu; gdzie kwadrat $a^2 + 2ab + b^2$ ilości $a + b$, rozmnożony przez $a + b$, daie $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; to jest, że pierwszym wyrazem, jest sześciąt ilości a ; drugim wyrazem, który na jedno wychodzi co $3a^2 \times b$, jest potrójność kwadratu a^2 rozmnożona przez b ; trzecim wyrazem jest potrójność ilości a , rozmnożona przez kwadrat b^2 , to jest $3ab^2$; naostatek b^3 , jest sześcianiem ilości b .

26. Zeby naznaczyć rozmnożenie między dwiema ilościami wielostronnemi, każda z tych ilościów, pisząc się zwykłą między nawiasami (parenthesis), położymy między niemi iaki znak mnożenia, o których wyżej (14); a czasem nawet niekładać się żadnego znaku. Tak mając naznaczyć, że całkowitość ilości $a^2 + 3ab + b^2$, ma być rozmnożona przez całkowitość ilości $2a + 3b$, pisze się: $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$; albo $(a^2 + 3ab + b^2) \cdot (2a + 3b)$; albo też tylko $(a^2 + 3ab + b^2)$

b^2) ($2a + 3b$). Częstoć zamiast pisa-
nia każdej ilości między nawiasami, tak-
we ilości, tylko zwykły nakrywać się li-
nią wciąż przeciągniętą, iakoto —
 $a^2 + 3ab + b^2 \times 2a + 3b$.

27. Trafia się bardzo wiele okazyi,
w których użyteczniéy bywa, niewykony-
wać mnożenia, ale go tylko wskazać. Nie-
można do tego podać reguł powszechnych;
bo ta rzecz zawisła od szczególnych oko-
liczności, wyciągających takowych dzia-
łań: praktyka będzie najlepszym nauczy-
cielém w téy mierze. Atoli można po-
wiedzieć dosyć powszechnie, że w ten czas
należy przestać na samém wskazaniu mno-
żenia, kiedy ma po niem nastąpić dziele-
nie: albowiem ponieważ to, (iak zoba-
czymy zaraz), częstoć odbywa się
przez samo wyrzucenie spólnych czynni-
ków tak z dzielnego iak z dzielnika;
przeto łatwiey będzie można dostrzedz
tych czynników, kiedy mnożenie tylko
jest wskazane.

O Dzieleniu.

28. Sposób Algebraiczny, odprawienia
tego działania, bardzo wiele za-
leży na znakach, które przepisały się wy-
żéy

żéy do mnożenia. Cél zaś iego, jest ten-
że sam co i w Arytmetyce.

29. Kiedy ilość zadana do rozdzie-
lenia, niebędzie mieć żadnéy głoski spól-
néy z dzielnikiem, natenczas, niepodobna
odprawić działania, ale tylko trzeba go
wskazać, co wykonywa się, pisząc dziel-
nika pod dzielnym w postaci ułamka, i
oddzielając linią jeden od drugiego.

Tak, żeby naznaczyć, iż a , ma bydź rozdzie-
lone przez b , pisze się $\frac{a}{b}$, i wymawia się a roz-
dzielone przez b ; mając naznaczyć że $aa + bb$, ma
bydź rozdzielone przez $c + d$, napisze się $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30. Jeżeli tak dzielny, iak dzielnik
są jednosłowne, i wszystkie głoski znay-
dujące się w dzielniku, znaydują się także
i w dzielnym, dzielenie może bydź od-
prawione doskonale, podług następujące-
go prawidła: Trzeba wyrzucić wszystkie
głoski spólnie dzielnikowi, a pozostałe głoski
dać wieloraz.

Tak mając rozdzielić ab przez a , wyrzuciwszy
głoskę a , z dzielnego ab , zostanie wieloraz b . Ze-
by rozdzielić abc przez ab , wyrzuci się z dzielne-
go ab , co da na wieloraz c .

Jakóż, ponieważ głoski niesą między
sobą oddzielone żadnym znakiem (14),
B 4 prze-

przeto są czynnikami ilości, którą składa-
ia, a zatem głoski dzielnika będąc wspólne
dzielnemu, są czynnikami tego dzielnego;
lecz pokazało się w Arytmetyce, że roz-
dzieliwszy mnogość przez jednego z ię-
czynników, za wieloraz powinniśmy wy-
paść drugi czynnik; więc wieloraz, po-
winiemy być złożony z głosek dzielnego,
które nieznajdują się w dzielniku.

31. Stąd wynika, że kiedy ilość bę-
dzie miała wykładniki, zachować trzeba
regulę następującą, to jest, *odjąć wykla-*
dnika każdej głoski położony w dzielni-
ku, od wykładnika podobnych głosek znay-
dujących się w dzielnym.

Tak mając rozdzielić a^3 przez a^2 , odéyma się
2. od 3, i zostanie 1; a zatem wieloraz będzie a^1 ,
albo a . Podobnież po rozdzieleniu ilości $a^4b^3c^2$
przez a^2bc , wypadnie wieloraz a^2b^2c .

Jakóż $\frac{a^3}{a^2}$, jest toż samo, co $\frac{aaa}{aa}$, które po-
dług reguły daney (30), wyrzuciwszy głoski wspól-
ne dzielnemu i dzielnikowi, przemienni się w a .

32. Więc jeżeli iaka głoska, mieć
będzie tegoż wykładnika tak w dzielnym
jak w dzielniku, takowa głoska w wielo-
razie mieć będzie za wykładnika zero.

Tak a^3 rozdzielone przez a^3 , da a^0 ; a^3bc^2
rozdzielone przez a^2bc^2 , da na wieloraz $a^1b^0c^0$, al-
bo ab^0c^0 .

A

A w takim razie, można opuścić te
głoski, które mają zero za wykładnika;
bo te nieznaczają co innego, tylko jedność.
Jakóż w dzieleniu a^3 przez a^3 , szuka się,
wiele razy a^3 mieści w sobie a^3 , gdzie
jawna jest, że wielorazem musi być 1;
z drugiey strony, a^3 rozdzielone przez
 a^3 , daie wieloraz a^0 ; więc a^0 , jest wár-
to 1. *W powszechności, każda ilość ma-*
iąca za wykładnika zero, jest warta 1.

33. Jeżeli niektóre głoski w dzielni-
ku, niebędą wspólne dzielnemu, albo jeżeli
niektóre wykładniki dzielnika, będą wię-
kize jak wykładniki podobnych głosek
dzielnego, natenczas dzielenie nieda od-
prawić się doskonale, ale tylko trzeba go
wskazać, iak nauczyło się wyżej (29).
Atoli takowy wieloraz, albo ilość ułam-
kowa przezeń oznaczona, może być
przyprowadzona do prościyszego wyra-
zu. Reguła do tego służąca zależy na
tém: ażeby wyrugować wspólne głoski w
dzielnym i w dzielniku; tak że jeżeli znay-
dować się będą wykładniki, wyrzuca się
głoska mająca mniejszego wykładnika, a
wykładnik większy téż głoski, zmniéy-
sza się o podobną ilość.

Np. gdyby zadano było rozdzielić, a^5bc^3 , przez
 $a^2b^3c^4$; napisze się $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$; co przywieść można do
pro-

prościęyszego wyrażenia w ten sposób: trzeba wymazać z dzielnika a^2 , a w dzielnym napisać tylko a^3 ; tudzież z dzielnego wymazać b , a w dzielniku napisać tylko b^2 ; nakorciec wyrażać z dzielnego a^3 , a w dzielniku napisać tylko c ; skąd zrobi się ilość $\frac{a^3}{b^2c}$. Podobnież znalazłoby się, że $\frac{a^2b^5}{a^3bc^2d}$,

da przemienić się na $\frac{b^4c}{ad}$.

Jeżeli po odprawieniu takowego działania, w dzielnym niezośtałoby żadnej głoski, natenczas na miéysce jego napisze się jedność.

Tak $\frac{a}{a^3}$, po uczynioném zebraniu, odmiéni się w $\frac{1}{a^2}$.

Przyczynę tych reguł można łatwo zrozumieć, na fundamencie tego co już powiedziało się wyżej; albowiem rugować jednakową liczbę głosek, tak z dzielnego iak z dzielnika, jest to rozdzielić oba wyrazy ułamka, oznaczające wieloraz, przez tę samą ilość: takowe zaś działanie, iak widzieliśmy w Arytmetyce, wartości nieodmiénia, a ułamek wystawia nam w prościęyszym wyrażeniu.

34. Dotąd niémiało się żadnego względu, na spółczynniki iużto dzielnego, iuż dzielnika, iuż obódwóch. Reguła do tego służy taż sama co w Arytmetyce.

metryce, to jest że trzeba rozdzielić ieden przez drugi. Jeżeli dzielenie niemoże odprawić się dołkonale, spółczynnik zostawia się w kształcie ułamka, który tylko, jeżeli to da się uczynić, przywodzi się do prościęyszego wyrazu.

Np. mając rozdzielić $8a^3b$, przez $4a^2b$; rozdzieliwszy 8 przez 4, będzie wieloraz 2; dzieląc potem a^3b , przez a^2b , znajdzie się wieloraz a , a zatem całkowity wieloraz będzie $2a$.

Mając rozdzielić $8a^3b^2$, przez $6ab$; napisze się $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, co można zebrać na $\frac{8a^2b}{6}$ albo $\frac{4a^2b}{3}$.

35. Reguła wyżej przepisana (33) jest powszechna, czyto dzielny i dzielnik są iednosłowne, czy wielosłowne, byleby w tym ostatnim razie, głoski wspólne dzielnemu i dzielnikowi, były oraz wspólne wszystkim wyrazóm, znakami $+$ lub $-$ odłączonym.

Tak mając np. rozdzielić $a^3 + 4a^2b - 5a^2b^3$, przez $a^3 - 5a^2b$, wieloraz $\frac{a^3 + 4a^2b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$, przemienić można w ilość $\frac{a^3 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$, rugując a^2 ,

które jest spólnym czynnikiem wszystkich wyrazów dzielnego i dzielnika.

36. Jeżeli dzielny i dzielnik, będą wielosłowne, niemożna podać powyższych reguł, do rozeznania za samém spóy.

spóżyżeniem, czy dzielenie może być doskonale odprawione, lub nie. Dla upewnienia się o tém, i oraz dla wynalezienia wielorazu, trzeba przedsięwziąć następujące działanie.

1^o Napisać dzielnego i dzielnika w jednej linii, i wyrazy ich względem jednóży głoski obóm spółnéy, tak rozporządzić, żeby wielkości ilościów, kolejno po sobie następowały, to jest żeby najpierw napisać ten wyraz w którym pomieniona głoska ma największego wykładnika, a po nim kolejno drugie wyrazy następujące, podług coraż mniejszej wartości wykładników.

2^o Zrobiwszy to rozporządzenie, odłącza się dzielnego od dzielnika przez linię pionową, i przystępuje się do dzielenia tylko pierwszego wyrazu dzielnego, przez pierwszy wyraz dzielnika, podług reguł podanych wyżej (30. i daley); wypadły stąd wieloraz pisze się pod dzielnikiem.

3^o Przez wieloraz dopiero wynaleziony, mnożą się porządkiem wszystkie wyrazy dzielnika, i piszą się kolejno wypadające mnogości z odmiennymi znakami, dla następującego odęymowania.

4^o Podkryśla się wszystko; uczyniwszy zebranie wyrazów podobnych w dziel-

dzielnym i w mnogości, na spodzie napisze się reszta, dla zaczęcia dalszego dzielenia tymże sposobem, biorąc za pierwszy wyraz, ten z pozostałych wyrazów, który ma największego wykładnika.

W tém działaniu, tak iak w mnożeniu, trzeba pamiętać na znaki wyrazów dzielnego i dzielnika, trzymając się téż saméy reguły co w mnożeniu, to jest że

Jeżeli dzielnego i dzielnik mają znaki jednakowe, wieloraz powinién mieć znak +; jeżeli zaś takowe znaki będą różne, wielorazowi da się znak —.

Ta reguła co do znaków, zasadza się na tém, że wieloraz rozmnożony przez dzielnika, powinién nazad oddać dzielnego. A zatém wieloraz musi mieć takie znaki, ażeby rozmnożywszy go przez dzielnika, mnogość dała dzielnego z iégo znakami: z tego zaś warunku, koniecznie wynika reguła dopiero wyżej założona.

Zeby w tém działaniu postępowało się porządnie, naprzód trzeba zaczynać od znaków, potem dzieli się spółczynnik, a naostatku głoski.

P R Z Y K Ł A D.

Jest zadano rozdzielić $aa - bb$, przez $b + a$.
Rozporządzam dzielnego i dzielnika, względem którychkolwiek z tych dwóch głosek np. względem a , i piszę iak następuje.

Dzielnego

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Dzielný} & \begin{array}{l} aa - bb \\ -aa - ab \end{array} & \begin{array}{l} a + b \\ a - b \end{array} & \text{Dzielnik} \\
 \hline
 \text{Reszta} & \begin{array}{l} -ab - bb \\ +ab + bb \end{array} & & \\
 \hline
 \text{Reszta} & - & o. & o.
 \end{array}$$

Ponieważ znak pierwszego wyrazu w dzielnym, jest tenże co znak pierwszego wyrazu w dzielniku, przeto w wielorazie kładzie się znak $+$, ale w pisaniu opuszcza się, dla tego że przypada przed pierwszym wyrazem.

Dzieli się aa przez a , skąd wynika wieloraz a , który pisze się pod dzielnikiem.

Mnożą się porządkiem dwa wyrazy dzielnika a i b , przez pierwszy wyraz wielorazu a , i kładą się pod dzielnym mnogości aa i ab , poprzedzone znakiem $-$, to jest przeciwnym temu, który wypadł z mnożenia; ponieważ te mnogości mają być odjęte od dzielnego.

Czyni się zebranie, wymazując dwa wyrazy aa i $-aa$, które znoszą się wzajemnie; a zostaje się $-ab$: ta zaś ilość, z pozostałym wyrazem dzielnego $-bb$, składa część resztującą do rozdzielania.

Dzieli się $-ab$, przez a , i daje się wielorazowi znak $-$, z przyczyny różności znaków poprzedzających dzielnego i dzielnika; co zaś należy do głosek, znajduje się wieloraz b , i przypisuje się do poprzedzającego wielorazu.

Mnożą się oba wyrazy dzielnika a i b , przez nowowynaleziony wyraz wielorazu $-b$, i wypadną mnogości $-ab - bb$, w których odmienniwszy znaki, napisze się pod częściami resztującymi dzielnego, $+ab + bb$. Potem robi się zebranie, wymazując wyrazy jednakowe, a mające przeciwne znaki: co odprawiwszy, ponieważ nic nie zostało, wnosi się stąd, że wielorazem jest ilość $a - b$.

Mo-

Można także było rozporządzić dzielnego i dzielnika względem głoski b , a natenczas, potrzebny dzielić $-bb + aa$, przez $b + a$; w czym nastąpiwszy sobie wzwyż opisanym sposobem, znalazłby się wieloraz $-b + a$, to jest taż sama ilość co wyżej $a - b$, tylko napisana odwrotnie.

Zobacz przykłady w przyłączonej tablicy.

Przykłady Mnożenia.

$$\begin{array}{r}
 \text{1szy} \\
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 + ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{2gi} \\
 a + b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 - ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 - b^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{3ci} \\
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{4ty} \\
 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\
 \hline
 20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3 \\
 - 25a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4 \\
 + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\
 \hline
 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{5ty} \\
 \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{3}a^2b + \frac{1}{3}b^3 \\
 \frac{2}{3}ab - 2b^2 \\
 \hline
 \frac{2}{3}a^4b - \frac{12}{3}a^3b^2 + \frac{3}{3}ab^4 \\
 - \frac{4}{3}a^4b^2 + \frac{8}{3}a^2b^3 - b^5 \\
 \hline
 \frac{2}{3}a^4b - \frac{12}{3}a^3b^2 + \frac{8}{3}a^2b^3 + \frac{3}{3}ab^4 - b^5
 \end{array}$$

Przy.

N A U K A Przykłady dzielenia.

1szy

$$\begin{array}{r}
 a^3 - b^3 \quad | \quad a - b \\
 - a^3 + a^2b \quad | \quad a^2 + ab + b^2 \\
 \hline
 + a^2b - b^2 \\
 - a^2b + ab^3 \\
 \hline
 + ab^2 - b^3 \\
 - ab^2 + b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

2gi

$$\begin{array}{r}
 8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 \quad | \quad 4a^2 + 5ab + b^2 \\
 - 8a^4 + 10a^3b - 2a^2b^2 \quad | \quad 2a^2 - 3ab \\
 \hline
 - 12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 \\
 + 12a^3b + 15a^2b^2 - 3ab^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

3ci

$$\begin{array}{r}
 a^4 + 2aabb + b^4 - c^4 \quad | \quad aa + bb + cc \\
 - a^4 - aabb - aacc \quad | \quad aa + bb - cc \\
 \hline
 + aabb - aacc + b^4 - c^4 \\
 - aabb - b^4 - bbcc \\
 \hline
 - aacc - bbcc - c^4 \\
 + aacc + bbcc + c^4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

4ty

$$\begin{array}{r}
 \frac{2}{7}a^3 - \frac{2}{35}ab^2 + \frac{1}{5}a^2b - \frac{3}{20}b^3 \quad | \quad \frac{2}{7}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\
 - \frac{2}{7}a^3 + \frac{2}{35}ab^2 \quad | \quad \frac{3}{7}a + \frac{1}{4}b \\
 \hline
 \frac{1}{5}ab - \frac{3}{20}b^3 \\
 - \frac{1}{5}ab + \frac{3}{20}b^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

5ty

M A T E M A T Y K I.

$$\begin{array}{r}
 20a^5 - 41a^4b + 5a^3b^2 - 4a^2b^3 + 5ab^4 - 3b^5 \quad | \quad 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\
 25ab^4 - 6b^5 - \\
 20a^5 + 16a^4b - \\
 20a^3b^2 + 12a^2b^3 \\
 \hline
 - 25a^4b + 30a^3b^2 - 33a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 \\
 + 25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^4 \\
 \hline
 + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\
 - 10a^3b^2 + 8a^2b^3 - 10ab^4 + 6b^5 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

37. Zdarza się często, że ilość wynikająca z kilku różnych działań, może być wyrażona w kształcie mnogości, czyli wypadku powstającego z rozmnożenia: gdy to przytrafi się, częstokroć będzie rzeczą pożyteczną, dać ię takową postać, i tylko wskazać mnożenie między czynnikami. Lubo sposób powłzechny do postrzeżenia takowych czynników, zawisł od wiadomości które podadzą się nizéy, atoli obeznawszy się dobrze z mnożeniem i dzieleniem, w wielu okazyach łatwo można postrzedz pomienionych czynników.

Np. mając dodać $gab - 3bc + a^2$, do $3ab + 3bc - 2a^2$, wypadłoby $8ab - a^2$; ta ilość, z przyczyny głoiki a , będącý spólnym czynnikiem w dwóch wyrazach gab , i a^2 , może być uważana, iakoby pochodząca z rozmnożenia $8b - a$ przez a ; dla czego też, da się napisać w ten sposób $(8b - a) \times a$. Rzecz bardzo potrzebna, przyuczyć się do przemian tego gatunku.

Tom II.

C

O

O sposobie znalezienia największego spóldzielnika, dwóch ilościów Algebraicznych.

38. Sposób znalezienia największego spóldzielnika dwóch ilościów Algebraicznych, jest podobny tamtemu, którego używa się do liczb w Arytmetyce. Rozporządziwszy dwie ilości względem iednéyże głośki, trzeba rozdzielić ilość, w której ta głośka ma największego wykładnika przez drugą ilość i to dzielenie póty powtarzać, póki wykładnik ilości dzielnéy nieźrobi się mnieyszym, albo przynajmniéy równym wykładnikowi drugiey ilości. Natenczas ta druga ilość, dzielić się będzie przez resztę pozostałą z dzielenia, tak długo, iak dopiero przepisało się względem piérwśzey ilości. Daley dzieli się druga reszta przez piérwśzą, i znowu nowa reszta, dzieli się przez poprzedzającą; a kiedy dzielenie odprawi się spełna, to ostatni dzielnik użyty, będzie żądanym spóldzielnikiem.

Nim przystąpimy, do przytósowania téy reguły, dla łatwieyszego potém onéy użycia uważmy wprzód, że w spóldzielniku dwóch ilościów, nie nieodmiénia się, gdy iedna z tych ilościów, moży się lub dzieli przez taką ilość, która nie jest dzielnikiem drugiey ilości, i która z tą drugą ilością niema żadnego spóldzielnika. Np. ilości ab i ac , mają za spóldzielnika a , rozmnożywszy ab przez d , będzie mnogość abd , która z ilością ac niema innego spóldzielnika, iak a , to jest tegoż samego, co był między ilościami ab i ac .

Inaczéy byłoby, gdyby ilość ab rozmnożyła się przez głośkę, która byłaby dzielnikiem ilości ac , albo miałyby z nią spólnego czynnika. Np. rozmnożywszy ab przez c , wypadłoby abc , któryto ilość, iako téż ilości ac , jest spóldzielnikiem toż samo ac . Podobnież rozmnożywszy ab przez cd , które ma iednego spólnego czynnika z ilością ab , wypadłoby $abcd$; gdzie spóldzielnikiem tak téy ilości, iako téż ilości ac , jest ac .

39. Wnieśmy stąd ród Ze ieżeli szukając największego spóldzielnika dwóch ilościów, w odprawionych koléyno dzieleniach postrzeże się, że dzielný albo dzielnik, ma iakiego czynnika albo dzielnika, któryby niebył czynnikiem drugiey ilości, takowego czynnika można wyrzucić. Zre Ze iedną z tych dwóch ilościów, można rozmnożyć przez iakąkolwiek liczbę, byleby ta liczba niebyła czynnikiem drugiey ilości, i niemiała z nią żadnego spólnego czynnika.

Teraz przytósujemy tę regułę, pomniąc na to wszystko co się dopiero rzekło.

Niech będzie zadano, ażeby znaleźć, największego spóldzielnika ilościów $aa - 3ab + 2bb$ i $aa - ab - 2bb$.

P R Z Y K Ł A D I.

$$\begin{array}{r} \text{1wszy Dzielný} \quad \{ \text{1wszy Dzielnik} \\ aa - 3ab + 2bb \quad \{ aa - ab - 2bb \\ - aa + ab + 2bb \quad \{ \text{1. 1wszy Wieloráz.} \\ \hline \text{1wsza Reszta} - 2ab + 4bb. \end{array}$$

Trzeba więc rozdzielić $aa - ab - 2bb$ przez $-2ab + 4bb$, lecz ponieważ ten nowy dzielnik, zawiera w sobie czynnika $2b$, który niejest spólnym czynnikiem wszystkich wyrazów dzielnego, przeto dożyć jest, rozdzielić $aa - ab - 2bb$, przez $-a + 2b$, to jest z dzielnika wyrugówawszy czynnika $2b$. A tak będzie.

$$\begin{array}{r} \text{2gi Dzielný} \quad \{ \text{2gi Dzielnik} \\ aa - ab - 2bb \quad \{ -a + 2b \\ - aa + 2ab \quad \{ a - b \text{ 2gi Wieloráz.} \\ \hline + ab - 2bb. \\ - ab + 2bb. \end{array}$$

$$\text{Reszta} \quad 0.$$

A zatem największym spóldzielnikiem w tym razie, jest ilość $-a + 2b$.

$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \} 7a^2 - 23ab + 6b^2$
Ponieważ niemożna rozdzielić 5 przez 7, które o.
prócz tego nie jest spólnym czynnikiem wszystkich
wyrazów drugiej ilości, przeto trzeba rozmnożyć
pierwszą ilość przez 7, co da mnogość iak następuje.

1wszy Dzielnik	1wszy Dzielnik
$35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3$	$7a^2 - 23ab + 6b^2$
$-35a^3 + 115a^2b - 30ab^2$	
$1wsza Reszta. - 11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$	5a. 1wszy wieloraz.

Widzę że jeszcze mogę rozdzielić przez te.
gół dzielnika, rozmnożywszy resztę przez 7, i wy-
rugowałszy spólnego czynnika b , a tak:

2gi Dzielnik	2gi Dzielnik
$-77a^2 + 329ab - 291b^2$	$7a^2 - 23ab + 6b^2$
$+ 77a^2 - 253ab + 66b^2$	
$2ga Reszta + 76ab - 228b^2$	- 11. 2gi Wieloraz

Trzeba więc rozdzielić $7a^2 - 23ab + 6b^2$,
przez $76ab - 228b^2$, albo raczej przez $a - 3b$,
wyrugowałszy czynnika $76b$; a tak.

3ci Dzielnik.	3ci Dzielnik.
$7a^2 - 23ab + 6b^2$	$a - 3b$
$-7a^2 + 21ab$	
$- 2ab + 6b^2$	$7a - 2b$ 3ci. Wieloraz
$+ 2ab - 6b^2$	

Reszta - - 0.
Przeto spółdzielnikiem dwóch ilościów zadanych,
jest ilość $a - 3b$.

O Ułamkach Algebraicznych.

40. Ułamki Algebraiczne, rachują się
podług tychże samych reguł co
ułamki liczebne, lecz oraz pamiętać trze-
ba na te przepisy które położyły się wy-
żey,

żey, względem dodawania, odęymowania,
mnożenia, i dzielenia ilościów Algebrai-
cznych. Ze zaś tych reguł przyśtośowa-
nie jest bardzo łatwe, więc tylko w ogól-
ności nad niem zastanowimy się.

41. Ułamek $\frac{a}{b}$, nieodmieniając iego
wartości, może być przekształconym w
ułamek $\frac{ac}{bc}$ albo $\frac{aa}{ab}$ albo $\frac{aa + ab}{ab + bb}$, i. t. d.

Jakóż te ostatnie ułamki nie są co
innego, tylko pierwotny ułamek, które-
go oba wyrazy, w pierwszej przemianie
są rozmnożone przez c , w drugiej przez
 a , a w trzeciej przez $a + b$, co niedmienia
wartości.

42. Ułamek $\frac{aac}{abc}$, jest tenże sam co
 $\frac{a}{b}$; ułamek $\frac{6a^3 + 3a^2b}{12a^3 + 9a^2c}$, jest tenże sam, co
 $\frac{2a + b}{4a + 3c}$. I to jest oczywista, uważając że

oba wyrazy pierwszego ułamka są roz-
dzielone przez ac , a znowu oba wyrazy
drugiego ułamka przez $3a^2$. W reszcie
to przywiedzenie ułamków do prościéy-
szego wyrażenia, zawiera się w tém co
iuz powiedziało się wyżej (33).

Reguła powszechna, do przywiedzenia iakiegokolwiek ułamka do naymnięszych wyrazów, zależy na tém, ażeby rozdzielić oba wyrazy przez naywiększego spóldzielnika.

43. Zeby przemienić w ieden ułamek, ilość iaką złożoną z całkowitki i z ułamka, trzeba iak w Arytmetyce, rozmnożyć całkowitkę przez mianownika przyłączonego ułamka.

Np. $a + \frac{bd}{c}$, można przemienić w $\frac{ac + bdc}{c}$.

Podobnież, $a + \frac{cd - ab}{b - d}$, przemienia się na $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$; rozmnożywszy całkowitkę a przez mianownika $b - d$, skąd po zebraniu wypadnie $\frac{-ad + cd}{b - d}$, albo $\frac{cd - ad}{b - d}$.

44. Zeby zaś wyciągnąć z ułamka Algebraicznego całkowitki, w nim znajdujące się, trzeba iak w Arytmetyce, rozdzielić licznika przez mianownika ile można, a w reszcie postąpić sobie podług reguły dzielenia wyżej podanych.

Tak ilość $\frac{3ab + ac + cd}{a}$, może być przemieniona na $3b + c + \frac{cd}{a}$. Podobnież ilość

a²

$\frac{a^2 + 4ab + 4bb + cc}{a + 2b}$, przemienia się na $a + 2b + \frac{cc}{a + 2b}$, dzieląc licznika, przez mianownika $a + 2b$.

45. Zeby wiele ułamków Algebraicznych, przyprowadzić do spólnego mianownika, trzeba użyć téż reguły co w Arytmetyce.

Tak chcąc dać spólnego mianownika, trzem ułamkom następującym $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, mnożę dwa wyrazy pierwszego przez df , dwa wyrazy drugiego przez bf , a dwa wyrazy ostatniego przez bd ; tym sposobem trzy ułamki przywiedzione do spólnego mianownika, odmienną się w ułamki $\frac{adf}{bdf}, \frac{bef}{bdf}, \frac{bde}{bdf}$.

Podobnież trzebaby sobie postąpić, gdyby liczniki albo mianowniki, lub też oba wyrazy były wielosłowne, ale zawsze pomniąc na reguły przepisane do mnożenia ilościów wielosłownych.

Tak dwa ułamki $\frac{b + c}{a + b}$ i $\frac{a - 2c}{a - b}$, przywiedzione do spólnego mianownika, odmienną się w $\frac{ab + ac - bb - bc}{aa - bb}$ i $\frac{aa - 2ac + ab - 2bc}{aa - bb}$, rozmnożywszy oba wyrazy pierwszego ułamka przez $a - b$, a oba wyrazy drugiego przez $a + b$.

46. Co się tycze dodawania i odęymowania, przywiódłszy ułamki do spólnego mianownika nie trzeba więcej, tylko zrobić dodanie lub odjęcie liczników, zachowawszy spólnego mianownika.

C 4

Tak

Tak, przywiódłszy do spólnego mianownika dwa ułamki $\frac{b+c}{a+b}$ i $\frac{a-2c}{a-b}$, takowe odmienną się iak

wyżey, w $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$, i $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$.

które po dodaniu uczynią $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$.

a po zebraniu, $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Odéymu-

iąc zaś drugi ułamek od pierwszego, byłoby $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$.

co można zebrać na $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

47. Uważmy przy téy okazji, że odéymuiąc drugi ułamek, nieodmienniliśmy znaków iego tylko w liczniku; albowiem gdyby odmiennily się znaki w liczniku i oraz w mianowniku, w takiém działaniu nieodmienniałyby się wartość ułamka, a zatem zamiast odjęcia, odprawiłoby się dodanie: iakóż $\frac{a}{b}$ jest iedno,

co $\frac{-a}{-b}$, podług reguły wyżey podaney (36).

48. Zeby rozmnożyć $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$

napisze się $\frac{ac}{bd}$; mnożąc licznika przez

licznika, i mianownika przez mianownika, iak w Arytmetyce. Podobnież $\frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} b$, uczyni $\frac{1}{4} ab$.

49. Zeby rozdzielić $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, dzia-

łanie wychodzi na rozmnożenie $\frac{a}{b}$ przez

$\frac{d}{c}$; co wykonawszy podług reguły po-

przedzaiącay, uczyni $\frac{ad}{bc}$; tudzież mając

rozdzielić $\frac{a+b}{c+d}$ przez $\frac{c+d}{a-b}$, działanie

wychodzi znowu na rozmnożenie $\frac{a+b}{c+d}$

przez $\frac{a-b}{c+d}$, co uczyni $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$

albo $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$, albo nakoniec od-

prawiwszy w liczniku wskazane mnożenia, $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

50. **M**ając wyrazić, że dwie ilości są sobie równe, oddziela się jedna od drugiey tym znakiem $=$, co wymawia się słowem *równe*; i tak wyrażenie $a=b$, wymawia się, *a* równe *b*.

Zgromadzenie dwóch lub więcey ilościów, oddzielonych od siebie znakiem $=$ jest to, co nazywa się *zrównaniem* (æquatio). Całkowitość ilościów, położonych po lewéy ręce znaku $=$, składa *pięroszą część* (*1^{um} membrum*) zrównania, całkowitość zaś ilościów, napisanych po prawéy ręce znaku $=$, składa *drugą część* tegoż zrównania. W zrównaniu $4x-3=2x+7$, $4x-3$, są pięroszą częścią, a $2x+7$ składają drugą część zadanego zrównania. Zrównania są wielce użytecznemi, do rozwiązania zagadnień zadaných względem ilościów.

Każde zagadnienie, które może być rozwiązane przez Algebrę, zawsze zawiera w swoim wyrażeniu, bądźto w oczywisty bądź w domniemany sposób, pewną liczbę warunków, podających tyle środków do upatrzenia stósfunków między ilościami niewiadomemi, i wiadomemi od których pięrowsze zawisły. Te stósfunki iak zobaczymy niżej, zawsze mogą

gą być wyrażone w wzrównaniach, w których ilości niewiadome, są połączone z wiadomemi, a to sposobem mniej lub więcey trudnym, to jest kiedy zagadnienie zawiera w sobie mniej lub więcey trudności.

Przeto, żeby przez Algebrę rozwiązać zagadnienia, które mogą być zadane względem ilościów, trzeba do tego trzech rzeczy.

1^o W wyrażeniu albo w naturze zagadnienia, upatrzeć stósfunki zachodzące między ilościami wiadomemi i niewiadomemi. Ta łatwość, iako i wiele innych, nabywa się najlepiey przez używanie; powiszechnych reguł niemożna do tego podać.

2^o Każdy z tych stósfunków trzeba wyrazić w zrównaniu. Ten warunek, może być zamknięty w iednéy regule którą podamy niżej, lecz której przystósfowanie jest mniej lub więcey łatwe, podług natury zagadnienia, sposobności, i wprawności tego, który rozwiązanie zagadnienia przedsiębierze.

3^o Trzeba rozwiązać to zrównanie, albo te zrównania, to jest znaleźć wartość ilościów niewiadomych. Ta ostatnia okoliczność, może być podciągniona pod

pod pewną liczbę reguł; dla tego od nię poczniemy.

Ponieważ zagadnienia zadane do rozwiązania, prowadzić mogą do zrównańmnię lub więcy poskładanych, przeto też takowe zrównania dzielą na różne gatunki czyli stopnie, różniące się iedne od drugich wykładnikiem ilości lub ilościów niewiadomych: teraz mówić będziemy o Zrównaniach *piérwszego stopnia*. Nazywają się tak zrównania, w których ilości niewiadome, nie są rozmnożone ani same przez siebie ani między sobą.

O Zrównaniach piérwszego stopnia, z iedną niewiadomą.

51. **R**ozwiązać zrównanie, iest to przemienić go w inſze zrównanie, w którémby ilość niewiadoma albo głoſka oznaczająca tę ilość, znajdowała się tylko ſama iedna w iednéy części, a ilości ſkładające drugą część żeby wszystkie były wiadome.

Reguły ſłużące do rozwiązania zrównań o których tu mowa, to iest do przyprowadzenia ich do takiego ſtanu, żeby w iednéy części nieznaydowało się nic więcy, tylko ſama iedna niewiadoma;

ma, ſą trzy, przyſtoſowane do trzech różnych ſpoſobów, którými ilość niewiadoma, może bydź połączona i wmięszana między ilościami wiadomými.

Odtąd ilości niewiadome oznaczać będziemy oſtatniemi głoſkami Abecadła, iakoto x, y, z , dla rozeznania ich od ilościów wiadomych, które wyrażać ſię zawsze będą albo w liczbach, albo w początkowych głoſkach Abecadłowych.

52. Niewiadoma, może znajdować ſię i bydź połączoną z ilościami wiadomými w troiaki ſpoſób. 1^o Przez dodanie albo odjęcie; iakoto w zrównaniu $x + 3 = 5 - x$. 2^o Przez dodanie, odjęcie i rozmnożenie, iak w zrównaniu, $4x - 6 = 2x + 16$. 3^o Nakoniec, przez dodanie, odjęcie, rozmnożenie i rozdzielenie, iak w zrównaniu, $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{3}{4}x + 17$; albo też tylko przez dwa oſtatnie działania, lub przez ſamo iedno oſtatnie.

W tych różnych przypadkach do wyciągnięcia niewiadoméy, używa ſię naſępujących reguł.

53. *Żeby przenieſć którykolwiek wyraz zrównania z iednéy części do drugiéy; trzeba wymazać takowy wyraz w téy części gdzie ſię znajdował, i przeſtawić go do drugiéy części z znakiem przeciwnym*
te-

temu jaki miał w pierwszej części. W czym nienależy przepominać, że przed wyrazem napisanym bez znaku, zawsze dorozumiewa się znak $+$.

Np. w równaniu $4x + 3 = 3x + 12$; chcąc przenieść do drugiej części wyraz $+3$, piszę $4x = 3x + 12 - 3$; gdzie uważać można, że w pierwszej części już niema wyrazu $+3$, ale znajduje się w drugiej części, poprzedzony znakiem $-$ przeciwnym znakowi $+$, z którym był położony w pierwszej części.

Po zebraniu ilościów sobie podobnych w tym równaniu będzie. $4x = 3x + 9$; chcąc zaś wyraz $3x$ przenieść do pierwszej części, piszę $4x - 3x = 9$, co po zebraniu da $x = 9$.

Podobnież w równaniu $5x - 7 = 21 - 4x$, chcąc przenieść do drugiej części wyraz -7 , piszę $5x = 21 - 4x + 7$, co da się zebrać na $5x = 28 - 4x$; a jeżeli dalej zechciałbym przedstawić wyraz $-4x$, napiszę $5x + 4x = 28$, albo po zebraniu, $9x = 28$. Zobaczmy wkrótce, jak ma się dokończyć rozwiązanie tego równania.

Zasada téj reguły łatwo dać się pojąć. Albowiem ilości składające pierwszą część wzięte razem, są równe całkowitości ilościów składających drugą część równania; iawna zaś jest, że takowa równość nieodmienna się, gdy dodawczy lub odjąwszy w iedną którykolwiek części wyraz iakowy, tenże wyraz dodać się, lub odejmuje się i w drugiej części. Lecz zmazać w iedną części wyraz iaki poprzedzony znakiem $+$, ielto zmniejszyć

fzyć tę część w której znajdował się, więc dla zachowania równości, trzeba oraz zmniejszyć i drugą część o tę samą ilość, to jest napisać w niej tenże wyraz poprzedzony znakiem $-$. Odwrotnie, kiedy ma się wyraz poprzedzony znakiem $-$, rzecz oczywista, że tym sposobem pomnaża się ta część w której się znajdował, więc trzeba i drugą część pomnożyć o podobną ilość, to jest napisać w niej tenże wyraz poprzedzony znakiem $+$.

54. A stąd iawna jest, że tym sposobem można przedstawić do iednej części, wszystkie wyrazy z ilościami niewiadomymi, a znowu do drugiej, wszystkie ilości wiadome.

I tak w równaniu $7x - 8 = 14 - 4x$, po przedstawieniu będzie $7x + 4x = 14 + 8$, albo $11x = 22$. Podobnież równanie, $ax + bc - cx = ac - bx$, odmienna się w następujące, $ax - cx + bx = ac - bc$.

55. W takim przedstawianu może się trafić, że po zebraniu, ilość x znajdzie się być poprzedzona znakiem $-$; np. mając $3x - 8 = 4x - 12$; przedstawiliśmy do pierwszej części wszystkie x , będzie $3x - 4x = -12 + 8$, co da się zebrać na $-x = -4$; w takim razie nietrzeba więcej, tylko przemiennie znaki w obu częściach, co

w niniejszym przykładzie wyńdzie na $4x = 4$, albo $x = 4$. Jakóż można było przedstawić wszystkie x , zamiast pierwszej, do drugiej części, skąd wyniknęłoby było $-8 + 12 = 4x - 3x$, co po zebraniu daie $4 = x$, i na iedno wychodzi co $x = 4$.

56. Przedstawivszy do iednój części wszystkie wyrazy, zawieraiące w sobie ilość niewiadomą, wszystkie zaś ilości wiadome przeniósłszy do drugiej części, ieżeli w równaniu niema ułamków, żeby mieć wartość niewiadomę, trzeba sobie postąpić podług reguły następującej: *Napisz niewiadomą samą iedną w iednój części, a drugiej części daj za dzielnika tę ilość, która w pierwszej części była współczynnikiem niewiadomej.*

Np. w równaniu wyżej położonem $7x - 8 = 14 - 4x$, mieliśmy po przedstawieniu i po zebraniu $11x = 22$; żeby zaś mieć wartość samego x , nie trzeba więcej tylko napisać $x = \frac{22}{11}$, co daie się zebrać na $x = 2$; to jest że w pierwszej części trzeba położyć tylko samo x , a współczynnika jego dać drugiej części za dzielnika, iakoto $\frac{22}{11}$. Jakóż, gdy piszę x zamiast $11x$, niekładę tylko iedyną część całej wartości, więc dla zachowania równości, trzeba także w drugiej części tylko położyć $\frac{1}{11}$, to jest różdzielić ją przez 11 .

Podobnie gdyby zadane było równanie $12x - 15 = 4x + 25$; po przedstawieniu (54) wszystkich x na iedną stronę, na drugą stronę ilości wiadomych, będzie $12x - 4x = 25 + 15$, a po zebraniu $8x = 40$; żeby zaś mieć samo x , napiszę $x = \frac{40}{8}$, albo

albo $x = 5$. Albowiem zamiast $8x$, położywszy tylko samo x , bierze się tylko $\frac{1}{8}$ pierwszej części, więc dla zachowania równości, trzeba także wziąć tylko $\frac{1}{8}$ drugiej części, to jest $\frac{40}{8}$.

Gdyby współczynniki ilości x , niebyły wyrażone w liczbach ale w głoskach, reguła przeto zostanie nieodmienna.

I tak w równaniu $ax = bc$, żeby mieć wartość samego x , nie trzeba więcej tylko napisać

$$x = \frac{bc}{a}$$

Jeżeliby po przedstawieniu, niewiadoma znajdowała się w kilku wyrazach, to ielczeż też sama reguła służy.

I tak w równaniu wyżej położonem $ax + bc - cx = ac - bx$, po przedstawieniu będzie $ax - cx + bx = ac - bc$; żeby zaś mieć x , napisze się tylko $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$; to jest w pierwszej części pisze

się samo x , a drugiej części daie się za dzielnika ilość, która w pierwszej części mnożyła x , iakoto $a - c + b$. Albowiem $ax - cx + bx$, nie jest co innego tylko x , rozmnożone przez całkowitość trzech ilościów $a - c + b$.

Podobnież równanie $ax = bc - 2x$, po przedstawieniu daie $ax + 2x = bc$, a po różdzieleniu podług poprzedzającej reguły będzie $x = \frac{bc}{a + 2}$.

Jako też w równaniu $x - ab = bc - ax$, po przedstawieniu będzie $x + ax = bc + ab$, a zatem $x = \frac{bc + ab}{1 + a}$. Bo trzeba sobie tu przypomnieć, że w

pięrczym wyrazie ilości $x + ax$. Spółczynnikiem głoiki x iest 1, tak że w ilości $x + ax$, x znajduje się być rozmnożone przez $1 + a$; iakóż x , w ilości $x + ax$, zawiera się o ieden raz więcej, aniżeli w samey ilości ax .

57, Zeby przemienić zrównanie, w którym znajdują się mianowniki, w infze zrównanie w którymby niebyło mianowników, trzeba rozmnożyć każdy wyrząd niemający mianownika, przez mnogość z wszystkich mianowników, licznika zaś każdego ułamka rozmnożyć tylko przez mnogość z infzych mianowników, to iest oprócz tego mianownika którego licznik mnoży się.

Np. mając zrównanie $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$;

mnożę licznika $2x$ w ułamku $\frac{2x}{3}$ przez 35, to iest mnogość z dwóch mianowników 5, i 7, skład wypada 70x. Wyrząd 4 niemający mianownika mnożę przez 105, to iest przez mnogość z trzech mianowników 3, 5, 7, co uczyni 420. Mnożę licznika $4x$ w ułamku $\frac{4x}{5}$ przez 21, to iest przez mnogość z dwóch mianowników 3 i 7, co mi da 84x. Mnożę dalej wyrząd 12 niemający mianownika, przez mnogość z trzech mianowników, to iest przez 105, i mam 1260. Nakoniec mnożę licznika $5x$ w ułamku $\frac{5x}{7}$ przez 15, to iest przez mnogość z dwóch mianowników 3 i 5, co mi da 75x; tak że zadane zrównanie odmieniło się w następujące, 70x + 420

420 = 84x + 1260 - 75x, z którego żeby wyciągnąć samo x , nie trzeba więcej tylko użyć reguł poprzedzających. Przez pierwszą (53), zrównanie odmienia się na 70x - 84x + 75x = 1260 - 420, a po zebraniu będzie 61x = 840, a zatem przez drugą regułę (56) wypadnie $x = \frac{840}{61}$, odprawiwszy

zaś wskazane rozdzielenie będzie $x = 13 \frac{47}{61}$.

Zasada téy reguły daie się łatwo postrzedz, przypomniawszy sobie co się powiedziało w Arytmetyce o przyprowadzeniu wielu ułamków do spólnego mianownika. Iakóż w poprzedzającym zrównaniu $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, chcąc przywieść do spólnego mianownika trzy ułamki $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$, trzebaby rozmnożyć ich liczników przez też same liczby, przez które rozmnożyliśmy ie dopiero wyżej, a nowym licznikom dać za mianownika spólnego, mnogość wynikającą z rozmnożenia wszystkich mianowników, tak iż wyżej położone zrównanie odmieniłoby się w następujące, $\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$; które w rzeczy samey na iedno wychodzi co tanto, bo ułamki przemienione, D 2 ma-

maią też samę wartość co miały. Zeby zaś i całkowitki obrócić także na ułamki, trzeba rozmnożyć te całkowitki, przez mianownika ułamka położonego między całkowitkami, iak tu przez 105, które są mnogością z wszystkich mianowników znajdujących się w równaniu, skąd będzie $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$.

Lecz iawna iest, że bez znieśienia równości, można tak z piérwzhey iak z drugiey części odrzucić spólnego mianownika; bo ponieważ te dwie ilości rozdzielone przez też samę liczbę są sobie równe, więc muszą być także sobie równe i bez tego rozdzielania; a zatem będzie $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, iak wyżej.

58. Jeżeli ilości z których składa się równanie, są wszystkie ilościami *literalnymi*, reguła przeto zostanie bynajmniej nieodmienną; należy tylko dobrze pamiętać o prawidłach, które podały się do mnożenia ilościów Algebraicznych.

I tak w równaniu $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$; mnożę licznika ax , przez mnogość cd , z dwóch mianowników *r. d.* co mi daie $acdx$. Mnożę wyraż $+b$, przez mnogość z wszystkich mianowników bcd , i mam $+b^2cd$. Mnożę cx przez bc , i mam bc^2x . Na-

Naostatek, mnożę ab przez bd , i mam ab^2d ; tak że poprzedzające równanie odmienna się w następujące, $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$; a poprzestawieniu będzie, $acdx - bc^2x = ab^2d - b^2cd$; na reszcie po rozdzieleniu (56), wypada $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

59. Jeżeli mianowniki są wielościenne, dla poratowania się lepiéy będzie, z początku tylko wskazać działania które mają być potem wykonane; bo mając przed oczami te wskazania, tém łatwiey będzie można wszystko odprawić.

Np. mając $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$, napiszę $ax \times (3a+b) + 4b \times (a-b) \times (3a+b) = cx \times (a-b)$, a dopiero odprawivszy wskazane mnożenia mieć będę, $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx - bcx$; po przestawieniu zaś będzie, $3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b$; skąd naostatek po rozdzieleniu (56), wypada $x = \frac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + b}$.

Przystósowanie poprzedzających fundamentów do rozwiązania niektórych prościęyszych zagadnień.

60. **L**ubo sobie przedsięwzięliśmy, dopiero w drugim Rozdziale traktować w szczególności o użyciach Algebry, z tém wszystkiém zda nam się być nie od rzeczy, wprzód tu czytelnika do nich przystosować.

gotować, w przystółowaniach wyżey założonych fundamentów do rozwiązania kilku łatwiejszych zagadnień. Co nam, téż będzie okazywać podania niektórych uwag, służyć mających na potém.

Dopiero wyżey przepisane reguły, są dostateczne do rozwiązania wszelkiego zagadnienia pierwszego stopnia, kiedy to zagadnienie już jest wyrażone w równaniu. Zeby zaś wyrazić w równaniu jakiekolwiek zagadnienie, można do tego użyć reguły następującej: Ilość albo ilości szukane każdą oznaczysz przez osobną głoskę, i rozstrząsnąwszy z uwagą rzecz zagadnienia, przy pomocy znaków Algebraicznych z ilościami tak wiadomymi jak niewiadomymi odprawisz téż same działania i rozumowania, którebyś odprawił, gdyby znając wartości ilościów niewiadomych, trzeba ci je było tylko sprawdzić.

Ta reguła jest powszechna, i zawsze pokaże drogę do znalezienia równań, jakie mogą być ułożone z danego zagadnienia. Zobaczymy to w kilku przykładach.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Z dwóch moździerzy wyrzucono 100 bomb; z pierwszego rzucono 40 bomb więcej jak z drugiego; zachodzi pytanie, z każdego z tych dwóch moździerzy wiele bomb wyrzucono?

Przy-

Przyłożywszy cokolwiek uwagi, daie się widzieć, iż zagadnienie wychodzi na to: ażeby znaleźć dwie ilości, które złączone razem uczyniłyby 100, i z których jedna drugą przewyższałaby o 40. Jawną zaś jest, że z tych ilościów mając wiadomą jedną, pokaże się i druga. Albowiem jeżeli *np.* większa z nich będzie znaioma, odjąwszy od niej 40, oczywiście wypadnie mniejsza.

Oznaczmy sobie większą ilość przez x . Teraz tę ilość x rozumiejąc wiadomą, gdybym ja chciał sprawdzić, odjąłbym od niej 40, dla znalezienia mniejszej ilości; potém dodałbym większą do mniejszej, i uważałbym jeżeli obie razem składają liczbę 100. wykonamy to.

Większa liczba jest	-	-	x
Więc mniejsza będzie	-	-	$x - 40$

Te dwie ilości dodane czynią	-	$2x - 40$
Lecz podług warunków zagadnienia te dwie ilości powinny uczynić 100	-	

Więc będzie	-	$2x - 40 = 100$
-------------	---	-----------------

Teraz dla znalezienia wartości x nie trzeba więcej, tylko użyć reguł wyżey podanych (53) i (56). Pierwsza z nich da $2x = 100 + 40$, albo $2x = 140$;

a druga $x = \frac{140}{2} = 70$. Znaląwszy wartość wię-

kszej ilości x , odęmy od niej 40, żeby mieć mniejszą ilość, co mi daie 30.

A zatem dwie liczby szukane będą 40 i 30. Zastanowiwszy się nad sposobem, którym przyszliśmy do rozwiązania tego zagadnienia, daie się powiedzieć, że rozumowania do tego użyte, niezawisły od szczególnych wartości liczb 100, i 40, wchodzących w to zagadnienie, i że gdyby zamiast tych liczb były zadane inne, tymże samym sposobem trzeba by sobie z niemi postąpić. I tak gdyby zagadnienie dane było w tém powszechném wyrażeniu. Dwie liczby razem złączone czynią sumę wiadomą oznaczoną przez a , te dwie liczby różnią

znia się między sobą także o liczbę wiadomą oznaczoną przez b , niechaj będzie zadano żeby wynosiła każdą z tych dwóch liczb?

Oznaczmy więc większą liczbę przez x

Mniejszy będzie $x - b$

Te dwie liczby złączone uczynią $2x - b$

Podług warunku, ta summa składać powinna liczbę a , więc musi być $2x - b = a$,

Po przedstawieniu będzie, $2x = a + b$, a po rozdeleniu $x = \frac{a+b}{2}$, albo $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

To jest, że ażeby mieć liczbę większą trzeba wziąć połowę ilości a , i dodać do niej połowę ilości b ; skąd pokazuje się, że mając znaną sumę a dwóch liczb niewiadomych, i onych różnicę b , większa liczba z tych niewiadomych znajdzie się, wziąwszy połowę summy i dodawszy do niej połowę różnicy.

Ponieważ mniejsza z tych dwóch liczb jest $x - b$, więc będzie wyrażona przez $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, albo obróciwszy wszystko w jeden ułamek będzie, $\frac{a+b-2b}{2}$, to jest $\frac{a-b}{2}$, albo $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; a zatem żeby mieć liczbę mniejszą, trzeba odjąć połowę b od połowy a , to jest odjąć połowę różnicy od połowy summy.

Stąd widzieć można, jakim sposobem oznaczając ilości wiadome w wyrażeniach powszechnych przez głoski wchodzące w zagadnienie, jakim sposobem mówię wynajdują się reguły podobne, do rozwiązywania wszelkich zagadnień iednakowego rodzaju.

Częstokroć, na pierwsze wyczerzenie takowe zagadnienia mogą zdawać się różne, ale po letkiem zastanowieniu da się postrzedz, że się w rzeczy samej

samę nieróżnią tylko wyrażeniem. Np. gdyby zadane było następujące zagadnienie.

Rozdzielić liczbę wiadomą oznaczoną przez a , na dwie części, z którychby jedna była większa albo mniejsza od drugiej o ilość wiadomą wyrażoną przez b . Cokolwiek zastanowiwszy się łatwo da się się postrzedz, iż treść tego zagadnienia jest ta sama co poprzedzającego.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Do trzech Fortów ma być rozłożono 720 Puskarczów, tak ażeby do największej przypadło ich 80 więcej jak do najmniejszej, a do średniej 40 więcej jak do najmniejszej, jest pytanie wiele ich się dostanie do każdej z osobna?

Gdyby mi powiedziano jaka jest liczba najmniejsza, na sprawdzenie dodałbym do niej 40, co by mi dać powinno liczbę średnią; dodałbym także do tejże liczby najmniejszej ilość 80, skądby mi wypadła liczba największa; natenczas te trzy liczby z sobą dodane uczynić powinny 720.

Oznaczmy więc najmniejszą liczbę przez x , a postępując sobie w sposób poprzedzający niech będzie.

Liczba najmniejsza x

Więc średnia powinna być $x + 40$

A największa $x + 80$

Te trzy ilości razem złączone uczynią $3x + 120$.

Lecz treść zagadnienia wyciąga, żeby się równały liczbie 720. Więc musi być $3x + 120 = 720$.

Postąpiwszy sobie podług reguły wyżej położonych będzie, $3x = 720 - 120$, albo $3x = 600$, a zatem $x = 200$; więc średnia liczba będzie 240, a największa 280; które z sobą razem dodane w rzeczy samej czynią 720.

Jawna jest, że w tym przykładzie, gdyby zamiast 720, 80, 40, były zadane inne liczby, że mówię zagadnienie zawsze dałoby się ułatwić tymże samym sposobem. A zatem w rozwiązaniu wszel-

wszelkich zagadnień, w których rzeczby szła o podzielenie liczby wiadomej na trzy części, takie że by zbytek największy nad najmniejszą, był liczbą wiadomą oznaczoną przez b , a zbytek średni nad najmniejszą był oznaczony przez c , rozumując jak wyżej, można sobie rzecz tak ułożyć.

Niechay będzie najmniejsza liczba x

Srednia będzie $-$ $-$ $x + c$
 A największa $-$ $-$ $x + b$

Te trzy liczby dodane uczynią $3x + b + c$

Które równać się powinny ilości a

Więc musi być $3x + b + c = a$

A przestawiwszy będzie $3x = a - b - c$; co po rozdzieleniu przemienni się na $x = \frac{a - b - c}{3}$.

To jest, że ażeby mieć liczbę najmniejszą, trzeba od tej liczby co ma być podzielona odjąć dwa zbytki, i reszty wziąć trzecią część: którą mając łatwo będzie wynaleść drugie dwie liczby. Tak gdyby było zadano rozdzielić 642 na trzy części, z którychby średnia przewyższała najmniejszą o 75, a największa przewyższała też najmniejszą o 87; dodając razem dwa zbytki 75 i 87, co uczyni 162: odjąwszy 162 od 642 zostało 480, których trzecia część 160 będzie najmniejszą częścią. A zatem dwie inne będą następujące to jest 160 + 75 albo 235, i 160 + 87 albo 247.

Te dwa zagadnienia mogą być wprowadzić rozwiązane bez Algebry, ale łatwość ich służy do tem jasniejszego okazania wyżej przepisane sposobu, w jaki układają się równania z danych zagadnień.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Podzielić 14250 funtowych ładunków na trzy komendy, których wielkości miałyby się między sobą jak liczby 3, 5, 11; to jest z których pierwsza byłaby do drugiej :: 3 : 5, i znowu pierwsza do trzeciej :: 3 : 11.

Gdy-

Gdybym wiedział wiele przypadłoby ładunków na jedną którąkolwiek komendę np. na pierwszą, mógłbym sprawdzić tę liczbę następującym sposobem.

Szukałbym przez regułę trzech liczby która by miała się do pierwszej :: 3 : 5, i miałbym drugą. Szukałbym podobnież inszej liczby która by znowu miała się do pierwszej :: 3 : 11, i miałbym trzecią; te trzy liczby razem dodane powinny uczynić 14250. Wykonamy to.

Niech będzie liczba ładunków odpowiadająca pierwszej komendzie x ; żeby wynaleść drugą szukam czwartego wyrazu proporcji następującej, 3 : 5

:: x :: takowym czwartym wyrazem będzie $\frac{5x}{3}$

Zebym znowu doszedł trzeciej liczby, szukam czwartego wyrazu tej proporcji, 3 : 11 :: x ::

którym będzie $\frac{11x}{3}$. Te trzy liczby z sobą dodane

uczynią $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$, albo $x + \frac{16x}{3}$. Lecz treść

zagadnienia pokazuje że ta ilość powinna równać się

liczbie 14250; więc musi być $x + \frac{16x}{3} = 14250$

Zebym doszedł wartości x , naprzód ruguję mianownika 3 (57), i mam $3x + 16x = 42750$, albo $19x = 42750$; potem podług (56) rozdzieliwszy

przez 19, będzie $x = \frac{42750}{19} = 2250$. A zatem liczba

ładunków wyrażona przez $\frac{5x}{3}$, odpowiadająca

drugiej komendzie uczyni, $\frac{5 \times 2250}{3}$, albo 3750;

a trzecia która była $\frac{11x}{3}$ uczyni, $\frac{11 \times 2250}{3}$, albo

$\frac{24750}{3}$, albo 8250; te trzy ilości razem złączone

skła-

składają w rzeczy samej liczbę 14250; też trzy ilości jakoto 2250, 3750, i 8250, są między sobą ielzcie w stosunku liczb 3 : 5 : 11; co można łatwo okazać rozdzieliwszy trzy pierwsze liczby przez 750, czem stosunek między nimi nieodmiennie się.

Gdyby liczba zadana do rozdzielenia zamiast 14250, była iakakolwiek insza w powszechności wyrażona przez a , i gdyby liczby proporcjonalne zamiast 3, 5, 11, były trzy ilości wiadome w powszechności oznaczone przez m, n, p , rzecz oczywista że i w tym razie nie trzeba by więcej, tylko powtórzyć poprzedzające działania.

I tak oznaczywszy pierwszą część przez x . Dla znalezienia drugiej, trzeba by szukać czwartego wyrażu proporcji następującej $m : n :: x :$

Któryto czwarty wyraz wypadnie $\frac{nx}{m}$.

Dla wynalezienia znowu trzeciej części, szukać się będzie czwartego wyrażu tej proporcji, $m : p ::$

$x : -$ skąd wypadnie $\frac{px}{m}$. Te trzy części dodane

uczynią $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, albo $x + \frac{nx + px}{m}$; lecz

oraz te trzy części równać się powinny ilości a ; więc musi być $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

Wyrugówawszy mianownika będzie $mx + nx + px = ma$, co po rozdzieleniu da $x = \frac{ma}{m + n + p}$.

A stąd można sądzić o użyteczności Algebry, do wynaydowania reguł Arytmetycznych.

Gdybyśmy chcieli wyrachować czwarty wyraz proporcji poczynając się od tych trzech $m + n + p : m :: a ::$; rzecz oczywista z fundamentów Arytmetyki, że takowy czwarty wyraz wypadłby $\frac{am}{m + n + p}$.

$\frac{am}{m + n + p}$, a ponieważ znajdziemy, że x jest oznaczone przez tę samą ilość. wnieśmy stąd, że ażeby mieć x , trzeba wyrachować czwarty wyraz proporcji, w którejby pierwszym wyrazem była summa części proporcjonalnych, drugim liczba pierwsza z trzech liczb proporcjonalnych, a trzecim sama liczba która ma być rozdzielona. I ta też właśnie jest reguła, iaka się podaje w Arytmetyce do rozwiązywania zagadnień tego gatunku.

ZAGADNIENIE CZWARTE.

Wysłano z Warszawy do Kamiénca wyprawę z Artyleryą ta czyni 4 mile na dzień. W dzień potem wysłano drugą wyprawę z kulmi armatnemi i bombami z Końskich do tegoż Kamiénca, ale ta czyni 6 mil na dzień, jest pytanie kiedy ta druga wyprawa dogoni pierwszą, wiedząc nadto, że z Końskich do Warszawy jest mil 18?

Gdyby mi było wiadomo wiele mil powinna uczynić druga wyprawa żeby dognała pierwszą, sprawdziłbym to, w następujący sposób: szukałbym wiele drogi odbyła pierwsza wyprawa przez ten czas gdy druga była w drodze; a że podróż ich musi być proporcjonalna liczbie mil odbywających się na dzień, więc znaję wiele mil pierwsza wyprawa odbyć musiała, szukając czwartego wyrażu następującej proporcji, 6 ma się do 4, iak liczba mil odbytych przez drugą wyprawę do liczby mil które przez tenże czas uiachała pierwsza wyprawa. Znalazłszy ten czwarty wyraz dodam do niego liczbę mil które odbyła pierwsza wyprawa w iednym dniu, którym uprzedziła drugą wyprawę, iako téż 18 mil to jest odległość z Warszawy do Końskich także na przód daną pierwszą wy-

* W tym przykładzie przemieniliśmy Miasta zagraniczne na krajowe.

wyprawie, a tak to wszystko oczywiście powinno składać liczbę mil odbytych przez drugą wyprawę; wykonamy to.

Oznaczmy przez x liczbę mil odprawić się mających przez drugą wyprawę na dogonięcie pierwszej.

Przez ten czas wyprawa z Warszawy uczyni mil $\frac{4}{6}x$, albo $\frac{2}{3}x$.

A przez dzień o który ruszyła przodem uczyni mil 4. Odległość z Końskich do Warszawy mil - 18

Te trzy ilości uczynią - $\frac{2}{3}x + 22$.

Więc $\frac{2}{3}x + 22$ będzie wartością drogi odbyć się mającej przez drugą wyprawę na dogonięcie pierwszej. Ponieważ zaś w tym rozumowaniu założyliśmy sobie, że ta druga wyprawa uczyniła mil x , więc będzie $\frac{2}{3}x + 22 = x$; skąd przez reguły poprzedzające wypada $x = 66$; to jest że te dwie wyprawy znidą się z sobą gdy druga wyprawa odbędzie mil 66, albo o 66 mil od Końskich.

Jakóż przez ten czas gdy druga wyprawa uczyni mil 66, pierwsza odbędzie 44, odprawiając po 4 mile na dzień, gdy druga odprawia po 6 mil; lecz pierwsza wyprawa ma do tego na przód 4 mile dla położenia miejsca z którego rusza uprzedza drugą wyprawę, więc pierwsza wyprawa znajdować się będzie o 66 mil od Końskich, to jest na tymże miejscu gdzie się w ten czas znajduje druga. Przyłożywszy cokolwiek uwagi łatwo pojąć można, że chociażby liczby zadane były odmiennie, przecież sposób rozumowania i działania zostanie

stanie nieodmienny. I tak oznaczmy sobie w powszechności odległość między miejscami z których wyprawy ruszają jak tu 18 mil przez a , liczbę mil codziennych pierwszej przez c , liczbę zaś mil codziennych drugiej wyprawy przez d .

Jeżeli nazwiemy x , liczbę mil drugiej wyprawy, potrzebnych na dognanie pierwszej, to x będzie złożone z odległości między dwoma miejscami z których ruszają wyprawy, z przeciągu drogi którą pierwsza wyprawa odprawić może przez dni b danych sobie na przód, i naostatek z przeciągu drogi, którą odbędzie też pierwsza wyprawa przez ten cały czas, gdy druga znajdować się będzie w podróży.

Zeby wynaleźć tę ostatnią wartość, uważam że dwie wyprawy bawiące się w podróży przez równy przeciąg czasu, powinny odbywać drogę w proporcji prędkości swojej jazdy; a zatem x będąc drogą drugiej wyprawy, mieć będzie przeciąg drogi odprawionej przez pierwszą wyprawę w tymże czasie, wyrachowawszy czwarty wyraz proporcji poczynając się od tych trzech, $d : c :: x : -$

który wypadnie $\frac{c \times x}{d}$, albo prosto $\frac{cx}{d}$. Ponieważ

wiemy że pierwsza wyprawa czyni na dzień mil c więc przez liczbę dni b powinna ich uczynić b razy tyle, to jest 8 razy albo razy 30, jeżeli b wartość 8, albo 30; słowem powinna odprawić tyle mil ile znajduje się iednościów w mnogości $c \times b$, albo w bc ; odprawiła ich tedy liczbę wyrażoną przez bc .

Zbierzmy teraz w iedno liczbę mil $\frac{cx}{d}$, z liczbą mil bc i z liczbą mil a , to wszystko razem wzięwszy uczyni $\frac{cx}{d} + bc + a$, i wyraża wiele mil drugiej wyprawa uczynić była powinna, lecz tę liczbę ozna-

oznaczyliśmy przez x , więc musi być $x = \frac{cx}{d} +$

$bc + a$. Skąd wypada $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, to jest for-

mula przez którą mogą być rozwiązane wszelkie zagadnienia tego gatunku, rozumiejąc że dwie wyprawy są wysłane w jedną stronę, i że ruszenie wyprawy powolniejszy odprawiający podróż swoją, poprzedziło drugą wyprawę.

Zebyśmy zobaczyli w przykładzie użycie tej formuły, wróćmy się do poprzedzającego zagadnienia, i przypomnijmy sobie że a oznacza 18, to jest że $a = 18$ mil, $b = 1$ dzień, $c = 4$ mil, $d = 6$ mil.

W tym razie będzie $x = \frac{1 \times 4 \times 6 + 18 \times 6}{6 - 4}$, albo $x = \frac{24 + 108}{2} = 66$, iak wyżej.

Takie tedy jest użycie formuł powszechnych, w których zamiast głosek czyli liter położywszy liczby pominionemi głoskami oznaczone, i odprawiając działania, iakie wskazują porządek i znaki przy tych głoskach napisane, można rozwiązywać wszelkie zagadnienia iednakowego rodzaju.

Np. gdyby było dane to drugie zagadnienie: Wskazówka godzinna, odpowiada 17 minutom na zegarku, wskazówka zaś minutna odpowiada 24 minutom, to jest że zegarek pokazuje godzinę trzecią i minut 24, dajmy że jest pytanie, w iakiej liczbie godzin i minut, te dwie wskazówki staną iedną na drugiey?

Ponieważ wskazówka godzinna i minutna, razem poczynają ruch swój, więc ilość b , przez którą wyżej oznaczyliśmy uprzedzenie pierwszey wyprawy, będzie tu zerem. Odległość między dwoma mięscami z których ruszają, jest w tym przykładzie droga którą ma odprawić wskazówka minutna żeby przyszła z dwudziestego czwartego prze-

przedziału do siedmnastego, to jest że $a = 53$ przedziałom. Przez ten czas gdy wskazówka minutna przebiega 60 przedziałów, wskazówka godzinna przebiega ich tylko 5, więc będzie $c = 5$, a $d = 60$. Ze zaś b jest tu zerem, przeto z formuły $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, trzeba wyrzucić wyraz bcd , albo $b \times cd$;

bo zero rozmnożone bądź przez iaką chce ilość, zawsze daie zero. W tym tedy razie będzie $x = \frac{ad}{d - c}$, gdzie zamiast a, d, c . położywszy onych wartości będzie $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55} = 57 \frac{45}{55} = 57 \frac{9}{11}$;

to jest że potrzeba ażeby wskazówka minutna przebiegła ieszcze 57 przedziałów i $\frac{9}{11}$.

A tak ponieważ odpowiadała dwudziestemu czwartemu przedziałowi, odpowiadać będzie 81 przedziałom i $\frac{9}{11}$;

albo z przyczyny że 60 przedziałów czynią ieden obieg wkoło czyli iedną godzinę, dwie wskazówki przypadną iedna na drugiey na przedziale 21 $\frac{9}{11}$ godziny następującej, to jest o godzinie 4tej, minucie 21 $\frac{9}{11}$.

Większa użyteczność rozwiązań Algebraicznych nad liczebne, nietylko stąd pokazuje się, że w każdym szczególnem zagadnieniu nie trzeba więcej tylko zamiast liter położyć liczby, ale też że częstokroć przygotowałszy te rozwiązania w pewny sposób, można im dać prościęysze wyrażenie i łatwiey zachować je w pamięci. Weźmy przykład z formuły dopiero wynalezioney $x =$

Tom II.

E

ad

$\frac{ad + bcd}{d - c}$, ilość d będąc spólnym czynnikiem w obu wyrazach licznika, wartość głoski x da się wyrazić w téj postaci $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$; z której

można łatwo rozeznąć, że wartość głoski x , jest czwartym wyrazem proporcji poczynającej się od tych trzech, $d - c : d :: a + bc : -$ - - lecz z tych trzech wyrazów pierwszy $d - c$ znaczy różnicę między prędkościami jazdy dwóch wypraw, drugi d znaczy prędkość jazdy drugiej wyprawy, a trzeci $a + bc$, składa się z odległości a między dwoma miejscami z których ruszają te wyprawy, i z ilości bc albo $b \times c$, wyrażającej wiele uczyni mil pierwsza wyprawa przez liczbę dni, któremi wyprzedziła drugą wyprawę. Więc rozwiązanie zagadnienia może być zamknięte w téj regule: Rozmnoż liczbę mil którą pierwsza wyprawa czyni na dzień przez liczbę dni któremi uprzedziła drugą wyprawę, tę mnogość dodaj do odległości między dwoma miejscami z których wyprawy ruszają, i ułóż regułę trzech następującą: Różnica między prędkościami jazdy dwóch wypraw, ma się do prędkości drugiej wyprawy, jak summa dwóch ilościów dodanych z sobą podług przepisu dopiero poprzedzającego, ma się do czwartego wyrazu; który pokazuje liczbę mil jaką odbyć musi druga wyprawa żeby dogoniła pierwszą. Stosując to do przykładu wyżej położonego, uważam że pierwsza wyprawa uprzedziła drugą jednym dniem, a że czyni 4 mile na dzień, więc mam dodać 4 mile do 18, to jest do odległości między miejscami z których ruszają wyprawy, a potem szukam czwartego wyrazu proporcji poczynającej się od tych trzech, $6 - 4 : 6 : 22 : -$ albo $1 : 3 : 22 : -$ - - takowy czwarty wyraz wypadnie 66, jak było wyżej.

Uwa-

Uwagi względem ilościów twierdzących i przeczących.

61. **P**o rozwiązaniu w powszechności wszelkich zagadnień iednakowego gatunku, częstokroć można jeszcze użyć tychże samych powszechnych formuł, do rozwiązania innych zagadnień, w których warunki znajdowałyby się wcale przeciwne tym co z nich formuła wyniknęła: czasem samo odmiennienie znaków $+$ w $-$, albo $-$ w $+$, bywa do tego dostarczające. Lecz nim przyśiąpiemy do użycia takowey odmiany znaków, wprzód należy nam w iniszy sposób uważać pominione ilości.

Litery oznaczają tylko ilości powszechne. Znaki $+$ i $-$ uważyliśmy dotąd iako nieznaczące nic więcej tylko działania dodawania i odęymowania, lecz w wielu przypadkach mogą także wskazywać sposób w jaki iedne ilości mają się naprzeciw drugich.

Taż sama ilość da się uważać dwóma przeciwnemi sobie sposobami, to jest uważając ię własność, moęą której może pomnożyć drugą ilość albo umniejszyć. Kiedy ta ilość, będzie tylko wyrażona przez głoskę jaką albo przez liczbę, w tym razie niemasz nic coby mi wika-

E 2

z6-

zowało, w jakim rozumieniu one uważam. Np. gdy pewny człowiek ma tyle majątku co i długu, ta sama liczba zarówno służyć może do wyrażenia tak pierwszej ilości jako i drugiej, lecz ta liczba bądź iaka chce niepokazuje zachodzący różności między pierwszą ilością a drugą. Najprostszy sposób do wskazania tej różności, jest naznaczyć takowe ilości znakiem, któryby dał do wyrozumienia, jaki skutek czyni jedna ilość naprzeciw drugiej; a że skutkiem długu jest odęymować od majątku, więc naturalnie wypada, ażeby dług znaczył się znakiem —.

Podobnie zmyśliwszy sobie (fig. 1.) linią zrobioną przez ruch punktu A, prostokątnie postępującego względem linii BC, daie się poymować że ten punkt mogąc iść albo od A ku D, albo od A ku E, jeżeli przez a wyrazimy drogę AD albo AE którą odprawi, jeszcze przez to nieznaczymy położenia tego punktu. Żeby oznaczyć to położenie trzeba wskazać jakimym znakiem, czyli ilość a ma być uważana po prawej stronie czy też po lewej; znaki $+$ albo $-$ są do tego sposobne. Albowiem biorąc ruch punktu A względem jakiego wiadomego punktu L, i poczytanego za punkt stały, gdy punkt A

A postępuje ku D, jego ślad będzie pomnażał długość LA; jeżeli zaś postępować będzie ku E, ślad jego odwrotnym sposobem będzie ukrócał długości LA; naturalnie tedy można oznaczyć AD przez $+$ a , albo prosto przez a , a odwrotnie AE, przez $-a$.

Gdybyśmy uważali ruch punktu A nie względem punktu L, ale względem punktu O, trzeba by to wszystko co się powiedziało wziąć w rozumieniu przeciwnym.

Ilości tedy przeczące mają tak rzeczywistą istność jak ilości twierdzące, i nie różnią się między sobą tylko tem, że w rachunkach biorą się w rozumieniu przeciwnym.

Ilości twierdzące i ilości przeczące, mogą być i częstokroć znaydują się w rachunkach pomieszane iedne z drugimi, nie tylko dla tego, że pewne działania iakośmy widzieli wyżej wyciągaia odjęcia iednych ilości od drugich, ale też że często trafia się potrzeba wyrażenia różnych postaci, pod którymi uważamy ilości.

Wreszcie, ilości przeczące niechay będą w jakiegokolwiek postaci uważane, to reguły podane wyżej do różnych

działań z ilościami, niemniéy zostaną zawsze nieodmiénne. Jaśniéy to pokaże się ielzcze w uwagach następujących.

62. Jeżeli się trafi, że po rozwiązaniu zagadnienia sposobami wyżej przepisanim, wartością niewiadoméy będzie ilość przecząca, np. gdy się znalazł taki wypatek, $x = -3$, należałoby stąd wnieść, że wartość oznaczona przez x , niema tych własnościów któreśmy w niéy rozumieli pod czas rachunku, ale wcale przeciwné. Np. gdyby trzeba było rozwiązać następujące zagadnienie: *Znależć taką liczbę która dodana do 15 uczyniłaby 10.* To zagadnienie jest oczywiście niepodobne. Jeżeli liczbę szukaną oznaczmy przez x , mieć będziemy to równanie, $x + 15 = 10$; a zatém na fundamencie wzwyż założonych reguł będzie $x = 10 - 15$, albo $x = -5$. To ostatnie wyrażenie pokazuje, że x które uważałem iako dodane do 15, dla złożenia liczby 10, i owszém powinno być odjęte. Każde tedy rozwiązanie wypadające w ilościach przeczących, znakiem jest iakiego fałszywego przypuszczenia, wchodzącego w wyrażenie zagadnienia, lecz oraz wskazuje iak ma być poprawione, dając do poznania, że ilość szukana

kana powinna być wzięta w rozumieniu wcale przeciwném.

63. Wnieśmy stąd, że po rozwiązaniu zagadnienia, w którem niéktóre ilości były wzięte w pewném rozumieniu, żeby rozwiązać tóż zagadnienie ale w rozumieniu przeciwném, dosyć będzie odmiénic wszystkie znaki znajdujące się przed ilościami. Np. w zagadnieniu czwartém rozwiązaném w powizecznych wyrazach, gdybym chciał mieć rozwiązanie innych zagadnień, w rozumieniu że wyprawy nieidą w iedną stronę, ale iedne naprzeciw drugim; w wartości wyżej znalezionéy $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, odmié-

nić tylko znaki należące do głośki c . Jakóż ponieważ pierwsza wyprawa idzie naprzeciw drugiéy, przeto zamiast oddalania się, przybliża się do drugiéy, i ukracza iéy drogi w proporcji ilości c , to jest w proporcji liczby mil które na dzień czyni; więc trzeba to wyrazić, że c zamiast dodawania odéymuie, to jest trzeba odmiénic znaki należące do ilości c . Uczyniwszy tę odmianę będzie $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$.

Albowiem w wyrazie $+ bcd$, który niejest

co innego tylko $bdXc$, odmieniając znak należący do c , trzebaby napisać $bdX-c$, co podług (24) wychodzi na $-bcd$. Bo stąd co już wyżej w téj mierze powiedziało się wnosi się, że dla znaku — położonego przed c , ilość c powinna być wzięta w przeciwném rozumieniu iak gdyby miała znak $+$; lecz c wzięte z znakiem $+$ wyrażałoby wiele razy trzebaby dodać ilość bd , więc toż c poprzedzone znakiem —, iak w niniejszym razie ma znaczyć, wiele razy pomienioną ilość potrzeba odjąć, tak iż na mnogość wypadnie $-bcd$. W powszechności, kiedy ilości przeczące mają z natury swoiey rozumienie przeciwne temu, iakieby miały gdyby były twierdzącami, i kiedy takowa różność jest wskazana znakami działani sobie przeciwnych, w takowym razie trzeba zawsze rozumieć, że co względem jednych było dodaniem, względem drugich powinno być odjęciem, i odwrotnie; tak że jeżeli b odjęte od a daie $a-b$, $-b$ odjęte od tegoż a , musi dać $a+b$. Stąd pokazuje się, że biorąc wszystko podług tego pojęcia iakie mieć należy o ilościach przeczących, pomienione dwa działania przemieniaią się iedno w drugie, tak że ilości twierdzące staia się prze-

przeczącami, i odwrotnie. Jakóż właściwie mówiąc, tylko nazwisko w nich zachowuje się, i tylko przez nieiakię podobieństwo mówi się że $-b$ odęymuie się od a .

Potwierdźmy to przykładem co dopiero powiedziało się o użyciu znaków, w rozwiązaniu zagadnień w którychby zadane warunki znajdowały się przeciwne. Daymy że dway Kuryerowie wyprawieni z dwóch miéysc odległych iedno od drugiego na 100 mil, pędzą w rozumieniu przeciwném. Pierwszy ruszył 7 godzinami przed drugim, i czyni dwie mile na godzinę, drugi zaś w godzinie odprawia 3 mile. Nazwiemy x drogę, którą odprawić musi drugi Kuryer, żeby się spotkali z pierwszym; uważam że x powinno być równe różnicy między całą odległością dwóch miéysc, i drogą którą odprawi pierwszy Kuryer; lecz droga tego ostatniego składa się z liczby mil ubieżonych przez 7 godzin, tudzież z ilości mil które on odprawi przez ten czas gdy drugi znajdować się będzie w podróży; ta zaś druga ilość pokaże się z czwartego wyrazu téj proporcji, 3 :

$$2 :: x : \text{skąd wypada } \frac{2x}{3}; \text{ a ponieważ liczba mil ubie-}$$

żonych przez pierwszego Kuryera w 7 godzinach czyni mil 14, rachuiąc co godzina 2 mile, więc pierwszy Kuryer odprawi ze wszystkiém mil $14 + \frac{2x}{3}$, a zatem drugiemu Kuryerowi zostanie się do odbycia mil $100 - 14 - \frac{2x}{3}$, albo $86 - \frac{2x}{3}$, więc będzie $x = 86 - \frac{2x}{3}$. Zrównanie z którego wyciąga się

się $x = \frac{258}{5} = 51 \frac{3}{5}$. A tak i z formuły $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$, którą tu przyśtośować umyśliliśmy, jeżeli zamiast a położymy 100; zamiast b , 7; zamiast d , 3; zamiast c , 2; znajdziemy podobnież iak wyżej $51 \frac{3}{5}$.

W dalszym przeciągu starać się będziemy, podawać coraż jaśniejsze wyrozumienie, w jakim ilości przeczące brać się powinny.

64. Ponieważ bardzo wiele na tém zależy, żeby nabydź łatwości do ułożenia sobie potrzebnych zrównań, przeto dla wprawy poczynających przydają się tu niektóre zagadnienia proste i onych rozwiązania, z którychby każdy mógł się zapewnić o dobrze albo źle odprawionem działaniu swoiem; Po rozwiązaniu tych zagadnień w liczbach zadanych, użyteczna rzecz będzie, też same działania powtórzyć znówu przez głoski: tym sposobem wprawić się będzie można w rozwiązywanie wszelkich zagadnień i uważanie rzeczy w sposób powszechny.

Znaléżdź liczbę, która dodana kolejno do 5 i do 12, dałaby dwie summy mające się iedną do drugiey, iak 3 do 4? Rozwiąz: 16.

Znaléżdź taką liczbę, której połowa, tróyka, i $\frac{2}{3}$ razem złączone, przenosiłyby też liczbę o 7? Rozwiąz: 30.

Uży-

Używając do roboty trzech Kopaczów takich, że pierwszy może wykopać na dzień 5 sążni, drugi 7, a trzeci 8; jest pytanie ci trzej robotnicy razem kopiąc, w jakim czasie wygotnią 100 sążni? Rozwiąz. W 5 dniach.

Najeto robotnika leniwego za 24 gr. na dzień przez któryby robił, ale pod tym warunkiem, że za każdy dzień którego robić niebędzie wytraci mu się z zapłaty jego po gr. 6; w 30 dni czyni się z nim porachunek, z którego pokazuje się że mu się nic nie należy; jest pytanie przez wiele dni robił? Rozwiąz. Przez 6 dni.

Pewny drwal kupiwszy drzewo, potem go sprzedał o 1500 złott. drożey aniżeli go kosztowało. Wtę sprzedaż zarabia 10 na stu, to jest na całej summie za którą sprzedał; jest pytanie wiele kosztowało go to drzewo? Rozwiąz: 13500 złt.

Pewną sumnę wypłacono w 15 razach, za każdym razem pomnażając wypłatę iednakową ilością, za pierwszym wypłaceniem oddano 7 złt. a za ostatniem 37; jest pytanie o wiele pomnażała się każda wypłata? Rozwiąz. O $2 \frac{2}{3}$ złt.

Mając 9 stów zaprawy do ktotofilnych ogniów, złożony z 8 stów salitry i 1 sta siarki; jest pytanie wiele do tęg mieszanki przydałoby trzeba salitry, żeby na każdych 9 stach nieznaydowało się więcey siarki tylko po 8 łot? Rozwiąz: 27 stów.

O Zrównaniach pierwszego stopnia z wielą niewiadomemi.

65. Czyto iedna czy więcey będzie niewiadomych, sposób układania sobie zrównań przeto nieodmiénia się. W powszechności mówiąc, trzeba układać sobie tyle zrównań, ile ich dać mogą warunki wchodzące w zagadnienie. Je-

Jeżeli te warunki są osobne i niezawisłe iedne od drugich, i jeżeli oraz każdy warunek może być wyrażony przez osobne zrównanie, natenczas niemożna mieć tylko iedno rozwiązanie zagadnienia; wczém rozumie się że te wszystkie zrównania są pierwszego stopnia, i że ich tyle jest ile znayduie się niewiadomych. Lecz jeżeli który z danych warunków, bądźto otwarcie bądź tajemnie mieści się w innym warunku, albo jeżeli liczba warunków jest mnieysza od liczby ilościów niewiadomych, w tym razie wypadać będzie mniey zrównań, aniżeli znayduie się ilościów niewiadomych, i zagadnienie może być rozwiązane nieokręśloną liczbą sposobów; chyba że iaki warunek przypadkowy który w zrównaniu wyrazić się nieda, określi liczbę takowych rozwiązań. Obiaśnimy to przykładami.

Daymy naprzód że mamy dwa zrównania i dwie niewiadome. Reguły podane do zrównań z iedną niewiadomą, służą także zrównaniom z wielą niewiadomemi; lecz względem zrównań z dwiema niewiadomemi, trzeba nadto przydać regułę następującą.

66. *Weźmij w każdym zrównaniu, wartość iednakowey niewiadomey, postępując*

MATEMATYKI. 75

iąc sobie tak, iak gdyby w niem wszystkie inne ilości były wiadome. Z tych dwóch wartościów zrób nowe zrównanie, które już tylko drugą niewiadomą w sobie zawierać będzie, a zatem dojdiesz tej wartości podług reguł poprzedzających. To mając, połóżysz takową wartość w pierwszym albo w drugim zrównaniu, gdzie znaydowała się wyrażona przez niewiadomą; i tym sposobem mieć będziesz wartość pierwszey niewiadomey.

Np. gdybym miał dwa zrównania, $2x + y = 24$ i $5x + 3y = 65$. Pierwsze daie mi $x = \frac{24 - y}{2}$, a drugie, $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

Z tych dwóch wartościów ilości x czynię nowe zrównanie, pisząc $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$, w którym nieznanayduie się już tylko druga niewiadoma y , i z którego podług reguł wzwyż przepisanych wyciąga się, $y = 10$.

Zeby mieć x , kładę zamiast y wartość onego 10, w któreykolwiek z dwóch ilościów równających się głosce x ; co mi da $x = \frac{24 - 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

67. Weźmy znowu na drugi przykład dwa następujące zrównania, $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$ i $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$.

Zaczynam naprzód od przemiany tych zrównań na te (57), $24x - 25y = 60$ i $8x + 9y = 228$.

Z pierwszego wyciągnąwszy x , mam $x = \frac{60 + 25y}{24}$ Z

Z drugiego wypada $x = \frac{228 - 9y}{8}$

Zrobiwszy zrównanie z tych dwóch wartościów głoſki x , mam $\frac{60 + 25y}{24} = \frac{228 - 9y}{8}$, w którymż nieznayduie ſię tylko jedna niewiadoma, to ieſt y , i wypada $y = 12$.

Zebym miał x , kładę zamiast y wynalezioną wartość jego 12, w którymkolwiek z dwóch iłoſcióſw równających ſię głoſce x , np. w tém piérwſzém zrównaniu $x = \frac{60 + 25y}{24}$, co mi da $x =$

$$\frac{60 + 25 \times 12}{24} = \frac{360}{24} = 15.$$

68. Weźmy ieſzcze na trzeci przykład te dwa zrównania, $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$ i $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Znióſſzy mianowniki będzie (57), $56x = 35x + 60y - 1260$, i $56x - 20y = 35y - 420$.

Z piérwſzego zrównania wyciągnąwszy x , będzie $x = \frac{60y - 1260}{21}$, z drugiego zaś wypada $x = \frac{55y - 420}{21}$.

56
Zrobione nowe zrównanie z tych dwóch wartościów głoſki x , będzie $\frac{60y - 1260}{21} = \frac{55y - 420}{21}$, z którego wyciąga ſię $y = 28$.

Zebym miał x , kładę zamiast y wartość jego 28 w zrównaniu wyżej wynalezioném, co mi daie $x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20$.

69.

69. Weźmy ſobie nakoniec na oſtatni przykład dwa zrównania literalne, $ax + by = c$ i $dx + fy = e$, w których głoſki a, b, c, d, e, f , wyrażają iłoſci wiadome, bądźto twierdzące bądź też przeczące. Piérwſze zrównanie da mi, $x = \frac{c - by}{a}$, a dru-

gie, $x = \frac{e - fy}{d}$. Z tych dwóch wartościów robię

nowe zrównanie i mam, $\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d}$, które po znieſieniu ułamków i po przeſtawieniu, przemienia ſię na $afy - bdy = ae - cd$, i daie mi $y = \frac{ac - cd}{af - bd}$.

Zebym miał x , kładę zamiast y wartość jego $\frac{ac - cd}{af - bd}$ w którymkolwiek z dwóch zrównań wyżej połoſzonych, np. w zrównaniu $x = \frac{c - by}{a}$;

ſkład wnoſzę byđ $x = \frac{c - b \times \frac{ac - cd}{af - bd}}{a}$,
albo (przemieniwszy także a, c w ułamek), $x = \frac{afc - bcd - abc + bcd}{af - bd}$.

albo $x = \frac{afc - abc}{aaf - abd}$ albo naoſtatek (33), $x = \frac{fc - bc}{af - bd}$.

70. Dotąd rozumiało ſię, że obie niewiadome, znaydują ſię w obu zrównaniach. Lecz gdyby tak niebyło, rachunek przeto różnić ſię niebędzie od poprzedzających. chyba w tém że ſię odprawia z więkſzą łatwoſcią.

Np.

Np. mając dwa równania, $5ax = 3b$ i $cx + dy = c$. Z pierwszego równania wyciągam $x = \frac{3b}{5a}$, a z drugiego $x = \frac{c - dy}{c}$. Złożywszy nowe

równanie z tych dwóch wartościów, mam $\frac{3b}{5a} = \frac{c - dy}{c}$, z którego po wyrugowaniu mianowników, po przedstawieniu i po zebraniu, wypada mi $y = \frac{5ac - 3b}{5ad}$

O Równaniach pierwszego stopnia z trzema i więcej niewiadomymi.

71. **Z**rozumiałwszy dobrze to wszystko co dotąd powiedziało się, łatwo będzie wnieść sobie, iak się potrzeba obéyśdź w przypadku większey liczby ilościów niewiadomych i równań.

Rozumiejąc że zawsze znajduie się tyle niewiadomych co równań: Jeżeli ich będzie trzy, wyciągniesz z każdego wartość teyże niewiadomey iak gdyby wszystkie inne ilości były wiadome, potem przyrównasz pierwszą wartość do drugiey, i też pierwszą znowu do trzeciéy, albo też pierwszą do drugiey, a drugą do trzeciéy. Tym sposobem, zostaną tylko dwie niewiadome i dwa równania, z którymi postąpisz sobie podług reguły wyżej podanéy (66).

Np

Np. niech będą dane trzy równania następujące, $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$ i $5x - y + 3z = 75$.

Z pierwszego wyciągam $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$

Z drugiego - - - $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$

Z trzeciego - - - $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$

Przyrównawszy pierwszą wartość głoski x do drugiey, mam $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$, przyrównawszy podobnie pierwszą do trzeciéy, mam $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$. A tak mając już tyl-

ko dwie niewiadome i dwa równania, postępuie sobie z niemi podług reguły wyżej przepisanéy (6).

To jest z każdego z tych równań wyciągam wartość głoski y ; z pierwszego wypada mi $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, z drugiego zaś $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

Przyrównawszy te dwie wartości iednę do drugiey, wypada mi nowe równanie $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$, w którym już nieznayduie się tylko

iedna niewiadoma, to jest $z = \frac{13950}{930} = 15$.

Zebym miał y , kładę zamiast z wartość iego 15 w równaniu $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, skąd mi wypa-

$$\text{da } y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{310}{31} = 10.$$

Naoftatek żebym miał x , kładę zamiast y wartość jego 10, a zamiast z wartość jego 15 w któ. réykolwiek z trzech wyżej wynalezionych wár. tościów ilości x , np. w tém zrównaniu $x =$

$$\frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Jeżeli niewszystkie niewiadome wcho. dzą w każde zrównanie, rachunek wypa. dnie tylko tém prościéjczy, ale zawsze po. dobny będzie działanióm dopióró wyżej opisanym.

Np. gdyby dane były te trzy zrównania, $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$. Z pierwsze. go zrównania wypada $x = \frac{65 - 3y}{5}$, a z trzeciego $x =$

$$\frac{57 - 4z}{3}$$

, bo w drugim x nieznamyduie się; w tym razie tedy będą tylko dwie wartości do przyró. wnania, to jest $\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$, skąd x już jest

wyrugowane.

A zatem postąpiwszy sobie z tém zrównaniem, iak z drugim $2y - z = 11$ podług reguł przepisanych do zrównań z dwiema niewia. domemi, wynaydą się wartości głosek y i z , któ. re po skończonym rachunku bydz pokażą się $z = 9$, $y = 10$, naostatek $x = 7$.

72. Stąd pokazuje się, że gdyby było iefzcze więcéy zadanych zrównań, nie trzeba więcéy tyl. ko zachować regułę powszechną następującą: Wy. ciągnij z każdego zrównania wartość téyże niewia. doméy, iedną z tych wartościów przyrównay do każdéy innéy x osobna, tym sposobem wyrugujesz

MATEMATYKI.

iedną niewiadomą i iedno zrównanie. Obéydź się z témi drugiemi zrównaniami tak iak uczyniłeś z pier. wszemi, i znowu ci ubędzie iedno zrównanie i ie. dna niewiadoma; i tak dalej postępuy sobie aż na. koniec zostanie ci się tylko iedna niewiadoma.

73. Nie bez pożytku podobno będzie, gdy tu podamy iefzcze drugi sposób, podług którego wy. naydować się mogą wartości ilościów niewiado. mych w zrównaniach pierwszego stopnia.

Np. niechay będą te dwa zrównania, $3x + 4y = 81$, i $3x - 4y = 9$. Jeżeli odéymiesz drugie zrównanie od pierwszego, mieć będziesz $8y = 72$,

a zatem $y = \frac{72}{8} = 9$. Przeciwnym sposobém, ie.

żeli dodasz pierwsze do drugiego, mieć będziesz $6x = 90$, a zatem $x = \frac{90}{6} = 15$. Jawna tedy jest,

że kiedy dwa zrównania są takie, iż spółczynnik iednéy z niewiadomych jest iednakowy w obu zrównaniach, można bardzo łatwo przez samo do. danie albo odjęcie, dwa zrównania przyprowadzić do tego stanu, żeby zawierały w sobie tylko ie. dną niewiadomą.

Ale czyż da się przywieść do tego stanu ka. żde zrównanie, żeby w niem taż niewiadoma mia. ła iednakowego spółczynnika? da zawsze; dosyć jest tym końcem rozmnożyć iedno z zrównań przez przyzwoitą liczbę. W czém można sobie postąpić w następujący sposób. Np. niech będą dane te dwa zrównania $4x + 3y = 65$ i $5x + 8y = 111$.

Oznaczam sobie przez m liczbę o którą mi idzie, i rozmnażam przez to m iedno z danych zrównań np. drugie, co mi da $5mx + 8my = 111m$. Tak rozmnożone zrównanie dodaję do pierwszego, i mam z tantych dwóch to iedno, $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$, któremu można dać taką po. stać $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Zeby teraz z tego równania wyrugować x , nie trzeba więc tylko zmyślić sobie m byłą liczbą taką, że $4 + 5m = 0$, skąd wnosi się $m = -\frac{4}{5}$. To przypuszczenie przemienia równanie wyżej położone na to, $(3 + 8m)y = 65 + 111m$, z które-

go wyciąga się $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$, gdzie zamiast m położywszy onego wartość $-\frac{4}{5}$, będzie

$$y = \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = 7.$$

Gdybym zaś chciał być wyrugować nie x ale y , zmyśliłbym sobie być m liczbą taką, że $3 + 8m = 0$, to jest uczyniłbym był współczynniki głoski y równe zerowi, skąd miałbym $m = -\frac{3}{8}$. Takowe przypuszczenie przemieniłoby mi równanie na $(4 + 5m)x = 65 + 111m$, z którego wyciągnąwszy x , miałbym $x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m}$, a położywszy w niem zamiast m wartość jego $-\frac{3}{8}$, miałbym naostatek

$$x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = 11.$$

Gdyby były dane trzy równania i trzy niewiadome, trzeba rozmnożyć drugie równanie przez m , a trzecie przez n , a tak rozmnożone dodać do pierwszego, zmyślić sobie współczynniki dwóch z trzech niewiadomych x, y, z równe zerowi, skąd powstaną dwa równania służące do wyznaczenia wartości m i n , z którymi postąpić sobie jak w razie poprzedzającym.

Obierz-

Obierzmy sobie na przykład te trzy równania które już były wyżej, $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, $5x - y + 3z = 75$. Mnożę drugie równanie przez m , trzecie przez n , a dodawszy je tak rozmnożone do pierwszego, mam $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$; co da się napisać w tej postaci, $(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$.

Jeżeli zechcę mieć z , zmyślę sobie $3 + 8m + 5n = 0$, i $5 + 3m - n = 0$, przez co odmieni się równanie na $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, z którego wyciągam $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; teraz nie-

trzeba więc tylko wynaleźć wartości głosek m i n , co wykonywam przy pomocy dwóch równań $3 + 8m + 5n = 0$, i $5 + 3m - n = 0$, z którymi powinienem obéyśdź się jak w przypadku wyżej położonym, to jest rozmnożyć drugie równanie przez liczbę p , i rozmnożone dodać do pierwszego, skąd mieć będę $3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - pn = 0$, co można tak napisać, $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$. Zeby mieć n , zmyślam sobie $8 + 3p = 0$, przez co równanie odmiennia mi się na $3 + 5p + (5 - p)n = 0$, z którego wyciągam $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$;

równanie zaś $8 + 3p = 0$, daie mi $p = -\frac{8}{3}$, więc $n = \frac{11}{3}$; podobnymże sposobem znajde że $m = -\frac{29}{3}$; takowe wartości położywszy w ilości równającej się głosce z , mieć będę $z = 15$. A stąd iawnie pokazuje się, iakby sobie trzeba postąpić, w dochodzeniu wartości y albo x . Lecz byleby tylko znaleźć jedną z niewiadomych, niema potrzeby odprawiać dla każdej podobnego rachunku; bo można użyć wartości téj niewiadomej, kładąc ją w równaniach zadanych; a gdy tak ubędzie jedno

zrównanie, wynayda się inne wartości, sposobem który opisał się wyżej do takowego przypadku.

Przystósowanie poprzedzających reguł do rozwiązania niektórych zagadnień, w któreby wchodziło więcej iak jedna niewiadoma.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Mając dwa gatunki kul takich, że sześć większego gatunku z dziesięcią drugiego gatunku, waży 304 sty; tudzież dziesięć pierwszego gatunku z piętnastą drugiego gatunku, waży 480 ftów; jest pytanie iak wiesfuntowy będzie każdy gatunek tych kul?

Gdybym wiedział wagę każdéy kuli oboiego gatunku, rozmnożywszy wagę pierwszego gatunku przez 6, a drugiego gatunku przez 10, i dodawszy te dwie mnogości iedną do drugiey miałbym 304 ftów; podobnież rozmnożywszy wagę iednéy kuli pierwszego gatunku przez 10, a drugiego przez 15, i dodawszy z sobą te drugie dwie mnogości miałbym 480 ftów. To na przód założywszy, oznaczam sobie wagę iednéy kuli pierwszego gatunku przez x , a wagę drugiego gatunku przez y , i rozumując w sposób dopiero poprzedzający, wypadną mi te dwa zrównania, $6x + 10y = 304$, i $10x + 15y = 480$.

Teraz nietrzeba więcej, tylko szukać wartościów głosek x i y . Tym końcem z każdego zrównania wyciągam wartość głoski x ; pierwsze po przedstawieniu i rozdzieleniu, daje mi $x = \frac{304 - 10y}{6}$, z drugiego wypada mi $x = \frac{480 - 15y}{10}$. Te ilości równające się głosce x przyrównyвам iedną do dru-

drugiey, i mam to nowe zrównanie, $\frac{304 - 10y}{6} =$

$\frac{480 - 15y}{10}$, z którego przez poprzedzające reguły

wyciągam $y = 16$.

Żebym miał x , kładę w pierwszym zrównaniu $x = \frac{304 - 10y}{6}$ zamiast y wartość iego 16, skąd

mi wypada $x = \frac{144}{6} = 24$; więc iedna kula wię-

kszego gatunku waży 24 sty, a mniejszego gatunku 16 ftów. Jakóż 6 kul 24 stywych czynią 144 ftów, do których dodawszy 10 kul 16 stywych, albo 160 ftów, summa uczyni 304 sty. Podobnież 10 kul 24 stywych, waży 240 ftów, a dodawszy do nich 15 kul 16 stywych ważących razém także 240 ftów, summa uczyni 480 ftów.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Armata 24 fwa składająca się z miedzi i cyny, waży 5531 ftów, i zawiera w sobie materyi 8,95 stóp sześciennych; wiedząc że stopa sześcienna miedzi waży 630 ftów, a stopa sześcienna cyny 512 ftów, jest pytanie wiele mieści się w tęg armacie miedzi, a wiele cyny?

Gdybym wiedział liczbę stóp sześciennych każdego gatunku materyi wchodzących w tę armatę, dodawszy te dwie liczby, powinnyby mi uczynić 8,95 sss. Potém powtórzywszy 630 ftów tyle razy, ile stóp sześciennych miedzi znajduie się, miałbym wagę miedzi wchodzącéy w tę mieszaninę; podobnież rozmnożywszy 512 przez liczbę stóp sześciennych cyny, miałbym wagę téy cyny; naostatek wypadłe dwie mnogości dodawszy iedną do drugiey, summa dałby mi powinna 5531 ftów.

Rozumując iak wyżej, i oznaczywszy przez x liczbę stóp sześciennych miedzi, a przez y liczbę

bę stóp sześciennych cyny, będzie $x + y = 8,95$ i
 $630x + 512y = 5531$.

Z tych obu równań wyciągnąwszy x , mam
 $x = 8,95 - y$, tudzież $x = \frac{5531 - 512y}{630}$ więc $8,95$

$$- y = \frac{5531 - 512y}{630}, \text{ skąd wnosi się } y = \frac{107,5}{118} = 0,911.$$

Położywszy tę wartość zamiast y w równaniu $x = 8,95 - y$, wypadnie $x = 8,039$.

Gdyby dwie materye wchodzące w mieszani-
 nę, miały ważności swoje przyrodne * odmiennie
 od tych które im tu naznaczyliśmy. i gdyby obję-
 tość iako też cała waga zadanej mieszankiny trafi-
 ła się różna od téj, jaką tu obrałszy sobie na
 przykład, sposób wynalezienia ilościów oboiego ro-
 dzaju materyi niebyłby przeto odmienny. A tak
 ażeby w iednym zagadnieniu zamknąć wszelkie ro-
 związania tego gatunku, dajmy w powszechności,
 że liczba stóp sześciennych całej mieszankiny jest
 wyrażona przez

Waga téżże całej mieszankiny wyrażona w fun-
 tach przez

* To co nazywa się ważnością przyrodną,
 (gravitas specifica) jest waga iakiegokolwiek ciała
 wiadomej objętości. Kiedy się mówi że to a to
 ciało waży 12 stóp, tym sposobem niewyraża się
 tylko waga tego ciała, a nie ważność przyrodna
 téj materyi, z której składa się to ciało; lecz po-
 wiedziałbyśmy np. że 12 cali sześciennych wody
 pospolitej waży 7 uncyi i 7 ziarn, w tém wyraże-
 niu już naznacza się ważność przyrodna wody te-
 go gatunku, i daje się fundament, przy pomocy
 którego można wynaléżdż wagę iakiejkolwiek innéj
 objętości téżże wody.

Waga stopy sześciennéj piérwszéj materyi
 niech będzie

Waga stopy sześciennéj drugiey materyi d .
 i d rozumieją się bydź wyrażone takżé w funtach.

Teraz oznaczywszy przez x , liczbę stóp sze-
 ściennych piérwszéj materyi, a przez y liczbę stóp
 sześciennych drugiey materyi, wypadną dwa zrów-
 nania następujące, $x + y = a$, i $cx + dy = b$.

To założywszy, z piérwszego równania wy-
 ciągam $x = a - y$, a z drugiego $x = \frac{b - dy}{c}$. Te
 dwie ilości równające się głosce x przyrównawszy
 iedną do drugiey, mam $a - y = \frac{b - dy}{c}$, skąd wy-

$$\text{ciągam } y = \frac{ac - b}{c - d}$$

Zebym miał x , kładę zamiast y wartość iego
 $\frac{ac - b}{c - d}$ w równaniu $x = a - y$, i mam $x = a +$
 $\frac{b - ac}{c - d}$, co można zebrać (43) na $x = \frac{b - ad}{c - d}$.

Z tych dwóch równań iakoto $x = \frac{b - ad}{c - d}$,

i $y = \frac{ac - b}{c - d}$, można sobie wnieść regułę ułożoną

w prościéyszym wyrażeniu, służącą powszechnie
 do rozwiązania wszelkich zagadnień tego ga-
 tunku; w czém iednak należy uważać iód Ze
 przez b oznacza się cała waga mieszankiny. $2re$
 Ze ponieważ a wyraża liczbę części sześciennych
 zawartych w całej mieszankinie, a d wagę przyro-
 dną drugiey materyi, więc ad wyraża wieleby wa-
 żyła

żyła objętość całej mieszaniny, gdyby była złożona z samej materji drugiego gatunku. Naostatek że mianownik $c-d$ oznacza różnicę między ważnościami przyrodnemi materji oboiego gatunku.

Uczyniwszy także temu podobny rozbiór wartości głoiki y , pokaże się że ac oznacza wiele ważylaby objętość całej mieszaniny, złożonej iedynie z gatunku pierwszey materji. A stąd dopiero wnoś się reguła następująca.

Wyrachuy wielebny ważyla objętość mieszaniny, gdyby tylko była złożona z samej drugiey materji, odęym tę wagę od prawdziwéy wagi całej mieszaniny, a resztę rozdzieli przez różnicę między ważnościami przyrodnemi obu materji, wieloraz pokaże ci liczbę części sześciennych pierwszey materji w tę mieszaninę wchodzących.

Przeciwnie, żeby mieć liczbę części sześciennych drugiey materji, wyrachuy coby ważyla objętość całej mieszaniny, gdyby tylko z samej pierwszey materji była złożona, tę wynalezioną wagę odęym od prawdziwéy wagi całej mieszaniny, a resztę rozdzieli przez tę samą ilość co wyżej.

Ta reguła, jest właśnie taż sama którą w Arystetyce pośpolicie nazywają *Regułą Mieszaniny* (Regula Alligationis).

Pod to zagadnienie można podciągnąć nieskończoną liczbę innych zagadnień, które z pierwszego wyczerzenia zdawać się mogą niejednakowego gatunku. Np. gdyby potrzeba było odliczyć w Francuzkiej monecie 522 liwów, w czterdziestu dwóch sztukach dwoiakiego gatunku, to jest iedne sztuki żeby ważyły po 24 liw: a drugie po 6 liw. Zastanowiona, że to zagadnienie nieróżni się od następującego: Mieszanina trzymająca w sobie 24 stop sześciennych, waży 522 sty, a z dwóch gatunków materji w tę mieszaninę wchodzących, iedney stopa sześcienna waży 24 sty, a drugiey 6 ftów. A zatem postąpiwszy sobie podług reguły poprzedzającej, pokazałoby się że

że na 522 liwów trzeba by 15 sztuk wartających po 24 liw: a 27 sztuk po 6 liw.

Taż sama reguła służyłaby ieszcze do rozwiązania następującego zagadnienia. Stopa sześcienna wody morskiej waży 74 sty, stopa sześcienna wody deszczowej waży 70 ftów, wiel. by trzeba każdego gatunku wody zmieszać, żeby zrobioney z nich mieszaniny stopa sześcienna ważyła 73 sty.

A stąd już iawnie pokazuje się, iak rzecz jest użyteczna przyzwyczaić się zawczasu, do oznaczania ilościów wiadomych w zagadnienie wchodzących w sposób powszechny, tudzież do wyrozumienia i tłómaczenia sobie wypadków Algebraicznych wynikających z rozwiązanych zagadnień.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Mam trzy sztaby metalu, z których w każdą wchodzi złoto, srebro, i miedź; proporcya mieszaniny w pierwszey sztabie jest taka, że w 16 uncjach znajduje się 7 unc: złota, 8 srebra, a 1 uncja miedzi. W drugiey sztabie 16 uncji składają się z 5 unc: złota, 7 srebra; a 4 unc: miedzi. W trzeciey zaś sztabie, na 16 uncji wchodzi 2 unc: złota, 9 srebra, a 5 miedzi. Teraz z różnych części wziętych z każdej z tych trzech sztab, trzeba mi złożyć czwartą sztabę takiej proporcji między pominionemi trzema metalami, żeby na 16 unc: wchodziło 4 unc: $1\frac{1}{2}$ złota, $7\frac{1}{2}$ srebra, a $3\frac{1}{2}$ miedzi.

Oznaczmy sobie przez x ilość uncji iaką trzeba by wzięść z pierwszey sztaby, przez y ilość uncji z drugiey sztaby, a naostatek przez z ilość uncji wzięść mianą z trzeciey sztaby.

Ponieważ w 16 uncjach pierwszey sztaby zawiera się 7 uncji złota, więc można wynaléśdź wiele złota byđ musi w x uncjach téż sztaby, a to wyrachowawszy czwarty wyraz następującej proporcji, $16:7::x$; na takowy czwarty wyraz wy-

padnie $\frac{7x}{16}$; przez temuż podobne rozumowanie wy-
 naydzie się także, że w y uncjach drugiéy szta-
 by, powinno znajdować się złota $\frac{5y}{16}$ uncyi, a w z
 uncjach trzeciéy sztaby, $\frac{2z}{16}$ unc. Te trzy ilości
 razem złączone uczynią $\frac{7x + 5y + 2z}{16}$ unc: złota,
 które powinny równać się $4\frac{15}{16}$ unc. albo $\frac{79}{16}$; więc
 będzie $\frac{7x + 5y + 2z}{16} = \frac{79}{16}$. **(W.D.)**
 Zeby zowu drugi warunek został dopełniony,
 uważam podobnież iż biorąc x uncyi metalu z pier-
 wśzéy sztaby, biorę następnie $\frac{8x}{16}$ unc. srebro, z dru-
 giéy $\frac{7y}{16}$, a z trzeciéy $\frac{9z}{16}$; te trzy ilości razem złą-
 czone uczynią $\frac{8x + 7y + 9z}{16}$, a ponieważ chcę ażeby
 uczyniły $7\frac{10}{16}$ albo $\frac{122}{16}$, więc mieć będę $\frac{8x + 7y + 9z}{16}$
 $= \frac{122}{16}$.
 Tymże samym sposobem dopełniając trzeciégo
 warunku, wypadnie trzecie równanie, $\frac{x + 4y + 5z}{16}$
 $= \frac{55}{16}$.
 A że we wszystkich trzech dopiero wynale-
 zionych równaniach, liczba 16 jest obu części spół-
 nym

MATEMATYKI.

nym dzielnikiem, więc możemy ją wyrzucić, i mieć
 będziemy zamiast pierwszych następujące równania:
 $7x + 5y + 2z = 79$, $8x + 7y + 9z = 122$, $x + 4y + 5z = 55$.

Z każdego z nich wyciągnąwszy wartość gło-
 ski x , mam $x = \frac{79 - 5y - 2z}{7}$, $x = \frac{122 - 7y - 2z}{8}$,
 $x = 55 - 4y - 5z$.

Zrównawszy pierwszą wartość głośli x z dru-
 gą i trzecią wartością (71), mieć będę $\frac{79 - 5y - 2z}{7}$
 $= \frac{122 - 7y - 9z}{8}$ i $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z$.

W tych równaniach już nieznaydują się tyl-
 ko dwie niewiadome, a zatem z niemi obęysdz się
 trzeba, iak się powiedziało wyżej (66).

Pocynam tedy naprzód od wyrugowania dziel-
 ników, a dopiero wyciągam z każdego równania
 wartość głośli y , i mam $y = \frac{222 - 47z}{9}$,
 i $y = \frac{306 - 33z}{23}$.

Zrównawszy znowu te dwie wartości głośli y
 iedną z drugą, będzie $\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$, a po
 odprawieniu działań zwyczajnych znajdzie się z
 $= \frac{2352}{784} = 3$.

Zeby mieć wartość głośli y wyrażoną w ilo-
 ściach wiadomych, kładę w któreukolwiek zrów-
 naniu z wyżej położonych, zamiast z wartość
 iego 3 dopiero wynalezioną, np. w równaniu
 $y = \frac{222 - 47z}{9}$, co mi daie $y = \frac{81}{9} = 9$.

Na-

Naofatek żeby mieć x , kładę w któremkolwiek równaniu należącym do x , zamiast y i z wartości ich 9, i 3, np. w tém równaniu, $x = 55 - 4y - 5z$; które tym sposobem odmieni się w następujące, $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$. Skąd wnoszę że ponieważ mam $x = 4$, $y = 9$, $z = 3$, więc trzeba mi wziąć z pierwszej sztaby 4 unc. metalu, z drugiej 9, a z trzeciej 3 unc. ażeby w mieszaniu złożonej z tych trzech sztabów, znajdowało się $4\frac{1}{8}$ unc. złota, $7\frac{1}{8}$ srebra, a $3\frac{1}{8}$ unc. miedzi.

Jakóż ponieważ w 16 uncjach pierwszej sztaby zawiera się 7 unc. złota, 8 srebra, a 1 miedzi, więc iawna jest, że jeżeli z téj sztaby wezmę tylko 4 unc. w tych 4. uncjach znajdować się będzie $\frac{28}{16}$ unc. złota, $\frac{32}{16}$ srebra, i $\frac{4}{16}$ miedzi.

Z téjże przyczyny wzięwszy z drugiej sztaby 9 uncji, zawierać się w nich będzie $\frac{63}{16}$ unc. złota, $\frac{72}{16}$ srebra, i $\frac{9}{16}$ miedzi; na koniec w 3 uncjach wziętych z trzeciej sztaby, będzie $\frac{9}{16}$ unc. złota, $\frac{27}{16}$ srebra, i $\frac{3}{16}$ miedzi.

Te trzy ilości każdego rodzaju metalu z każdej sztaby wzięte i razem dodane, uczynią $\frac{98}{16}$, i $\frac{111}{16}$, to jest że czwarta sztaba składać się będzie z $4\frac{1}{8}$ unc. złota, $7\frac{1}{8}$ srebra, i z $3\frac{1}{8}$ uncji miedzi.

O Przypadkach w których zagadnienia stają się nieokreślonymi, lubo do rozwiązania ich znajdować się będzie tyle równań co niewiadomych; tudzież o przypadkach w których zagadnienia bywają do rozwiązania niepodobne.

75. **T**rafia się czasem, że lubo znajdować się będzie tyle równań co niewiadomych, iednakże zagadnienie z któ-

którego składają się równania może być nieokreślone, to jest podlegać może nieokreślonej liczbie rozwiązań.

To zaś zdarza się w ten czas, kiedy niektóre warunki lubo na pozór między sobą różne, iednakże co do istoty będą też same. W tym razie, równania zawierające w sobie takowe warunki, będą albo wielokrotne drugich (multipla), albo w powszechności, niektóre z nich składać się będą z iednego lub wielu innych równań bądź to dodanych, bądź odjętych, bądź też rozmnożonych albo rozdzielonych przez pewne liczby. Np. zagadnienie z którego by wypadły te trzy równania,

$$8x + 3y + 2z = 17$$

$$8x + 2y + 4z = 20$$

$$18x + 8y + 8z = 54$$

podpadałoby nieokreślonej liczbie rozwiązań, lubo stąd cośmy widzieli wyżej zdawałoby się, że każda z tych głosek x , y , z , niemoże mieć więcej tylko iedną wartość. Z tych trzech równań ostatnie składa się z drugiego, dodanego do podwójności pierwszego. Jawna zaś jest, że przypuściwszy dwa pierwsze, trzecie wynika z nich koniecznie, a zatem żadnego nowego warunku niewyraża, prze-

przeto też rozwiązujący zagadnienie znawdnie się w takim przypadku, iak gdyby niemiął więcý tylko dwa zrównania. Zobaczymy zaś wkrótce, że gdy do trzech niewiadomych niebędzie tylko dwoie zrównań, każda niewiadoma może mieć nieokreśloną liczbę wartościów.

76. Takie przypadki o których tu mowa, zawsze pokażą się z rachunku w sposób następujący. Nietrzeba więcý, tylko przystąpić do wyciągnięcia wartościów głosek niewiadomych podług reguł wyżej podanych, natenczas ieżeli które zrównanie znaydować się będzie złożone z drugiego, to w dalszym przeciągu rachunków wypadnie w zrównaniu tożsamość, to iest że dwie części zrównania nietylko będą sobie równe, ale też będą złożone z wyrazów jednakowych i równych; a ile znajdzie się zrównań taką tożsamością zarażonych, tyle z nich przeczytać trzeba za niezdatne do dalszych działań.

Np. ieżeli z każdego z tych zrównań, $6x + 8y = 12$, i $x + \frac{4}{3}y = 2$, wyciągnę wartość głoski x , mieć będą $x = \frac{12 - 8y}{6}$, i $x = 2 - \frac{4}{3}y$. Te dwie ilości równające się głosce x przyrównawszy jedną do drugiej, mieć będą $\frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, albo wyrugó-

rugó wawszy mianowników, $36 - 24y = 36 - 24y$; zrównanie mające w obu częściach tożsamość, które niemoże mi wskazać wartości głoski y ; bo po przedstawieniu i zebraniu wypadłoby $0 = 0$.

Podobnież mając trzy zrównania następujące

$$5x + 3y + 2z = 24$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + 5z = 60$$

$$15x + 9y + 6z = 72$$

Z pierwszego wyciągam $x = \frac{24 - 3y - 2z}{5}$,

drugie, po wyrugowaniu mianowników, po przedstawieniu i po zebraniu, daie mi $x = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$,

a z trzeciego wypada $x = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$. Zrówna-

wszy pierwszą wartość głoski x , z drugą i z trzecią wartością, mieć będą następujące zrównania, $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$, i $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$,

$= \frac{72 - 9y - 6z}{15}$, albo po wyrugowaniu mianowni-

ków, $600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, i $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$, zrównania w obu częściach zawierające tożsamość, z których ani wartości y ani wartości z wyciągnąć niemożna; bo w każdym z nich wypadła $0 = 0$. W niniejszym tedy przypadku, właściwie mówiąc niema tylko jedno zrównanie.

Zagadnienia prowadzące do tym podobnych wypadków, są wprawdzie nieokreślone, ale nie są niepodobne. Zobaczymy w kótce iak z niemi obéysdz się trzeba.

77. Kiedy zagadnienie, które niepro-
wadzi wyżej tylko do zrównań pierwsze-
go stopnia, jest do rozwiązania niepodob-
ne, natenczas to niepodobieństwo daie
się stąd poznać, że dokończony rachunek
daie wypadek niepodobny, np. $4=3$.

I tak daymy że mamy te dwa zrównania,
 $5x + 3y = 30$, i $20x + 12y = 135$. Z pierwszego
wyciągam $x = \frac{30 - 3y}{5}$, a z drugiego $x = \frac{135 - 12y}{20}$.
Zrównawszy te dwie wartości głośki x , jedna z
drugą, mieć będą $\frac{30 - 3y}{5} = \frac{135 - 12y}{20}$, a wyrugó-
wawszy mianowników, będzie $600 - 60y = 675 -$
 $60y$, skąd wnosi się ten niepodobny wypadek, 600
 $= 675$; więc i zagadnienie z którego wynikają ta-
kie dwa zrównania jest do rozwiązania niepodobne.

78. Rozwiązania wyrażone w ilo-
ściach przeczących, oznaczają także ia-
kieś niepodobieństwo w zagadnieniu; ato-
li takie niepodobieństwo nie jest bezwzględ-
ne, ale tylko stosuje się do rozumienia
w jakim ilości były wzięte w rachunku;
bo pomienione ilości wzięte w pewnym
rozumieniu, mogą dać rozwiązania natu-
ralnie wypadające i zagadnieniu zadość
czyniące. *Zobacz co już powiedzieliśmy
o tym wyżej (62).*

O

O Zagadnieniach nieokręślonych.

79. Każde zagadnienie które może być
rozwiązane wielorakiem sposobami,
jednakże tak, że między temi wzy-
stkimi sposobami niemożna być pe-
wnym tego sposobu, który właśnie daie
materją do zagadnienia, nazywa się za-
gadnienie nieokręślone. W takich zaga-
dzeniach, zawsze znajduje się mnięjsza
liczba warunków iak niewiadomych; a
mówiąc w powszechności, zagadnienia
nieokręślone, mogą mieć nieskończoną
liczbę rozwiązań; jednakże trafia się czę-
stokroć że liczba ich bywa okręślona, z
przyczyny pewnych warunków, które
niemogąc być wyrażone w zrównaniach,
niedopuszczają ażeby sposobem prosto do
tego zmierzającym, dała się naznaczyć
liczba rozwiązań, iaką mieć może zaga-
dnienie.

Np. gdyby zadano było: *Wynaléśdź
dwie liczby takie, które dodane z sobą uczy-
niłyby 24.* Jedną z tych liczb oznaczy-
wszy przez x , a drugą przez y , mieć bę-
dę $x + y = 24$, skąd wyciągam $x = 24 - y$.
To zagadnienie może mieć nieskończoną
liczbę rozwiązań, jeżeli przez x i przez
 y , bez wyłączenia rozumieć się będą li-
czby czyto całe czy łamane, twierdzące

G 2

al-

albo przeczące. Zeby rozwiązać zagadnienie, doliczyć jest położyć zamiast y liczbę taką jaką się spodoba, a potem z niej wnieść sobie wartość głoski x przy pomocy równania $x = 24 - y$, tak iż rozumiejąc kolejno $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$, i t.d. mieć będą $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$ i t.d. Lecz chcąc ażeby w rozwiązaniu wypadły tylko same liczby całe i twierdzące, natenczas liczba rozwiązań już będzie określona; albowiem ażeby głoska x wyrażała ilość twierdzącą, trzeba ażeby y nie było większe nad 24. A że jeszcze te ilości mają być oraz liczbami całymi, więc jawna jest, że wzwyż położone równanie niemoże mieć ze wszystkiemi więcej jak 25 rozwiązań, iużto rachując i z zerem: tak że biorąc kolejno $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, i t.d. będzie $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$, i t.d.

80. Atoli kiedy będzie założony ten warunek, ażeby liczby wypadające z rozwiązania były liczbami całymi i twierdzącymi, niezawśnie tak łatwo dać się postrzedz jak w poprzedzającym przykładzie, jakimby sposobem temu warunkowi zadość uczynić: następujące zagadnienia pokażą nam do tego drogę.

ZA-

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Niech będzie zadano jak wielą sposobami można wyplacić 542 złt. dając sztuki wartujące po 17 złt, a w zamian odbierając sztuki wartujące po 11 złt?

Oznaczmy sobie liczbę 17 złotych przez x , a liczbę 11 złotych przez y ; płacąc x sztuk każda od 17 złt, płacę x razy 17 złt, albo $17x$, a odbierając w zamian y sztuk od 11 złt, odbieram $11y$; a że mam wypłacić 542 złt, więc mieć będę $17x - 11y = 542$. Wyciągam z tego równania wartość głoski y , to jest niewiadomej mającej mniejszego współczynnika, i mam $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Ponieważ nie mam tylko jedno równanie a dwie niewiadome, przeto rzecz oczywista, że zamiast x położywszy taką liczbę jaką mi się spodoba, będę mógł wnieść sobie z niej wartość głoski y , która pewnie uczynić musi zadość równaniu; lecz że oraz zagadnienie wyciąga ażeby te wartości były liczbami całymi, więc postępuję sobie w następujący sposób.

Wartość $y = \frac{17x - 542}{11}$ po odprawioném dzie-

Jeniu ile można, przemienia się na $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; trzeba więc ażeby $\frac{6x - 3}{11}$ było liczbą całą;

niechay takowa liczba cała będzie oznaczona przez u , w tym razie mieć będę $\frac{6x - 3}{11} = u$, a zatem

$6x - 3 = 11u$, skąd wnosi się $x = \frac{11u + 3}{6}$, a po od-

prawioném dzieleniu $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; trzeba tedy ie-

szcze ażeby $\frac{5u + 3}{6}$ było liczbą całą, oznaczmy

G 3

przez

przez t tę liczbę całą, i mieć będziemy $\frac{5u+3}{6} = t$,

a zatem $5u+3=6t$, skąd wnosi się $u = \frac{6t-3}{5}$

$= t + \frac{t-3}{5}$; trzeba tedy znowu ażeby $\frac{t-3}{5}$ było

liczbą całą. dajmy że s jest takową liczbą całą,

co nam da $\frac{t-3}{5} = s$, a zatem będzie $t = 5s+3$, i

działanie kończy się na tém. Albowiem iawna jest, że obrawszy sobie na wartość głoski s taką liczbę całą iaką się spodoba, na wartość głoski t zawsze wypadnie liczba całą, to jest taka iakię wyciąga zagadnienie, bo już niema mianownika.

Powróćmy teraz do wartościów głosek x i y ; znalazłem wyżej $u = \frac{6t-3}{5}$, więc położywszy w

tém zrównaniu zamiast t wartość iego $5s+3$, mieć będzie $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s+3$; a że znowu mia-

łem $x = \frac{11u+3}{6}$, więc w tém zrównaniu położy-

wszy zamiast u wartość iego dopiero wynalezioną, mieć będzie, $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s+6$; naostatek

ponieważ było $y = \frac{17x-542}{11}$ więc i w tém zrównaniu położywszy zamiast x wartość iego, będzie $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s-40$. A za-

tém na wartości odpowiadające głoskom x i y , mam $x = 11s+6$, $y = 17s-40$. Co się tycze pierwszego zrównania, w niem zamiast s można po-

MATEMATYKI. 101

łożyć taką liczbę iaką się spodoba, ale w zrównaniu wyrażającem wartość głoski y , zamiast s nie da się wziąć mniejsza liczba iak 3: bo ponieważ y ma być liczbą twierdzącą, więc trzeba ażeby 175 czyniły więcej iak 40, albo żeby s warowało więcej iak 40, to jest więcej iak 2.

Można tedy rozwiązać to zagadnienie niezliczenie róż. ϵ ni spółkami, kładąc w wynalezionych wartościach głosek x i y , zamiast s kolejno wszystkie liczby twierdzące co ich być może począwszy od 3 aż nieskończenie; i tak rozumiejąc porządkiem $s=3, s=4, s=5, s=6, s=7$, i. t. d. znajdziemy wartości odpowiadające głoskom x i y , iak następują.

$x = 39$	$y = 11$
$= 50$	$= 28$
$= 61$	$= 45$
$= 72$	$= 62$
$= 83$, i. t. d.	$= 79$, i. t. d.

Z których każda jest taka, że płacąc 17 złotych liczbę razy oznaczoną przez x , a odbierając w zamian 11 złotych liczbę razy oznaczoną przez y , 542 zł. zostałyby wypłacone.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Niech będzie potrzeba zrobić 741 złotych, w 14 sztukach trojakię gatunku, tak żeby sztuki pierwszego gatunku warte były po 24 złt. drugiego po 19, a trzeciego po 10 złt?

Oznaczmy przez x, y, z , ilość sztuk potrzebnych każdego z tych trzech gatunków; ponieważ ma być ze wszystkich 41 sztuk, więc będzie $x+y+z=41$.

2^{te} Każda sztuka pierwszego gatunku warta będąc 24 złt, x sztuk musi być warte x razy 24 złt, albo $24x$; z téż przyczyny y sztuk drugiego gatunku będą warte $19y$, a z sztuk trzeciego gatunku uczynią $10z$; te trzy ilości razem złożone wynoszą $24x+19y+10z$, a że podług treści zagadnienia składać powinny 741 złt, więc będzie $24x+19y+10z=741$.

G 4

Z ka-

Z każdego z tych równań wyciągnąwszy wartość iednąż nie wiadomę bądź którykolwiek np. x , mieć będę $x = 41 - y - z$, $x = 741 - 19y - 10z$

; a zrównawszy te dwie ilości wyrażające wartość głoski x iedną z drugą, mam $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$, albo wyrugowawszy mianownika $984 - 24 - 24z = 741 - 19y - 10z$, po przestawieniu i po zebraniu $243 = 5y + 14z$.

Teraz wyciągam wartość głoski y , która ma mniejszego współczynnika, i mam $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$. A że ilości y i z powinny być

liczbami całymi, więc trzeba ażeby ilość $\frac{3 - 4z}{5}$ była także liczbą całą; niechay ta liczba cała będzie oznaczona przez t , natenczas będzie $\frac{3 - 4z}{5} = t$, skąd wyciągam $z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4}$; trzeba

tedy iefzcze ażeby $\frac{3 - t}{4}$ było liczbą całą; oznaczam sobie takową liczbę całą przez u , i mam $\frac{3 - t}{4} = u$, albo $3 - t = 4u$, a zatem $t = 3 - 4u$.

To mając powróćmy nazad do wartościów głosek y , z , i x .

Ponieważ znalazłem wyżej $z = \frac{3 - 5t}{4}$, więc położywszy w tém równaniu, zamiast t wartość one

onego, mieć będę $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; tudzież ponieważ znalazłem wyżej $y = \frac{243 - 14z}{5}$, więc położywszy znowu w tém równaniu, zamiast z wartość onego, mieć będę $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Naofatek ponieważ miałem $x = 41 - y - z$, więc teraz mieć będę $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$; tak że wartości odpowiadające głoskom x , y , z , będą następujące, $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, $z = 5u - 3$; w których zamiast u można położyć jakąkolwiek liczbę całą, byleby taką, ażeby wartości głosek x , y , z wypadły w liczbach twierdzących. W tym zaś warunku zawierają się iefzcze trzy inne następujące, iakoto *1^o* Ażeby $9u$ było wartościcęj iak 13, to iest żeby ilość wzięta zamiast u była więkfsza iak $\frac{13}{9}$ albo $1\frac{4}{9}$. *2^o* Ażeby 57 było ilością więkfszą iak $14u$, to iest ażeby zamiast u obrana była ilość mniejsza iak $\frac{17}{4}$, albo $4\frac{1}{4}$. *3^o* Ażeby $5u$ było wartościcęj iak 3, a zatem ilość położona zamiast u , żeby była więkfsza iak $\frac{3}{5}$, co chybić niemoże iezeli uczyni się zadość pierwszemu warunkowi; a tak w niniejszym przypadku liczba rozwiązań staie się bardzo określona, i kończy się na trzech sposobach, to iest naznaczywszy głosce u za wartości tylko te trzy liczby, 2, 3, albo 4, które szczególnie z warunkami zagadnienia pogodzić się mogą. Niemożna tedy zrobić 741 zł. w 41 sztukach trojakię wyżej opisanego gatunku, tylko biorąc liczby niżej wyrażone, które wypadają, położywszy w każdej wartości głosek x , y , z , zamiast u następnie iedną po drugięj liczby 2, 3, i 4.

x	y	z
5	29	7
14	15	12
23	1	17

O Zrównaniach drugiego stopnia z iedną niewiadomą.

81. Nazywają się Zrównania drugiego stopnia, w których najwyższy stopień niewiadomey, jest też sama niewiadoma rozmnożona sama przez się, czyli podniesiona do kwadratu.

Tak zrównanie $5x^2 = 125$, jest zrównanie drugiego stopnia; bo w wyrazie $5x^2$, ilość x znajduje się rozmnożona sama przez się.

82. Kiedy zrównanie nie zawiera w sobie innego stopnia ilości niewiadomey, tylko kwadrat, w rozwiązaniu jego nie będzie żadney trudności: dosyć jest w takim razie oswobodzić kwadrat téy niewiadomey, z wszelkiéy ilości któraby go mnożyła albo dzieliła, tudzież z ilościów połączonych z nim przez znaki $+$ albo $-$, co się wykonywa według reguł danych (53 i daléy); po czém niezostanie więcéy do działania, tylko z każdéy części zrównania wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

Np. w zrównaniu $5x^2 = 125$, mieć będe $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, a wyciągnowfszy pierwiastek kwadratowy z każdéy części, będzie $x = 5$.

Podobniez gdybym miał zrównanie $\frac{3}{4}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$; zniósłszy ułamki i przestawiwszy, wypada mi $25x^2 = 12x^2 = 105$, albo $13x^2 = 105$, albo $x^2 = \frac{105}{13}$, a zatem $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Znak

Znak $\sqrt{}$, oznacza że ma być wyciągniony pierwiastek kwadratowy. Kiedy trzeba oznaczyć wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego z ułamka, iak w terazniéym przypadku, to ramiona tego znaku (który nazywa się *znakiem pierwiastkowym*) (signum radicale), spuszczaia się poniżej liniiki, oddzielaiacéy wyrazy ułamka ieden od drugiego. Lecz ieżeli by przyszło wyrazić, że pierwiastek kwadratowy ma być wyciągniony tylko z iednego wyrazu ułamka, natenczas cały znak pierwiastkowy kładzie się nad albo pod liniiką; tak chcąc wyrazić że pierwiastek kwadratowy z 40, ma być rozdzielony przez 3, piszę $\frac{\sqrt{40}}{3}$. Gdyby i-

łość, z któr éy pierwiastek kwadratowy ma być wyciągniony była wielosłowna, natenczas od znaku pierwiastkowego trzeba by pociągnąć linią, nakrywaiącą tę całą ilość; np. chcąc naznaczyć że z ilości $3ab + b^2$ ma być wyciągniony pierwiastek kwadratowy, piszę $\sqrt{3ab + b^2}$. Czasem także niedaie się liniiki, ale tylko ilość wielosłowna zamyka się między dwómi nawiasami, polożywszy na początku znak $\sqrt{}$, iakoto $\sqrt{(3ab + b^2)}$.

82.

83. Widzieliśmy indziej (24) kiedy tak mnożny iak mnożnik to i oba mają znaki jednakowe, mnogości się zawsze znak $+$; skąd następnie, mając wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ilości poprzedzonej znakiem pierwiastkowy można zarówno dać znak $+$ albo $-$.

Tak w równaniu poprzedzającym $x^2 = 25$ można zarówno powiedzieć, że pierwiastek kwadratowy ± 5 , albo -5 ; albowiem każda z tych dwóch liczb, pomnożona sama przez się oddaie zawsze na 25 , przeto też rozwiązanie równania $x^2 = 25$, pisze się tak $x = \pm 5$, wymawia się *x* równe więcej lub mniej 5, i tyle waży iak dwa równania następujące $x = +5$, i $x = -5$.

Podobnież drugie wyżej położone równanie ma się pisać, $x = \pm \sqrt{13}$.

84

* Mógłby tu kto zapytać się, czemu pierwszą część równania niedaemy także tego dwoiakiego znaku $\pm$. Na to się odpowiada, iżby go można dać i pierwszej części; ale stąd nicby niewyniknęło nowego. Jakżeż napisawszy $\pm x = \pm 5$, z tego wyrażenia wypadną te cztery równania, $+x = 5$, $+x = -5$, $-x = +5$, $-x = -5$. Z których ostatnie wychodzi na pierwsze, przemieniwszy tylko w niem znaki. Toż samo powiedzieć można o trzecim względem drugiego.

Trzeba dać baczenie ażeby wartości głoski x położony w pierwszym równaniu $x = 5$, niepoczytać za też samą ilość iaka jest w drugim $x = -5$, albo obie przez też samą cyfrę, czyli też samą głoskę x są oznaczone. Głoska x służy za znak przez którą oznaczają się ilości szukane; i może wyrażać różni ilości, tak iak np. słowo Taler, podług różności królów znaczy różne wartości.

84. Kiedy pierwiastek kwadratowy ma być wyciągnięty z ilości poprzedzonej znakiem $-$, natenczas téj całej ilości daie się znak pierwiastkowy, a przed znakiem kładzie się także dwoiaki znak $\pm$.

I tak mając $x^2 = -4$, pisze się $x = \pm \sqrt{-4}$; i lubo $z + d$ by się wyciągnąć pierwiastek kwadratowy 2, jednakże nienależy pisać $x = \pm 2$; w takim razie jest rzeczą istotną żeby pamiętać na znak $-$, którym jest poprzedzona ilość pod znakiem pierwiastkowym położona.

85. kiedy równanie iakie prowadzi tym sposobem do wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego z ilości przeczącej, natenczas można sobie stąd wnieść że zagadnienie, z którego takie równanie wynika, jest niepodobne do rozwiązania. W rzeczy samej ilość przecząca niemoże mieć pierwiastka kwadratowego ani doskonałego, ani nawet przybliżonego; bo niema żadnej ilości tekięj ani twierdzącej ani przeczącej, która będąc pomnożona sama przez się mogłaby dać na mnogość ilość przeczącą: prawda że np. -4 , mogą być uważane, iakby pochodziły z rozmnożenia $+2$ przez -2 ; ale te dwie ilości poprzedzone różnymi znakami nie są sobie równe, a zatem mnogość z nich powstająca niemoże być kwadratem. A tak, kiedy jest zadano żeby wyciągnąć pier.

pierwiałek kwadratowy z ilości przeczący, jest zadana rzecz niepodobna; więc też każde zagadnienie prowadzące do takiego działania, jest zagadnienie do rozwiązania niepodobne. I toć to jest po czém poznać się niepodobieństwo zagadnień drugiego stopnia.

Ztém wszystkiém nienależy dla tego poczytać za rzecz nieużyteczną wiadomości o pierwiałkach kwadratowych ilościach przeczących; albowiem zdarza się dość często, że zagadnienie które nie jest niepodobne, nieda się inaczey rozwiązać, tylko przy pomocy takich ilościów, gdy z nich ustępuje naostatek to co było niepodobnego. Ilości tego gatunku nazywają się, *ilościami zmyślonemi* (quantitas imaginaria).

I tak $\sqrt{(-a)}$, jest ilość zmyślona; $a \pm \sqrt{(-b)}$, jest także ilość zmyślona.

86. Na tém co dotąd powiedziało się dość będzie do rozwiązania równań drugiego stopnia, kiedy w równaniu ilość x niebędzie miała inzego stopnia tylko sam kwadrat. Lecz przytrafić się może, (iako w rzeczy samej trafia się bardzo często), że pierwszy stopień niewiadomej znajdywać się będzie rozmnożony albo rozdzielony przez iaką ilość niewiadomą, np. iako

iako w tém równaniu $x^2 - 4x = 12$. Natenczas cała sztuka w rozwiązaniu równania na tém zależy, żeby z pierwszej części zrobić kwadrat doskonały. Do wykonania zaś tego, trzeba trzech rzeczy: 1^o Ażeby wszystkie wyrazy zawierające w sobie x przestawić do iedney części, a wszystkie ilości wiadome do drugiej części, co odbywa się podług przepisu wyżej danego (53). 2^o Ażeby wyrządzący w sobie x^2 był ilością twierdzącą; zatem jeżeliby ten wyrządował się poprzedzony znakiem —, to w równaniu trzeba by wszystkie znaki przemienić, co nieznosi równości. 3^o Ażeby wyrządzący w sobie x^2 był od wszelkiego mnożnika iako też i od wszelkiego dzielnika oswobodzony; zawsze zaś można go do tego stanu przyprowadzić, rozmnożywszy wszystkie inne wyrazy równania przez takowego dzielnika, albo rozdzieliwszy przez mnożnika.

Np. gdybym miał zadane do rozwiązania to równanie, $4x - \frac{1}{2}x^2 = 4 - 2x$. 1^o Przetawiam wszystkie x do pierwszej części, położywszy na samym początku wyrząd x^2 , skąd wypada mi, $-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 2x = 4$, albo $-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 4$. 2^o Żeby zrobić x^2 ilością twierdzącą, przemieniam w równaniu wszystkie znaki, co mi da $\frac{1}{2}x^2 - 6x = -4$. 3^o Mnożę przez 5 całe równanie, i mam, $3x^2 - 30 = -20$; naostatek dzielę przez 3, wypada mi $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Po-

Ponieważ każde zrównanie drugiego stopnia, zawsze może być do tego stanu doprowadzone, więc to wszystko co teraz następować ma, rozumieć się powinno o zrównaniu już przygotowanem w taki sposób.

87. To założywszy, żeby rozwiązać zrównanie drugiego stopnia, trzeba zachować regnę następującą:

Weźmij połowę ilości wiadomej, która mnoży głoskę x w drugim wyrazie, tę połowę podnieś do kwadratu, i dodaj go do każdej części zrównania, coć w równości nie odmienni. Tym sposobem pierwszą część zrobi się doskonałym kwadratem. Wyciągnij z każdej części pierwiastek kwadratowy, położy przed drugą częścią dwódniki znak $\pm$; po tych działaniach zrównanie przemieni się w zrównanie pierwszego stopnia.

Co się zaś tycze wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego z pierwszjej części; trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z kwadratu niewiadomej, iako też pierwiastek kwadratowy z ilości dodanej; potem ten drugi wypadek trzeba przyłączyć do pierwszego z takim znakiem jaki miał drugi wyraz zrównania.

Np.

Np. mając to zrównanie, $x^2 + 6x = 16$; biorę połowę ilości wiadomej 6, która mnoży x w drugim wyrazie, podnoszę tę połowę do kwadratu, i kwadrat 9 dodawszy do każdej części, mam $x^2 + 6x + 9 = 16 + 9 = 25$; teraz nieozosta mi tylko wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, co wykonam biorąc pierwiastek kwadratowy głoski x^2 , którym jest x , iako też pierwiastek kwadratowy liczby 9, którym są 3; a ponieważ w zrównaniu wyżej położonem drugi wyraz $6x$, znajduie się być poprzedzony znakiem $+$, więc wnoszę stąd, że pierwiastkiem kwadratowym pierwszjej części jest ilość $x + 3$; drugiej zaś części pierwiastek kwadratowy będzie 5, albo raczjej (83) ± 5 ; a zatem będzie $x + 3 = \pm 5$. Zeby mieć samo x , nie trzeba tylko przedstawić 3 do drugiej części, co mi da $x = \pm 5 - 3$; skąd widzę że x ma dwie wartości, z których jedna daie $x = +5 - 3 = 2$, a druga, $x = -5 - 3 = -8$. Zobaczymy niżej co znaczy ta druga wartość.

Zeby pojąć przyczynę téj reguły, należy sobie przypomnieć co już było wyżej (25), to jest że kwadrat ilości złożony z dwóch wyrazów, zawiera w sobie kwadrat pierwszego wyrazu, podwójność pierwszego rozmnożonego przez drugi, i kwadrat drugiego wyrazu.

To założywszy, kiedy trzeba dodać do ilości iakię np. iak do téj $x^2 + 6x$, to co iey brak do kwadratu doskonałego, uważw należy ród. Ze ta ilość już zawiera w sobie kwadrat x^2 , który poczytać można za kwadrat pierwszego wyrazu ilości dwusłownej. 2^{re} Ze następujący drugi wyraz $6x$, zawsze da się uważać, iakoby był

Tom. II.

H

po-

podwójnością głoski x rozmnożoną przez inną ilość. 3^{cie} Ze ta inna ilość, musi być koniecznie połową mnożnika 6, mnożącego x . Zeby tedy zadana ilość była doskonałym kwadratem, niebrakuje ię więcej, tylko kwadratu zrobionego z połowy tego mnożnika, który mnoży x w drugim wyrazie. Jawną zaś jest, że to rozumowanie jest powszechnie, pomieniony mnożnik głoski x niech będzie jaki chce.

Co się tycze reguły podanej do wyciągnięcia oraz z pierwszey części kwadratowego pierwiastka, ta podobnież wynika z układu samego kwadratu; albowiem dwa kwadraty skrajne znajdujące się w kwadracie ilości dwusłowney, będąc kwadratami dwóch wyrazów pierwiastka, jawna jest, że nietrzeba tylko z każdego z osobna z tych dwóch wyrazów wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, żeby mieć te dwa wyrazy. Ale drugiemu wyrazowi pierwiastka trzeba dać tenże sam znak jaki miał drugi wyraz równania; bo iako rachunek pokazuje, że kwadratem ilości $a + b$ jest $a^2 + 2ab + b^2$, tak niemniej tenże rachunek przekonywa, że kwadratem ilości $a - b$ jest $a^2 - 2ab + b^2$.

Przystósowanie Reguły poprzedzających do rozwiązania niektórych zagadnień
dru.

drugiego stopnia.

88. Niechay ma być równanie iakiego chce stopnia, żeby dane zagadnienie ułożyć w równaniu, zawze trzeba użyć reguły wyżej podanej (60).

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Znaléżdź liczbę taką, ażby do ię kwadratu dodawszy 8 razy tę samę liczbę, summa uczyniła 33?

Gdybym miał wiadomą tę liczbę, którą tu nazywam x ; rzecz oczywista, że wziąwszy ię kwadrat to jest x^2 , do tego kwadratu dodałbym 8 razy tę liczbę to jest $8x$, a summa $x^2 + 8x$, uczyniłyby mi powinna 33; więc musi być $x^2 + 8x = 33$.

Mając rozwiązać to równanie, dodaję do każdej części liczbę 16, która jest kwadratem połowy liczby 8 mnożący x w drugim wyrazie, i mam $x^2 + 8x + 16 = 33 + 16 = 49$. Równanie, w którym pierwsza część już jest doskonałym kwadratem. Wyciągam z każdej części pierwiastek kwadratowy, zachowując regułę przepisaną (87), co mi daie $x + 4 = \pm 7$, a zatem $x = \pm 7 - 4$; skąd na x wypadają mi te dwie wartości, $x = +7 - 4 = 3$ i $x = -7 - 4 = -11$.

Z tych wartości pierwsza, rozwiązuje zagadnienie; bo 9 które jest kwadratem 3, będąc dodane do 8 razy 3, to jest do 24, czyni 33.

Co się tycze drugiey wartości, ta ponieważ jest przecząca, więc znaczy że jest drugie zagadnienie, w którym biorąc x w rozumieniu weale przeciwnym, na rozwiązanie tego drugiego zagadnienia wypadłoby 11; to jest że druga wartość rozwiązałaby następujące zagadnienie: *Znaléżdź liczbę taką, od której kwadratu odjęwszy 8 razy tę liczbę, reszta wynosiłaby 33?* iak jest w samy rzezy; bo kwadratem 11 stałby 121, a 8 razy 11 uczyni 88, które odjęwszy od 121, zostaje 33.

H 2

Dla

Dla potwierdzenia tego co się już wyżej powiedziało (62) o ilościach przeczących, uważmy, że ułożywszy równanie z tego drugiego zagadnienia, byłoby $x^2 - 8x = 33$; skąd według zwyczajnych reguł wyciągnąwszy wartość głoski x , miałbym $x = \pm 7 \pm 4$, co mi daie te dwie wartości, $x = 11$ i $x = -3$, to jest wartości wbrew przeciwnym wypadkom rozwiązującym pierwsze zagadnienie.

89. A stąd pokazuje się, że każde równanie drugiego stopnia z jedną niewiadomą, zawsze ma dwa rozwiązania.

Albowiem wartości 11 i -3 położone w równaniu $x^2 - 8x = 33$ zamiast x , zarówno obie rozwiążą to równanie, to jest że tak z pierwszą jak z drugą wartości wypada na pierwszą część 33. Widzieliśmy to już względem 11. Co zaś należy do -3 ; kwadratem tej liczby jest ± 9 ; a 8 razy -3 uczynią -24 , które odjęte od ± 9 dadzą $\pm 9 \pm 24$, według tego co w tej mierze przepisało się wyżej (11).

Lecz tu oraz pokazuje się, że lubo każde równanie drugiego stopnia ma dwojakie rozwiązanie, niezawsze atoli zagadnienie do tego równania prowadzące, da się rozwiązać oboma sposobami.

I tak w teraźniejszym przypadku, wartość -3 nierozwiązuje danego zagadnienia, ale jemu przeciwnie. Wreszcie częstokroć trafiać się zwykło, że obie wartości rozwiązane równania, rozwiązują oraz i zagadnienie. Zobaczmy to w trzecim zagadnieniu.

ZAGADNIENIE DRUGIE.

175 Złt. miały być rozdzielone między pewną liczbę osób, ale z nich dwie będąc nieprzytomne niepowinny należyć do podziału. Ta okoliczność pomna-

ża część każdego przytomnego o 10 złt; jest pytanie wiele więc było wszystkich osób i z nieprzytomnymi, co do tego podziału należyć miały?

Gdybym wiedział ich liczbę, rozdzieliłbym przez nią 175 złt: skądym dołzedł wielebny dostał każdy gdyby wszyscy byli przytomni. Potem rozdzieliłbym przez tę samą liczbę osób, zinnięzloną o dwa, i miałbym wiele prawdziwie dostało się każdemu dla nieprzytomności dwóch osób; naostatek od tego drugiego wielorazu odjąwszy 10, uważałbym, jeżeli reszta równa się pierwszemu wielorazowi. Odprawmy porządkiem te działania, oznaczwszy sobie przez x liczbę szukaną.

Gdyby więc wszyscy byli przytomni, każdy dostałby $\frac{175}{x}$, ale że brakuje dwóch osób, dla tego

przypadnie na każdego przytomnego $\frac{175}{x-2}$; a ponie-

waż ta ostatnia liczba ma przewyższać pierwszą liczbę o 10, więc musi być $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Zehy rozwiązać to równanie, ruguję na-przód mianowników i według daney uwagi (59) piszę, $175x - 10(x-2)x = 175x(x-2)$, co po odprawieniu wskazanych działań, da mi $175x - 10xx \pm 20x = 175x - 350$, albo $10xx - 20x = 350$, nakoniec rozdzieliwszy przez 10, będzie $xx - 2x = 35$. Równanie, do którego niepotrzeba tylko przystosować regułę wyżej podaną (87). Biorę więc ilość -1 , to jest połowę mnożnika -2 mnożąc go głoskę x . Tę połowę podnoszę do kwadratu, co mi daie ± 1 , ten kwadrat dodaję do każdej części, i mam $x^2 - 2x \pm 1 = 36$; a wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie $x - 1 = \pm 6$, a zatem $x = \pm 6 \pm 1$; skąd wypadają mi dwie wartości, to jest $x = 7$, i $x = -5$. Pierwsza z nich jest liczbą szukaną: bo 175 rozdzielone przez 7, da-

ią za wieloraz 25; tudzież, też 175 rozdzielone przez 7—2 albo przez 5, dają 35, które w rzeczy samej liczbę 25 przewyższają o 10. Druga zaś wartość rozwiązane zagadnienie wzięte w takim rozumieniu, gdyby potrzeba było rozdzielić 175 zł. przypuszczając do podziału dwie osoby nowo przybyłe; którato okoliczność zmniejszyłaby każdego część o 10 zł.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Pewny człek kupuje konia, którego po niezakim czasie sprzeda za 24 czerw. złt. W tój sprzedaży traci tyle na stu, ile go koń kosztował. Jest pytanie wiele go musiał kosztować?

Gdyby mi powiedziano wiele ten koń kosztował, sprawdziłbym tę liczbę w następujący sposób. Gdialbym ią od 100, a potem ułożyłbym tę regułę trzech: *Jeżeli 100, daje mi liczbę która wypada przez odcięcie, wiele mi da liczba szukana?* Znalazłszy czwarty wyraz, takowy powinien być równy liczbie 24.

Oznaczmy sobie przez x liczbę szukaną, to jest liczbę czerwonych złotych które koń kosztował. Natenczas, ponieważ 100 podług przypuszczenia zmniejsza się na $100 - x$, więc znaydę na iak wiele x powinno się zmniejszyć, ułożymy tę regułę trzech, $100 : 100 - x :: x ::$ skąd

wypada mi na czwarty wyraz $\frac{(100 - x)x}{100}$ (Arytm.

169), albo $\frac{100x - xx}{100}$; a że podług warunku zaga-

dnienia, cena kupionego konia zmniejszyła się na

24 czerw. złt. więc musi być $\frac{100x - xx}{100} = 24$.

Zeby rozwiązać to zagadnienie, regułę mianownika, i mam $100x - xx = 2400$, albo przemniwszy znaki $xx - 100x = -2400$. Biorę dalej (87) połowę ilości — 100 to jest — 50, podrośzę ią do kwadratu, i mam ± 2500 , które powinieniem do-

dać do każdej części. A tak zrównanie poprzedzające przemieni się w następujące, $xx - 100x \pm 2500 = 2500 - 2400 = 100$; z którego wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie $x - 50 = \pm 10$, a zatem $x = 50 \pm 10$; skąd na x wypadają te dwie wartości, to jest $x = 60$ i $x = 40$, i każda z nich rozwiązuje zagadnienie, tak że cena kupionego konia mogła zarówno wynosić 60 albo 40 czerw. złt.; bo wyrażenie zagadnienia nie jest dosyć dokładne, żeby z niego wnieść się mogło, która z tój dwoiakiéj ceny w rzeczy samej użyta była. Gdybyśmy chcieli sprawdzić te oba rozwiązania; zobaczylibyśmy, wzięwizy za cenę konia 60 czerw. złt., ponieważ w tym razie 100 zmniejszyła się na 40, że 60 zmniejszyłyby się na 24 czerw. złt.; w drugim razie ponieważ 100 zmniejszyła się na 60, 40 zmniejszyłyby się także na 24 czerw. złt.

90. W zagadnieniach poprzedzających, zrównania miały dwa rozwiązania, jedno twierdzące, drugie przeczące. Ostatnie zaś zagadnienie ma oba rozwiązania twierdzące; może także mieć czalem oba rozwiązania przeczące; ale to tylko w ten czas trafiać się zwykło, kiedy zagadnienie będzie błędnie wyrażone: i w takim przypadku każde z dwóch rozwiązań przeczących, znaczy (62), że niewiedoma powinna być wzięta nie w tém rozumieniu iak zagadnienie opiewa, ale w przeciwném.

Np. niech będzie dane to zagadnienie: *Wynaléżdź liczbę taką, do której kwadratu dodawszy 9 razy też samę liczbę i jeszcze nad to liczbę 50, ażby to wszystko uczyniło 30.*

Z tego zagadnienia ułożywszy równanie, będzie $x^2 + 9x + 50 = 30$, które podług reguł wyżej podanych przemieni się następnie, w $x^2 + 9x = -20$, $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$; a wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$; skąd wypadają na x dwie wartości, iakoto $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, i $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$; a że obie są ilościami przeczącymi, więc przez to dają mi znać, że dane zagadnienie trzeba przemienić w następujące: Znałeśdź liczbę taką, do której kwadratu dodawszy 50, a od téj summy odjęwszy téż liczbę 9 razy powiększoną, ażeby reszta została się 30.

91. Algebra tedy ma tę użyteczność, że nie tylko rozwiązuje zagadnienia, ale téż rozeznawa, jeżeli te zagadnienia są dobrze albo źle wyrażone; a gdyby były do rozwiązania niepodobne, to ona także pokaże to niepodobieństwo: widzieliśmy już wyżej (85) po czém go poznać.

Ktoby zechciał lepijéj przekonać się o tem w przykładzie, niech sobie tylko rozwiąże zagadnienie trzecie, położyszy w niem 26 czew: zł: zamiast 24. Podług tego przypuszczenia, wypadłoby takie równanie, $\frac{100x - xx}{100} = 26$, albo $100 - xx = 2600$, albo $xx - 100x = -2600$, które podług reguły (87) przemienia się w następujące, $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100$; wyciągnąwszy zaś pierwiastek kwadratowy, będzie $x - 50 = \pm \sqrt{(-100)}$, a naostatek $x = 50 \pm \sqrt{(-100)}$. Widzieliśmy zaś (85), że ilość przecząca niemoże mieć pierwiastka kwadratowego.

ZAGADNIENIE CZWARTE.

Dwie osoby przedsięwzięły z sobą spółny handel; jedna włożyła wń 30 luidorów, które zostawały w tym handlu przez 17 miesięcy; druga osoba dopiero

po

po wyszłych pięciu miesiącach data część swoją, to jest że część téj drugiey osoby nie robita w handlu tylko przez 12 miesięcy. Taż druga część jest nie wiadoma, to tylko wiadomo, że wzięta wraz z zarobkiem czyni 26 luidorów. Zarobek zaś cały wynosi 18½ luidorów. Jest pytanie wiele na tę składkę data druga osoba, i co każda z nich zarobiła.

Zagadnienie wychodzi na to, żeby znaleźć wielą data druga osoba; albowiem iawna jest, że potém łatwo będzie znaleźć zarobek każdej osoby. Oznaczmy sobie przez x , liczbę luidorów włożonych w ten handel od drugiey osoby. Ponieważ 30 luidorów pierwszey osoby przez 17 miesięcy w handlu robiły, więc powinny były zarobić iéy tyle, wieleby iéy zarobiły 17, razy 30, albo 510 luid: przez ieden miesiąc. Podobnież ponieważ przykładka drugiey osoby, zostawała w handlu przez 12 miesięcy, więc powinna iéy była tyle zarobić, coby iéy zarobiły 12 razy x luidorów, albo $12x$ przez ieden miesiąc; a tak tę spółkę uważać można iakby trwała tylko przez miesiąc, a składki iakby były pierwsze 510, a druga $12x$ luid:; To ułożywszy, żeby dōyśdź zarobku drugiey osoby, trzeba (Arytm. 187) wyrachować czwarty wyraz téj proporcji: $510 + 12x : 18\frac{1}{2} :: 12x :$

Takowy czwarty wyraz pokaże się bydź $\frac{12x \times 18\frac{1}{2}}{510 + 12x}$, co wychodzi na $\frac{225x}{510 + 12x}$; lecz iak wyrażenie zagadnienia opiewa, zarobek i przykładka drugiey osoby, czyni razem 26 luidorów, więc musi bydź $\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26$.

Zeby rozwiązać to równanie, rugnię naprzód mianownika, i mam $225x + x(510 + 12x) = 26(510 + 12x)$, albo odprawiwszy mnożenia wskazane, $225x + 510x + 12xx = 13260 + 312x$. Po przedstawieniu zaś i po zebraniu będzie, $12xx + 423x = 13260$

1326

13260; a rozdzielivszy przez 12, $x^2 + \frac{423}{12}x = \frac{13260}{12}$

co można zebrać na $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$; bież

dalej połowę ilości $\frac{141}{4}$, to jest $\frac{141}{8}$, i podnieś

do kwadratu, przyłączivszy do każdej części z

wnania, mam $x^2 + \frac{141}{4}x + \frac{19881}{64} = \frac{19881}{64} + 1105$

$= \frac{90601}{64}$. A wyciągnivszy pierwiastek kwadra

wy, będzie $x + \frac{141}{8} = \pm \sqrt{\frac{90601}{64}} = \pm \frac{301}{8}$

więc $x = -\frac{141}{8} \pm \frac{301}{8}$; skąd wypada na jedną

wartościów która tylko sama rozwiązuje zagadnie

nie, $x = \frac{-141 + 301}{8} = \frac{160}{8} = 20$. Druga obo

tedy dała na spółkę 20 ludorów, a zatem zarobek

ie, wynosi 6, a zarobek pierwizy osoby wynosi

12 $\frac{3}{4}$ ludorów.

92. Co się tycze zrównań literal

nych, reguła do nich służyć będzie zgo

ła taż sama.

Np. gdyby było dane do rozwiązania to

zrównanie, $abx - ax^2 = b^2c$; podług tego co już

wyżey powiedziało się (86 i 87), odmienniam po

przedzaiące zrównanie, na $axx - abx = -b^2c$, a po

tém, na $xx - bx = -\frac{b^2c}{a}$; do każdej części zro

wnania dodaję kwadrat ilości $-\frac{b}{2}$, to jest $+\frac{bb}{4}$, i

mam

mam $xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$, a po wyciągnięciu

pierwiastka kwadratowego, $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$;

a naostatek $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$.

93. Zrównanie literalne może czę

stokroć przytrafić się wyrażone w posta

ci, na pozór barziży poskładaney, ani

żeli nam dotąd zdarzało się widzieć, ale

zawżę można go zebrać tylko na trzy

wyrazy w następujący sposób.

Np. niech będzie dane to zrównanie, $ax^2 +$

$bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$. Przetawiam wży

stkie wyrazy zawieraiące w sobie x , do iedney czę

ści, tak ażeby iednakowe stopnie głoski x zaraz po

sobie i porządkiem następowały, co mi daie ax^2

$- bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Teraz uważam, że

$ax^2 - bx^2$ nieieft co innego, tylko $(a-b) \times x^2$ al

bo $(a-b)x^2$, podobnież $bcx + acx$ nieieft co inne

go, tylko $(ac + bc)x$, tak iż zrównanie $ax^2 - bx^2$

$+ bcx + acx = a^2b - ab^2$ można napisać w takię

postaci, $(a-b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$; gdzie

poieważ głoski a, b, c , wyrażaią ilości wiadome,

przeto téż i ilości $a-b$, $bc + ac$, i $a^2b - ab^2$ można

porczytać wszystkie za ilości wiadome. więc dla skró

cenia, można każdą z tych ilościów onaczyć tylko

przez iedną głoskę, tak iż zrobiwży $a-b = m$,

$bc + ac = n$, $a^2b - ab^2 = p$, zrównanie przemieni się,

na $mx^2 + nx = p$, które oczywście należy do przy

padków wyżey opifanych, i które będąc rozwią

zane podług tychże samych reguł, da następnie x^2

$+ \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$, potem $x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$

(do

(dodawszy do obu części kwadrat połowy ilości $\frac{n}{m}$, to jest kwadrat ilości $\frac{n}{2m}$); wyciągnawszy

pierwiastek kwadratowy będzie, $x \pm \frac{n}{2m} = \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$; a naostatek $x = \frac{-n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$

94. Lecz takowego przekształcenia pospolite nieużywa się tylko w ten czas, kiedy bez niego rachunek wypadłby nazbyt zawikłany; albowiem i w teraźniejszym przykładzie, napisawszy równanie w tej postaci $(a-b)x^2 + (bc+ac)x = a^2b - ab^2$ można bez wielkiej trudności obéyśdż się z nim iak z poprzedzającemi, naprzód dzieląc przez $a-b$ skądby wypadło $x^2 + \frac{bc+ac}{a-b}x = \frac{a^2b - ab^2}{a-b}$; a po

tém dodając do obu części równania kwadrat połowy ilości $\frac{bc+ac}{2a-2b}$, to jest kwadrat ilości $\frac{bc+ac}{2a-2b}$;

lecz można przebrać tylko na samém onego wykładniku, w ten sposób $\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2$; co mi da $x^2 +$

$\frac{bc+ac}{a-b}x + \left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 = \left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a-b}$;

wyciągnawszy zaś pierwiastek kwadratowy, będzie $x + \frac{bc+ac}{2a-2b} = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a-b}\right]}$;

a naostatek $x = \frac{-bc-ac}{2a-2b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a-b}\right]}$.

O podnoszeniu do różnych stopniów ilościów iednosłownych, o wyciąganiu z nich pierwiastków, i o rachunkach ilościów poprzędzonych znakami pierwiastkowemi, iako téż i o tych co mają wykładniki.

95. Już wyżey powiedzieliśmy że stopniem ilości iakiéykolwiek, nazywa się mnożość z téy ilości, wielokrotnie rozmnożony przez siebie samę róz raz; a^3 jest trzecim stopniem albo sześcianem ilości a ; ponieważ a^3 powstaie z $a \times a \times a$. Ilość rozmnożona, znajduie się bydż w stopniu podniesienia swego, tyle razy czynnikiem, ile zawiera w sobie iednościów wykładnik tégoż stopnia.

I tak w a^5 , a jest czynnikiem 5 razy; w ilości $(a+b)^6$, $a+b$ jest czynnikiem 6 razy.

96. Ponieważ do rozmnożenia ilościów literalnych iednosłownych, mających wykładniki, dosyć jest (20) dodać wykładnika każdéy głoski mnożnego do wykładnika podobnéyże głoski mnożnika, więc idzie zatém, że ażeby ilość iakąkolwiek iednosłowną podnieść do stopnia zadanego, nietrzeba więcéy, tylko rozmnożyć wykładnika położonego przy każdéy głosce téy ilości, przez liczbę wyrażającą do iakiego stopnia ma bydż podniesiona zadana ilość

ilość. Takową liczbę my tu nazywamy *wykładnikiem stopnia*.

I tak mając podnieść do czwartego stopnia ilość a^2b^3c , napiszę $a^8b^{12}c^4$, mnożąc wykładnik 2. 3 i 1 głośkę a, b, c , przez wykładnik tego stopnia do którego miała być podniesiona zadana ilość to jest przez 4. Jakóż ażeby zwyczajnym sposobem podnieść do czwartego stopnia ilość a^2b^3c , trzeba by rozmnożyć a^2b^3c przez a^2b^3c , a mogąc z tego rozmnożenia wynikającą znowu przez a^2b^3c , nakoniec tę drugą mnogość jeszcze raz przez a^2b^3c , lecz żeby odbyć takowe mnożenia, trzeba dodać wykładniki (20); które ponieważ są też same w każdym czynniku, więc trzeba dodać każdego wykładnika tegoż wykładnika 3 razy, to jest rozmnożyć go przez 4. Rozumowanie zawsze służyć będzie toż samemu chociażby potrzeba było do iakiegokolwiek innego stopnia podnieść ilość jednoślowną, i chociażby wykładniki téj ilości jednoślownej trafiły się wcale inakże.

Kiedy o wykładnikach ilościów mają zachodzić iakie rozumowania, albo też iakie działania z niemi, któreby niezawisły od pewnych szczególnych wartościów tychże wykładników, ale które i owszem byłyby stosowne do wszelkich wykładników, natenczas takowe wykładniki oznaczają się przez głośki.

I tak żebyśmy to przystosowali do reguły podanej dopiero wyżej, gdyby potrzeba było podnieść do stopnia iakiegokolwiek r , ilość iakąkolwiek $ambncp$, napisałbym $amrbrncpr$.

97. Gdyby ilość która ma być podniesiona do stopnia zadanego, była ułamkiem

kiem, trzeba by podnieść do takowego stopnia tak licznika iako też i mianownika.

I tak $\frac{a^2b^3}{cd^2}$ podniesione do piątego stopnia uczyni $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$; podobnież $\frac{ambn}{cpdq}$ podniesione do stopnia r , da $\frac{amrbrncpr}{cp^rdqr}$.

98. Gdyby ilość miała spółczynnika, trzeba by także tego spółczynnika podnieść do stopnia zadanego, mnożąc go samego przez się podług reguły Arytmetycznych.

I tak $4a^3b^2$ podniesione do piątego stopnia, dałoby $1024a^{15}b^{10}$.

Częstokroć, zwłaszcza w głośkach, przedstawiać się zwykło tylko na samem wskazaniu takowego podniesienia.

I tak w poprzedzającym przykładzie, można by napisać $4^5a^{15}b^{10}$.

99. Co zaś należy do znaków, jeżeli wykładnik tego stopnia do którego ilość iakowa ma być podniesiona jest parzysty, wypadek zawsze mieć będzie znak $+$; ale jeżeli jest nieparzysty, to wypadek może mieć znak $+$ albo $-$, podług tego gdy sama zadana ilość ma znak $+$ albo $-$; jest to wniosek beśrzeczny z reguły wyżej przepisanej do znaków (24).

100. Z tego wszystkiego co dotychczas powiedziało się, następuje, że w każdym iakimkolwiek stopniu ilości, wykładnik przy każdej głosce położony, zawiera w sobie wykładnik swego pierwiastka tej samej ilości, ile jest jednościów w wykładniku stopnia który się uważa.

Np. w czwartym stopniu wykładnik każdej głoski jest czworokrotny względem ilości początkowej, która była jego pierwiastkiem.

101. Więc ażeby od iakiegokolwiek stopnia powrócić nazad do iakiego pierwiastka, to jest ażeby wyciągnąć pierwiastek stopnia zadanego z iakięmkolwiek ilości jednostownej, trzeba rozdzielić wykładnik położonego przy każdej głosce, przez liczbę oznaczającą stopień pierwiastka i tak ma być wyciągnięty. Takowa liczba znówu nazywa się wykładnikiem pierwiastka.

I tak ażeby wyciągnąć trzeci albo sześcienny pierwiastek z ilości $a^{12}b^6c^3$; dzielę każdego z wykładników przez 3, i mam a^4b^2c . Podobnie, żeby wyciągnąć piąty pierwiastek z ilości $a^{20}b^{15}c^5$; dzielę każdego z wykładników przez 5, i mam a^4b^3c . W powszechności, ażeby wyciągnąć

stopnia r , z ilości $a^m b^n$, napiszę $a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$

102. Co się tycze znaku pierwiastka ten zarówno może być $+$ albo $-$, jeżeli stopień pierwiastka będzie parzysty; ale

kie-

Kiedy stopień pierwiastka jest nieparzysty, to pierwiastkowi daie się taki znak, iaką miała sama ilość.

I tak pierwiastek czwarty ilości $a^{12}b^8$ jest a^3b^2 ; piątym zaś pierwiastkiem ilości — a^5b^{10} będzie — ab^2 .

103. Gdyby ilość zadana była ułamkiem, natenczas trzebaby wyciągnąć osobny pierwiastek tak z licznika iak z mianownika.

104. Jeżeliby znajdowały się spójczynniki, trzebaby z nich wyciągnąć pierwiastki kwadratowe albo sześcienne sposobami w Arytmetyce przepisanemi; gdyby zaś zdarzył się do wyciągnięcia pierwiastek wyższego stopnia, to będzie można wyciągnąć go podług reguł, o których niżej.

105. Kiedy wykładnik pierwiastka zadanego do wyciągnięcia, niedzieli się pełną każdego z wykładników ilości daney, to będzie dowodem że takowa ilość nie jest stopniem doskonałym o który rzecz idzie. W takim przypadku wykładnik zostaje ułamkowy, i oznacza stopień iaki zostaje do wyciągnięcia.

I tak gdyby potrzeba było wyciągnąć pierwiastek sześcienny z ilości $a^9b^3c^4$, miałbym $a^3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}$ albo $a^3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}$; gdzie wykładnik $\frac{1}{2}$ pokazuje mi że z głoski c jeszcze zostaje do wyciągnięcia pierwiastek sześcienny.

106. Wyciągnięcie pierwiastków wyższych drugi stopień, zwykło się także wykazywać przez znak $\sqrt{}$; ale między ramionami tego znaku, umieszczają się liczba oznaczająca stopień pierwiastka o który rzecz idzie.

I tak $\sqrt[3]{a}$, znaczy pierwiastek sześcienny z a ; $\sqrt[4]{a}$, znaczy pierwiastek siódmy téżę ilości a . A zatem te dwa wyrażenia $\sqrt[3]{a}$ i $a^{\frac{1}{3}}$ mają jednakowe znaczenie; toż rozumie się o tych dwu wyrażeniach $\sqrt[4]{a^4}$ i $a^{\frac{4}{4}}$.

107. Uwaga wyżej położona (105) może służyć do przemiany w prostiejsze wyrażenie ilościów poprzedzonych znakiem $\sqrt{}$.

Np. gdyby było zadano $\sqrt[3]{a^4 b^5}$; ponieważ ta ilość to samo znaczy co $a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{5}{3}}$ albo $a a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$ i wychodzi na $ab \sqrt[3]{ab^2}$ (105); więc mieć będzie $\sqrt[3]{a^4 b^5} = ab \sqrt[3]{ab^2}$.

Podobnie będzie $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a \frac{a^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a \sqrt{\frac{a}{f}}$ albo téż rozmnożywszy licznika i mianownika przez $\sqrt{f}$, $\sqrt{f} \sqrt{\frac{a^3}{f}} = \sqrt{\frac{a^3 f}{f^2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} f^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{2}{2}}} = \frac{a}{f} a^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{f} \sqrt{af}$.

108. Gdyby znajdował się spółczynnik, trzeba by starać się rozłożyć go na czynniki, z których wynikająca mnożość

gość byłaby doskonałym stopniem tego porządku iaki ma być pierwiastek wyciągnięty, albo téż wielokrotnością tego stopnia, wreszcie trzeba by postąpić sobie iak w przykładach poprzedzających.

Np. gdyby było zadano $\sqrt[3]{48a^2 b^3}$, możnaby to przemienić na $\sqrt[3]{3 \times 16a^2 b^3}$, albo na $\sqrt[3]{3 \times 4^2 a^2 b^3}$, co wychodzi na $4ab \sqrt[3]{3b}$. Podobnie $\sqrt[3]{81 a^5 b^4} = \sqrt[3]{3 \times 27 a^5 b^4} = 3ab \sqrt[3]{3 a^2 b}$.

109. Kiedy ilość jest wielostopna, niema potrzeby dzielić każdego z wykładników; ale należy uważać całość wszystkich części iakoby nie składały tylko jednej ilości, której wykładnikiem naturalnie będzie 1, i ta dzieli się przez wykładnika pierwiastka, iaki ma być wyciągnięty; właściwie mówiąc jest to tylko wskazanie tego pierwiastka.

Np. zamiast $\sqrt[4]{a^2 + b^2}$ co na jedno wychodzi iak $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^1}$, pisze się $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}}$ albo $\overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{4}}$.

Gdyby cała ilość okryta znakiem pierwiastkowym już miała wykładnika, takowego wykładnika podobnie rozdzieliłoby trzeba przez wykładnika pierwiastka iaki ma być wyciągnięty.

I tak zamiast $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}$, napisać można $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}$.

110. Dodawanie i odęymowanie ilości pierwiastkowych wychodzi na to, ażeby je tylko połączyć iedne z drugimi przez znaki należące do tych działań, jeżeli są pominione ilości sobie niepodobne albo też ażeby dodać lub odjąć ich spólnych czynników iak się robi w zwyczajném dodawaniu i odęymowaniu, jeżeli ilości będą sobie podobne.

I tak żeby dodać $\sqrt[3]{a}$ do $\sqrt[4]{b}$; pisze się $\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}$.
 Zeby odjąć $\sqrt[3]{a}$ od $\sqrt[4]{b}$, pisze się $\sqrt[4]{b} - \sqrt[3]{a}$.

111. Zeby rozmnożyć albo rozdzielić ilości pierwiastkowe iednakowego stopnia, trzeba odprawić działanie tak iak gdyby niebyło znaku pierwiastkowego, a potem wypadłszy mnogości albo wielorazowi dać spólny znak pierwiastkowy.

I tak $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a \sqrt[7]{a}$.
 $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{a^3 b^2} = ab$; $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^4 b}$.

Podobnież $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{b} = \sqrt{(-ab)}$; $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{(-a \times -b)} = -\sqrt{ab}$.

Ten ostatni przykład potrzebuie wytłómaczenia: zdawałoby się że ponieważ $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)}$ podług reguły dać powinno $\sqrt{(-a \times -b)}$, a zatem $\sqrt{(+ab)}$ albo $\sqrt{ab}$, iako też ponieważ każdy znak pierwiastkowy

wiaſtkowy parzyſty (102) może zawsze mieć dwa znaki, to ieſt $\pm$, zdawałoby się mówię że w oſtatnim przykłaſcie powinno było wynikać $\pm \sqrt{ab}$; ale uważać trzeba że $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-1)}$, a $\sqrt{(-b)} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{(-1)}$, więc $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{(-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{ab}$. W ninieyſzym zaś razie, ilości $\sqrt{(-1)^2}$ niemożna dać podług upodobania znaku dwoiakiego $\pm$, bo przytomność znaku — w wyrazie $\sqrt{(-1)^2}$, pokazuje przez iakie działania przyſzło się do kwadratu $(-1)^2$, z którego ma być wyciągniony pierwiastek.

112. Zeby rozdzielić $\sqrt[7]{a^5}$ przez $\sqrt[7]{a^3}$, trzeba rozdzielić a^5 przez a^3 i wielorazowi a^2 dać znak $\sqrt[7]{}$, ikaż wypadnie $\sqrt[7]{a^2}$.

Podobnież będzie $\frac{\sqrt[5]{a^4 b^3}}{\sqrt[5]{a^2 b}} = \sqrt[5]{\frac{a^4 b^3}{a^2 b}} = \sqrt[5]{a^2 b^2}$;

$\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2}$; $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$.

$\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$; albowiem piąty pierwiastek iedności

ieſt 1. W powszechności wſzelki ſtopień i wſzelki pierwiastek iedności, ieſt zawsze iedność.

113. Zeby ilość iakąkolwiek położoną pod znakiem pierwiastkowym podnieść do stopnia, którego by wykładnik był ten, że sam co wykładnik pierwiastka, nie trzeba więcéy tylko odrzucić znak pierwiastkowy; i tak $\sqrt[5]{a} = a$; co iest rzeczą oczywistą mówiąc w powszechności, i uważając że w tym razie nie co innego przedsięwzięć się, tylko żeby przyprowadzić ilość do swego pierwszego stanu.

Zeby iakąkolwiek ilość pierwiastkową jednoślowną, podnieść do stopnia iakiegokolwiek, trzeba podnieść każdego z iéy wykładników do tegoż stopnia według reguły danéy (96).

I tak $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ podniesione do czwartego stopnia, dadzą $\sqrt[7]{a^8 b^{12}}$, co wychodzi na $ab \sqrt[7]{ab^5}$. Taż ilość $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ podług (106) da się ieszcze tak wyrazić $a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}$, to zaś wyrażenie chcąc podnieść do czwartego stopnia, mnożę wykładników przez 4, co mi da $a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} = ab^{\frac{5}{7}} \sqrt[7]{ab^5}$.

114. Zeby wyciągnąć pierwiastek iakąkolwiek z ilości pierwiastkowej, trzeba rozmnożyć wykładnika pierwiastka danego, przez wykładnika tego nowego pierwiastka.

I tak mając wyciągnąć trzeci pierwiastek z ilości $\sqrt[5]{a^4}$, napiszę $\sqrt[15]{a^4}$, rozmnożywszy 5 przez 3.

Jakóż $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$; żeby zaś z téy ilości wyciągnąć pierwiastek, trzeba rozdzielić iéy wykładnika przez 3 (101), co mi da $a^{\frac{1}{3}}$, które toż samo znaczą co $\sqrt[3]{a}$.

115. Kiedy ilości pierwiastkowe zadane, nie są wżyskie jednakowego stopnia, żeby z niém można było odbyć działania mnożenia i dzielenia, trzeba je wprzód przyprowadzić do jednakowego stopnia, co łatwo da się wykonać przy pomocy reguły następującéy.

Jeżeli będą zadane dwie ilości pierwiastkowe; rozmnoż wykładnika iednéy przez wykładnika drugiéy, wynikająca stąd mnogość będzie spólnym wykładnikiem obu ilościów pierwiastkowych; podnieś oraz ilość położoną pod każdym znakiem pierwiastkowym do stopnia oznaczonego przez wykładnika drugiéy ilości pierwiastkowej.

Np. chcąc przyprowadzić do jednakowego znaku pierwiastkowego dwie ilości $\sqrt[3]{a^3}$ i $\sqrt[7]{a^4}$, mnożę 5 przez 7, i mam na wykładnika nowego pierwiastka 35, co mi da $\sqrt[35]{a^3}$; podnoszę a^3 do siódmego stopnia a a^4 do piątego, skąd wypada mi a^{21} i a^{20} ; tak że ilości zadane odmiéniają się w następujące $\sqrt[35]{a^{21}}$ i $\sqrt[35]{a^{20}}$.

Jeżeli zaś znaydować się będzie więcéy iak dwie ilości pierwiastkowych, rozmnoż między sobą wykładniki wżyskich

ilości pierwiastkowych, mnogość z nich będzie wykładnikiem wspólnym. Podnieś oraz ilość położoną pod każdym znakiem pierwiastkowym do stopnia oznaczonego przez mnogość z wszystkich wykładników oprócz tego o który rzecz idzie.

Np. mając te trzy ilości pierwiastkowe $\sqrt[7]{a^2}$, $\sqrt[8]{a^7}$; mnożę jeden przez drugi trzech wykładników 5, 7 i 8, co mi da 280 na wspólnego nowego wykładnika; podnoszę a^3 do stopnia 7×8 albo 56, a^2 do stopnia 5×8 albo 40, i a^7 do stopnia 5×7 albo 35, i mieć będę $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

Przyczyna tej reguły łatwo dać się pojąć, uważając co do pierwszego przykładu, że podnosząc (podług reguły) a^3 do siódmego stopnia, przez to a staie się czynnikiem 7 razy tyle, ile razy już było czynnikiem; ale czyniąc wykładnika pierwiastkowego 7 razy tak wielkim iak był, a staie się przez to 7 razy mnieyszą liczbę czynnikiem; więc nadgradza się jedno drugiem, i nieczyni się odmiana tylko w postaci.

116. Z tego rozumowania wnieść sobie można, że kiedy wykładnik ilości położony pod znakiem pierwiastkowym i wykładnik znaku pierwiastkowego mają wspólnego dzielnika, ilość zadana zawsze może być przyprowadzona do prościęjsze-

szego wyrażenia, rozdzieliwszy przez takowego wspólnego dzielnika obu pomienionych wykładników.

Np. $\sqrt[12]{a^8}$ da się przemienić na $\sqrt[3]{a^2}$, rozdzieliwszy tak rz iak 8 przez 4. Podobnież $\sqrt[4]{a^2}$ przemienia się na $\sqrt{a}$; iako też $\sqrt[6]{a^3}$ na $\sqrt{a}$.

117. Wnieśmy sobie tedy ieszcze stąd, że kiedy wykładnik pierwiastka który ma być wyciągniony, iest liczbą składającą się z dwóch lub więcéy innych liczb, można odbyć wyciągnięcie pierwiastka nie o ieden raz, ale następnie w ten sposób:

Daymy że z ilości a^{24} potrzeba wyciągnąć szósty pierwiastek; mogą tedy naprzód wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, a potem znowu sześcienny, i tak mieć będę wyciągniony pierwiastek szósty. Jakoż $\sqrt[6]{a^{24}}$ da przemienić się (116) na $\sqrt[3]{a^4}$, a ta ilość znowu na $\sqrt[4]{a^4}$ albo a , co na jedno wychodzi, iak gdyby się był zaraz prosto wyciągnął pierwiastek szósty z ilości a^{24} , dzieląc wykładnika 24 przez 6 (101).

Wreszcie, ponieważ wykładniki ułamkowe zastępują miéysce znaków pierwiastkowych, i że pierwsze są wygodniéysze do rachowania iak drugie, przeto ieszcze zastanowimy się cokolwiek nad rachunkami wykładników.

Gdybym miał $\sqrt[5]{a^3}$ rozmnożyć przez $\sqrt[5]{a^4}$, to działanie odmiénibym w następujące $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, skąd mam

mam $(20)^{\frac{2}{3}}$ albo $aa^{\frac{2}{3}}$; co wychodzi na $a^{\frac{2}{3}}$. Gdybym miał $\sqrt[5]{a^3}$ rozmnożyć przez $\sqrt[7]{a^4}$, napiszę $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$ albo $a^{\frac{21}{35} + \frac{20}{35}}$ albo (przywiódłszy oba ułamki do wspólnego mianownika), $a^{\frac{21+20}{35}}$, albo $a^{\frac{41}{35}}$, co wychodzi na $aa^{\frac{6}{35}}$, albo naostatek $a^{\frac{41}{35}}$.

W powszechności, $\sqrt[n]{a^m b^p} \times \sqrt[r]{a^r b^s}$, przemienia się na $a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{p}{n}} \times a^{\frac{r}{r}} b^{\frac{s}{r}}$, i znowu na $a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{r}} b^{\frac{p}{n} + \frac{s}{r}}$ albo (przywiódłszy ułamki do wspólnego mianownika) $\frac{qn + mr}{mq} b^{\frac{pq + ms}{mq}}$, albo naostatek (105) $\sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$. — Toż samo rozumieć trzeba o dzieleniu; $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ przemienia się na $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}}$ (31), albo naostatek $\sqrt[5]{a}$. Podobnież $\frac{\sqrt[5]{a^3 a^4}}{\sqrt[5]{a^2 b^3}}$ przemienia się

na $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}} b^{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{5}}$ albo (przywiódłszy ułamki do wspólnego mianownika) $a^{\frac{21-10}{35}} b^{\frac{28-15}{35}}$, co wychodzi na $a^{\frac{11}{35}} b^{\frac{13}{35}}$, albo naostatek na $\sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$.

W powszechności $\frac{\sqrt[n]{a^m b^p}}{\sqrt[r]{a^r b^s}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{r}} b^{\frac{p}{n} - \frac{s}{r}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{r}} b^{\frac{p}{n} - \frac{s}{r}}$ albo (przywiódłszy ułamki do wspólnego mianownika) $\frac{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}{b^{mq}} = \sqrt[qm]{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}$.

118. W ostatnim przykładzie odieśliśmy wykładnika należącego do każdej głoski mianownika, od wykładnika odpowiadającej głoski w liczniku. Reguła podana wyżej do dzielenia (31), niezdaje się tego pozwalać tylko w ten czas, kiedy wykładnik mianownika jest mniejszy jak wykładnik licznika; atoli mówiąc w powszechności można to zawsze uczynić, byleby zbytkowi dać znak — po wykonanem zebraniu; tak iż w powszechności każdy ułamek Algebraiczny da się wyrazić w postaci ilości całej.

Np. zamiast $\frac{a^3}{b^2}$, można napisać $a^3 b^{-2}$. Jakóż podług tego pojęcia które już wyżej powzieliśmy o dzieleniu, skutek dzielnika powinien być ten, ażeby z dzielnego wyrugować wszystkich czynników znajdujących się w dzielniku; w ilości $\frac{a^5}{a^2}$ która przemienia się na a^3 , dzielnik a^2 ruguje z ilości a^5 dwóch czynników równających się ilości a . Podobnież w ilości $\frac{a^3}{b^2}$, skutkiem ilości b^2 powinno być, żeby z a^3 wyrugować dwóch czynników równających się ilości b . A lubo w nię te czynniki nieznaydują się iawnie, jednakże można ich sobie zawsze w myśli wystawić: albowiem daje się to pojąć, że a zawiera w sobie b pewną liczbę razy, bądźto całą bądź ułamkową; niechay będzie m tą liczbą razy; na ten czas a będzie war-
to m razy b albo mb ; ilość tedy $\frac{a^3}{b^2}$ odmięni się
w

w tę $\frac{m^3 b^3}{b^2}$, która wychodzi na $m^3 b$; lecz w takim przypadku ilość $a^3 b^{-2}$ może być wyrażona przez $m^3 b^3 b^{-2}$, albo (20) $m^3 b^{3-2}$, to jest przez $m^3 b$; więc $\frac{a^3}{b^2}$ jest iedno co $a^3 b^{-2}$.

Więc w powfzechności, można przestawić wszelką ilość z mianownika do licznika, napisaawszy ją w liczniku iakoby czynnika i daweszy wykładnikowi ięj znak przeciwny temu iaki miała w mianowniku.

I tak zamiast $\frac{1}{a^3}$ można napisać $1 \times a^{-3}$, albo prosto a^{-3} ; zamiast $\frac{1}{a^m}$ można napisać a^{-m} ; zamiast $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ można napisać $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. Zamiast $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$ można napisać $(a^3 + b^3) \times (a^2 + b^2)^{-1}$; iako téż mając wzgląd na to wszystko co poprzedziło, zamiast $\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}}$ można napisać $\frac{(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}}$ albo naostatek $(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

119. I odwrotnie, kiedy ilość iakowa składać się będzie z wyrazów mających wykładniki przeczące, takowe wyrazy zawsze można przestawić do mianownika, przemieniaeszy wykładniki na wykładniki twierdzące.

I tak zamiast $a^3 b^{-4}$ można napisać $\frac{a^3}{b^4}$; zamiast $a^m b^{-3}$ co wychodzi na iedno iak $a^m \times a^{-3}$, można napisać $\frac{a^m}{a^3}$, to rozumieć trzeba o innych tym podobnych przypadkach.

O podnoszeniu do różnych stopniów ilościów wielostownych, i wyciąganiu z nich pierwiastków.

120. **P**odług tego wyobrażenia które już powzieliśmy o stopniach, do iakich ilości bywają podnoszone, żeby iakakolwiek ilość wielostowną podnieść do stopnia zadanego, nieotrzeba więcej tylko takową ilość rozmnożyć samę przez się tyle razy mniej iednym razem, ile znayduie się iednościów w wykładniku tego stopnia: lecz przestając iedynie na tym sposobie, częstokroć wpadłoby się w rachunki nazbyt długie dla znalezienia wypadków, które można mieć daleko prędzej, zastanowiwszy się cokolwiek nad własnościami ilościów wynikających z niektórych takowych mnożeń.

My tu zabawimy się naprzód nad stopniami ilościów dwustownych, bo te pokażą nam drogę do obéyscia się z ilościami zawierającymi w sobie większą liczbę

czbę wyrazów; lecz żebyśmy lepiej do wyrozumienia podali to wszystko co ma nastąpić, musimy nieco wyżej zająć: rozbierzemy tedy własności mnożących wynikających z następnego mnożenia czynników dwusłownych, któreby miały wszystkie jeden wyraz spółny; a ten rozbiór nie tylko doprowadzi nas prosto do naszego celu, ale też wskazuje różne podania, które nam w dalszym przeciągu będą bardzo użytecznemi.

121. Niechay będzie zadano $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, i. t. d. kilka ilości dwusłownych, które wszystkie miałyby spółny wyraz x , i które trzeba by rozmnożyć iedne przez drugie.

Mnożąc	-	-	$x + a$
	przez	-	$x + b$
będzie	-	-	$x^2 + ax + ab$
Tę mnogosc mnożąc znowu przez $x + c$			
			$x^3 + ax^2 + abx + abc$
			$+ bx^2 + acx$
			$+ cx^2 + bcx$
Tę drugą mnogosc mnożąc dalej przez $x + d$, będzie			
			$x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd$
			$+ bx^3 + acx^2 + abdx$
			$+ cx^3 + adx^2 + acdx$
			$+ dx^3 + bcdx^2 + bcdx$
			$+ bcdx^2$
			$+ cdx^2$

MATEMATYKI. 141

i tak dalej; skład wynikają następujące uwagi, biorąc za ieden wyraz to wszystko co znajduje się położono w tejże kolumnie.

1^{od} Ze pierwszym wyrazem każdej mnogości, jest zawsze pierwszy wyraz x każdej ilości dwusłownej, podniesiony do stopnia oznaczonego przez liczbę tychże ilości dwusłownych; tak że gdyby liczba ich była m , pierwszym wyrazem mnogości byłoby x^m .

2^{re} Ze począwszy od pierwszego wyrazu, następujące stopnie ilości x , coraz niższą się o iedną iedność, aż do ostatniego wyrazu, w którym już x znaydować się niebędzie.

3^{cie} Ze mnożnikiem każdego stopnia ilości x , (które odtąd nazywać będziemy mnożnikiem tego wyrazu gdzie się znaydują takowe stopnie) będzie w drugim wyrazie, summa drugich wyrazów ilości dwusłownych a, b, c, d , i. t. d; w trzecim wyrazie, summa mnogości z tychże ilości a, b, c , i. t. d. rozmnożonych między sobą dwie a dwie; w czwartym wyrazie summa mnogości z tychże ilości a, b, c , i. t. d. rozmnożonych między sobą trzy a trzy; i tak dalej aż do ostatniego wyrazu, który będzie mnogością

ścią wynikającą z tych wszystkich ilości. Te wnioski są oczywiste, licząc wyrazów mnożonych $x + a, x + b, x + c, \dots$ niech będzie iaka chce.

122. Teraz przypuściwszy że wszystkie ilości $a, b, c, \dots$ są równe, w którymto przypadku wszystkie ilości dwusłowne rozmnożone będą także między sobą równe; to mówię przypuściwszy mnogości wyżej wynalezione, będą kołymi stopniami którejkolwiek z tych ilości dwusłownych, np. ilości $x + a$, jeżeli każda z ilości $b, c, d, \dots$ równa się ilości a . Jeżeli tedy w tych mnogościach zamast każdą z głosek $b, c, d, \dots$ położymy a , mieć będziemy następujące wypadki na wartości stopniów; które tu znajdują się wskazane na boku.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$$

Gdzie łatwo można widzieć że jeżeli m jest wykładnikiem stopnia, do którego ma być podniesiona ilość dwusłowna, stopnie następne głoski x byłyby wyrażone przez $x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, \dots$ i. t. d.

Lecz nietak widocznie daie się dostrzedz, iakim sposobem współczynniki różnych

żnych wyrazów każdego stopnia pochodzą iedne z drugich, tudzież że zawisły od wykładnika m , iak zobaczymy niżej.

123. Zeby wynaléśdź regułę do składania sobie tych współczynników, musimy powrócić do naszych pierwszych mnogości i uważać, że ponieważ mnożnikiem drugiego wyrazu jest summa wszystkich ilości $a, b, c, \dots$ więc kiedy każda z tych ilości będzie równać się ilości a , pominiony drugi wyraz musi składać się z a tyle razy powtórzonego, ile znajduje się owych ilości; więc jeżeli ich liczba jest m , mnożnikiem będzie m razy a , albo ma , to jest że współczynnik ilości a równać się będzie wykładnikowi pierwszego wyrazu tego stopnia; iako to zobaczyć można w trzech stopniach wyżej położonych.

Zobaczmy teraz iakie powinny być mnożniki innych wyrazów. Jawną jest, że wszystkie mnogości $ab, ac, ad, bc, bd, \dots$ i. t. d. podług terażniejszego przypuszczenia, każda z nich równa się ilości a^2 ; podobnie wszystkie mnogości $abc, abd, \dots$ każda z nich równa się ilości a^3 , i tak o innych. Więc mnożnik trzeciego wyrazu każdy z pierwszych naszych mnogości wychodzi na a^2 powtórzone tyle razy, wie-

le mogą dać mnogościów głoski, a, b, c , i. t. d. będąc rozmnożone dwie a dwie. Podobnież mnożnik czwartego wyrazu, wychodzi na a^3 powtórzone tyle razy ile dać mogą mnogościów głoski a, b, c , i. t. d. będąc rozmnożone trzy a trzy, i tak daléy; więc żeby mieć spółczynnika liczebnego, trzeciego, czwartego, i. t. d. wyrazu ilości $x + a$ podniesionéy do stopnia m , nie trzeba więcéy tylko mieć wiadomo wiele dać może różnych mnogościów liczba m głosek a, b, c , i. t. d. rozmnożonych między sobą dwie a dwie, trzy a trzy, i. t. d.

124. Lecz uważam, że mając iakąkolwiek liczbę m głosek, i połączywszy je między sobą na wszelkie sposoby iak tylko można po dwie, po trzy, po cztery i. t. d. byłoby żadnéy głoski w iednymże połączeniu niepowtarzać, uważam mówięc

1^od. Ze liczba połączeń po dwie głoski, będzie podwójnością liczby mnogościów powstających z rozmnożenia między sobą dwóch głosek, rzetelnie od siebie różnych. Jakóż dwie głoski mogą bydź między sobą połączone dwoma sposobami; np. a i b , dają te dwa połączenia ab i ba , ale te dwa połączenia niedają dwóch różnych mnogościów.

2^oe. Ze liczba połączeń kilku głosek po trzy, będzie sześć razy tak wielka iak liczba mnogościów powstających z rozmnożenia między sobą trzech głosek rzetelnie od siebie różnych. Jakóż żeby mieć wszystkie połączenia trzech ilościów a, b, c , trzeba połączywszy z nich dwie np. a i b , co da ab i ba , trzeba mówięc połączyć trzecią ilość c z każdym z dwóch piérwzych połączeń, to iest dać mu wszelkie iakie tylko mieć może położenie względem głosek a i b , wchodzących w ab i ba ; ikąd wynika sześć połączeń złożonych z trzech głosek, iakoto $abc, acb, cab, bac, bca, cba$; lecz każde z tych sześciu połączeń niewyraza tylko iednę i też samę mnogość.

Przez temuż podobne rozumowanie, dałoby się okazać, że cztery ilości mieć mogą dwadzieścia cztery połączeń, z których każde wyraża też samę mnogość; więc liczba mnogościów od siebie różnych, wynikających z połączenia między sobą wielu głosek po cztery, iest dwudziestą czwartą częścią całej liczby takowych połączeń. Podobnież liczba mnogościów różnych, wynikających z rozmnożenia między sobą wielu głosek po pięć, po sześć, po siedm, i. t. d. iest sto dwudziestą, siemset dwudziestą, pięćtyścicy czterdziestą i. t.

d. częścią całej liczby takowych połączeń, to jest w powiększoności, można ją wyrazić przez ułamek mający za licznika całą liczbę połączeń, a za mianownika mnogość wynikającą z wszystkich liczb 1, 2, 3, 4, i. t. d. aż do liczby oznaczającej z wie-
lu głosek składa się każda mnogość.

125. Zobaczmy tedy wiele może dać połączeń liczba m głosek a, b, c , i. t. d. wziętych po dwie, po trzy, i. t. d.

Co do połączeń po dwie głoski, jawna jest, że ponieważ każda głoska nie może być łączona sama z sobą, więc da się połączyć tylko z innymi $m-1$, a zatem da też tyleż połączeń, to jest $m-1$, a tak ponieważ znajduje się m wszystkich głosek, więc dadzą połączeń m razy $(m-1)$, albo $m \cdot (m-1)$. Więc podług tego co się dopiero wyżej powiedziało (124), liczba mnogościów powstających z dwóch głosek rzetelnie różnych między sobą, będzie $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

Co się tycze połączeń po trzy głoski, żeby je mieć, trzeba każde z połączeń zrobionych po dwie głoski, połączyć znowu z każdą głoską która w pierwszych połączeniach nieznajduje się, to jest z liczbą głosek oznaczonych przez $m-2$; więc

wiec każde z tych połączeń, da $m-2$ połączeń po trzy głoski; a ponieważ z dwóch głosek mieliśmy połączeń $m \cdot (m-1)$, z których znowu każde powinno dać $m-2$ połączeń po trzy głoski, więc wszystkich połączeń po trzy głoski będzie $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$; a że podług (124) liczba mnogościów rzetelnie między sobą różnych, jest szóstą częścią tej całej liczby połączeń, więc będzie $m \cdot$

$$\frac{(m-1) \cdot (m-2)}{6} \text{ albo } m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$$

Podobnie dowieśćby można, że liczba połączeń po cztery głoski, byłaby $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; bo trzeba by każde połączenie trzech głosek połączyć znowu z wszystkimi innymi głoskami, które w pierwszych połączeniach nieznajdują się, a których liczba będąc $m-3$, z każdego połączenia po trzy głoski wypadnie $m-3$ połączeń po 4 głoski; więc kiedy liczba połączeń po trzy głoski jest wyrażona przez $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$, liczba połączeń po cztery głoski, będzie wyrażona przez $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; że zaś liczba mnogościów rzetelnie od siebie różnych, powstających z rozmnożenia po cztery głoski, jest dwudziestą czwartą częścią takowej liczby połączeń, prze-

to pomiéniona liczba mnogościów będzie wyrażona przez $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}$.

Toż samo rozumowanie okazałoby, że liczba mnogościów różnych powstających z rozmnożenia liczby m głosek po pięć, po sześć, i. t. d. byłaby wyrażona przez $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$, i przez $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}$, i tak dalej.

126. Wniéśmy stąd i z tego co się powiedziało (122), że wyrazy koléyne ilości dwuflowney $x + a$ podniesionéy do stopnia m , albo ilości $(x + a)^m$, będą następujące.

$$x^m + m x^{m-1} a + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \text{t. d.}$$

To jest, że pierwszym wyrazem rzędu (series) składającego ten stopień, jest pierwszy wyraz x ilości dwuflowney, podniesiony do stopnia m ; że potem dalej wykładniki głoski x umniejszają się coraz o jedną jedność, a odwrotnie wykładniki głoski a rosną za każdym razem o jedną jedność, począwszy od drugiego wyrazu, w który dopiero poczyna wchodzić a . Co

Co się tycze spółczynników $m, m \cdot \frac{m-1}{2}, i.$ t. d. trzeba uważać że spółczynnik drugiego wyrazu równa się wykładnikowi pierwszego wyrazu; że spółczynnik $m \cdot \frac{m-1}{2}$ trzeciego wyrazu, nie jest co innego, tylko spółczynnik poprzedzającego wyrazu m , rozmnożony przez $\frac{m-1}{2}$, to jest przez połowę wykładnika głoski x w tymże poprzedzającym wyrazie. Podobnie spółczynnik $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$ czwartego wyrazu, znowu nieco innego jest, tylko spółczynnik $m \cdot \frac{m-1}{2}$ wyrazu poprzedzającego rozmnożony przez $\frac{m-2}{3}$, to jest przez trzecią część wykładnika głoski x w poprzedzającym wyrazie, i tak dalej. Te wszystkie wnioski, wynikające z samego wýzrzenia na wyrazy ilości podniesionéy do iakiegokolwiek stopnia m , prowadzą nas do téj reguły powszechnéy: że spółczynnik iednego którego koléwny wyrazu, znajdzie się, rozmnożywszy spółczynnika poprzedzającego wyrazu przez wykładnik głoski x w tymże poprzedzającym wyrazie położonego, a mnogość wypadającą rozdzieliwszy przez

liczbę wyrazów poprzedzających ten wyraz o który rzecz idzie.

Podniemy podług téj reguły np. do siódmego stopnia ilość $x + a$. Mieć będziemy $(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. To jest piątę naprzód x^7 , potem mnożę ten wyraz przez 7, zmniejszam wykładnika o jedną jedność, i wszystko mnożę znowu przez 4, co mi da $7ax^6$.

Ten drugi wyraz mnożę przez 6, zmniejszam wykładnika głoski x o jedną jedność, a odwrotnie wykładnika głoski a pomnażam o jedną jedność, i mam na trzeci wyraz $21a^2x^5$.

Daléj ten trzeci wyraz mnożę przez 5, zmniejszam wykładnika głoski x o jedną jedność, a powiększam wykładnika głoski a także o jedną jedność, skąd mi wypada na czwarty wyraz $35a^3x^4$; resztę można łatwo dokończyć podobnymże sposobem.

Gdyby zamiast $x + a$ zadano było $x - a$; natenczas wyrazy dostawałyby na przemian znaki $+$ i $-$ poczynając od pierwszego; bo jeżeli np. w a^4 położy się $-a$ zamiast $+a$, w tym razie znak nieodmieni się (24), odmieniłby się zaś, gdyby się położyło $-a$, w stopniu nieparzystym ilości a .

Taż sama dopiero wyżéj podana formuła służyć może, nietyko do podniesienia do jakiegokolwiek stopnia ilości prostéj dwuflownéj iakoto $x + a$, ale téż choćby ta lub téj podobna ilość była w wyższym stopniu zadana, np. $x^2 + a^2$ albo $x^3 + a^3$, i. t. d. a nawet podług téj formuły mo-

można podnieść ilość iakąkolwiek nietyko do takiego stopnia któregoby wykładnik był liczbą całą twierdzącą, ale téż choćby wykładnik był liczbą czyto twierdzącą czy przeczącą, całą, czy ułamkową. Ale takowe użycia wyciągaia, ażebyśmy naszéj formule dali inakszą postać.

127. Powróćmy tedy do téj formuły $(x - a)^m = x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \text{i. t. d.}$

Podług tego co się rzekło (119), można zamiast x^{m-1} , napisać $\frac{x^m}{x}$, zamiast x^{m-2} ,

napisać $\frac{x^m}{x^2}$, zamiast x^{m-3} , napisać $\frac{x^m}{x^3}$.

i tak daléj. Na tym fundamencie nasza formuła przemieni się w następującą,

$$(x + a)^m = x^m + \frac{m a x^m}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2 x^m}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3 x^m}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{a^4 x^m}{x^4}, \text{ i. t. d.}$$

Teráz zastanowiwszy się nad tém, że wszystkie wyrazy, mają x^m za spólnego czyn-

czynnika, można będzie formule dać zwu tę postać, $(x + a)^m = x^m (1 + \frac{a}{x})^m$

$$m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3} + \text{i.t.d.}$$

rozumie się, że x^m mnoży wszystkie wyrazy zamknięte między nawiasami. A stało się reguła następująca, służąca do wygodnego złożenia rzędu wyrazów mających składać stopień m ilości dwuflownej $x + a$.

128. Napisz w pierwszej linii ilości jak następują.

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \text{i.t.d.}$$

$$1 + m \cdot \frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{a^4}{x^4}, \text{i.t.d.}$$

A napisawszy jedność poniżej, i po prostu o jedno miejsce w lewą stronę, ułóżysz spodni rząd następującym sposobem.

Rozmnoż tę jedność przez pierwszy wyraz górnego rzędu i przez $\frac{a}{x}$, a mieć będziesz drugi wyraz dolnego rzędu.

Rozmnoż ten drugi wyraz przez drugi wyraz górnego rzędu i znowu przez $\frac{a}{x}$, a mieć będziesz trzeci wyraz dolnego rzędu.

Roz.

Rozmnoż ten trzeci wyraz przez trzeci wyraz górnego rzędu, i przez $\frac{a}{x}$, a mieć będziesz czwarty wyraz dolnego rzędu, i tak dalej.

Dodaj razem wszystkie wyrazy dolnego rzędu, sumę ich rozmnoż przez x^m , a wypadek pokaże ci wartość ilości $(x + a)^m$.

129. Gdyby zamiast $x + a$ zadano było $x^2 + a^2$, albo $x^3 + a^3$, albo t.d.; natenczas zamiast mnożenia następnego przez $\frac{a}{x}$, trzeba by mnożyć w pierwszym przypadku przez $\frac{a^2}{x^2}$, w drugim przez $\frac{a^3}{x^3}$, a mówiąc w powszechności trzeba by mnożyć przez drugi wyraz ilości dwuflownej, rozdzielony przez pierwszy wyraz; suma zaś wszystkich wyrazów powinna być rozmnożona w pierwszym przypadku przez x^2 podniesione do stopnia m , a w drugim przypadku przez x^3 podniesione do stopnia m ; to jest powiedzianym w powszechności, przez pierwszy wyraz ilości dwuflownej podniesiony do zadanego stopnia.

Naostatek, gdyby drugi wyraz ilości dwuflownej zamiast znaku $+$ miał znak $-$, w takim razie zamiast kolejnego mno-

mnożenia przez $\frac{a}{x}$, kiedy była zadana ilość $x + a$, albo zamiast $\frac{a^2}{x^2}$, kiedy ilość zadana była $x^2 + a^2$, trzebaby kolejno mnożyć przez $-\frac{a}{x}$, albo przez $-\frac{a^2}{x^2}$, i tak dalej.

Daymy np. że jest zadano podnieść do szóstego stopnia ilość $x^3 + a^3$; postępuję sobie iak wyżej.

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}$$

To jest, że napisawszy pierwszy rząd $6, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$ i t. d. który odpowiada rzędowi $m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}$ i t. d. tudzież napisawszy poniżej jedność na pierwszym

wyraz drugiego rzędu, mnożę ten pierwszy wyraz przez pierwszy wyraz 6 górnego rzędu i przez $\frac{a^3}{x^3}$, co

mi daie na drugi wyraz $\frac{6a^3}{x^3}$. Mnożę $\frac{6a^3}{x^3}$ przez drugi wyraz $\frac{5}{2}$ górnego rzędu i przez $\frac{a^3}{x^3}$, skład mam

na trzeci wyraz $\frac{15a^6}{x^6}$, i t. d. Nakoniec, mnożę

summę wszystkich wyrazów tym sposobem wynalezionych przez x^3 podniesione do szóstego stopnia,

to jest (96) przez x^{18} , i mam $x^{18} + \frac{6a^3x^{15}}{x^3} +$

$$\frac{15a^6x^{12}}{x^6} + \frac{20a^9x^9}{x^9} + \frac{15a^{12}x^6}{x^{12}} + \frac{6a^{15}x^3}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}$$

x^{18} , co wychodzi na $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12}$

$$+ 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$$

130. Gdyby zamiast ilości dwuflownej, zadana była ilość trzyflowna do podniesienia do iakowegó stopnia, np. gdyby trzeba było podnieść do trzeciego stopnia ilość $a + b + c$; możnaby sobie zmyślić $b + c = m$, a natenczas ilością zadaną do podniesienia do trzeciego stopnia, byłoby $a + m$; a zatem podług reguł wyżej przepisanych wypadłoby $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Teraz zamiast m , położywszy nazad onego wartość $b + c$, mieć będiem $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$; gdzie ponieważ ilości $(b + c)$, $(b + c)^2$, $(b + c)^3$ są wszystkie stopniami ilości dwuflownej, więc także łatwo dać się znaleźć przez reguły poprzedzające, niezostanie więcéy tylko rozmnożyć ie przez odpowiadające wyrazy, iakoto przez $3a^2$, $3a$, i przez 1. Dokończywszy tedy rachunku będiem, $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

O wyciąganiu Pierwiastków z ilości wielostownych.

131. Umiejąc złożyć sobie wszystkie wyrazy z których składać się ma iakikolwiek stopień zadany, ilości dwuflownej, nietrudno będzie wnieść sobie stąd sposób wyciągnięcia pierwiastka stopnia zadanego, z iakiéykolwiek ilości bądźto literalnej, bądźto liczebnej. Np. gdyby potrzeba było wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, znaleźlibyśmy (co nam iuż składinąd jest wiadomo), że kwadrat składa się z kwadratu pierwszego wyrazu ilości dwuflownej, z podwójności pierwszego wyrazu rozmnożonego przez drugi wyraz,

i z kwadratu drugiego wyrazu. Wierzę, że rozporządziwszy wszystkie wyrazy, można odprawić działanie iak następuje.

P R Z Y K Ł A D I.

$$\begin{array}{r}
 36a^2 + 60ab + 25b^2 \\
 - 36a^2 \\
 \hline
 + 60ab + 25b^2 \\
 - 60ab - 25b^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6a + 5b \text{ Pierwiaszek} \\
 12a + 5b
 \end{array}$$

Biorę kwadratowy pierwiaszek pierwszego wyrazu $36a^2$, którym są $6a$, i piszę go obok ilości zadanej.

Kwadruję ten pierwiaszek i kwadrat jego $36a^2$ piszę pod pierwszym wyrazem z przydanym znakiem — dla odjęcia. Po uczynionem zebraniu zostaje $+ 60ab + 25b^2$.

Pod pierwiaszkiem $6a$ piszę podwójność jego to jest $12a$, która mi służyć ma do rozdzielania pierwszego wyrazu $60ab$ pozostałej ilości $60ab + 25b^2$. Znajduję wieloraz $+ 5b$, który dodaję do pierwiaszka $6a$, i mam na szukany pierwiaszek $6a + 5b$; lecz dla sprawdzenia tego działania, przypisuję także tenże dopiero wynaleziony wieloraz do $12a$, i całą sumę $12a + 5b$ mnożę przez tenże sam wieloraz $5b$, a wypadające mnożności z tego mnożenia kolejno przenoszę pod ilość $60ab + 25b^2$, nieprzerpinając o przemianie znaków należących tym mnożnościom; po uczynionem zebraniu nic mi nie zostaje; skąd wnoszę że pierwiaszek kwadratowy $6a + 5b$, jest doskonałym pierwiaszkiem ilości $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Obierzmy sobie na drugi przykład tę ilość $4a^2 - 12ab + 16ac + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Rozporządziwszy tę ilość względem głoski a , mieć będę.

PRZY-

P R Z Y K Ł A D II.

$$\begin{array}{r}
 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pierwiaszek} \\ 2a - 3b + 4c \end{array} \right\} \\
 - 4a^2 \\
 \hline
 12a \text{ Refz.} - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \quad \left. \begin{array}{l} 4a - 3b \\ 4a - 6b + 4c \end{array} \right\} \\
 + 12ab \quad - 9b^2 \\
 \hline
 2ga \text{ Refz.} - 16ac - 24bc + 16c^2 \\
 - 16ac \quad + 24bc - 16c^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ostatnia Refzta

Wyciągam pierwiaszek kwadratowy z ilości $4a^2$, którym są $2a$, piszę je na boku, kwadruję $2a$, i kwadrat $4a^2$ piszę z znakiem przeciwnym pod $4a^2$; po zebraniu zostaje mi się $- 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$.

Poniżej pierwiaszka $2a$, piszę podwójność jego $4a$, która mi służyć ma za dzielnika pierwszego wyrazu $- 12ab$ pozostałej refzty; dzieląc, znajduję wieloraz $- 3b$ który dopisuję do pierwszego wyrazu pierwiaszka $2a$; przypisuję go także obok podwójności $4a$, i takową całość $4a - 3b$ rozmnażam przez tenże wieloraz $- 3b$, napisawszy mnożności wypadające pod refztą $- 12ab + 16ac$, i. t. d. z znakami przeciwnymi, po zebraniu zostanie mi na drugą refztę $+ 16ac - 24bc + 16c^2$.

Teraz uważam dwa wyrazy pierwiaszka $2a - 3b$ iakby składały tylko jedną ilość; biorę podwójność téj ilości i piszę ją poniżej, iako mającą mi służyć za dzielnika drugiego refzty; lecz w wykonaniu tego dzielenia, przestaję (podług tego co się rzekło (36), na rozdzieleniu pierwszego wyrazu $+ 16ac$ przez pierwszy wyraz $+ 4a$ mego dzielnika; znajduję na wieloraz $+ 4c$, które przypisuję do przeszłego pierwiaszka $2a - 3b$, i oraz do podwójności $4a - 6b$: tę ostatnią sumę $4a - 6b + 4c$, rozmnażam przez nowo wynaleziony wyraz pierwiaszka $+ 4c$; a mnożności kolejno wypadające wzięte z przeciwnymi znakami piszę pod drugą refztą; po-

od-

odprawionem odjęciu nic mi niezoſtaie. Skąd wyciągnę że wynaleziony pierwiaſtek, ieſt pierwiaſtkiem doskonałym.

Z tego co powiemy zaraż niżej o pierwiaſtku piątym, łatwo można zrozumieć iakby ſobie trzeba poſtąpić w iſznych ſtopniach.

Podług formuły przepiſanej do podnieſienia iakiéykolwiek ilości dwuſłownej do zadanego ſtopnia, piąty ſtopień ilości $a+b$, wypada $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Z tych ſzeſciu wyrazów doſyć nam ieſt na dwóch pierwſzych, do uſtalenia ſobie reguły któręj ſzukamy.

Pierwſzym wyrazem ieſt piąty ſtopień pierwſzego wyrazu ilości dwuſłownej, a drugim wyrazem ieſt czwarty ſtopień tegoż pierwſzego wyrazu pięć razy wzięty, i rozmnożony przez drugi wyraz; więc ażeby mieć pierwſzy wyraz pierwiaſtka, trzeba po roſporządzeniu wſzyſtkich wyrazów ſtopnia zadanego wyciągnąć piąty pierwiaſtek, z pierwſzego wyrazu tego ſtopnia; żeby zaś mieć drugi wyraz pierwiaſtka, trzeba rozdzielić drugi wyraz ilości zadaney, przez czwarty ſtopień pięć razy powtórzone pierwiaſtka, wynalezionego w poprzedzającym działaniu. Jakóż rzecz oczywiſta

że pierwiaſtkiem piątym ilości a^5 ieſt a , to ieſt pierwſzy wyraz ilości dwuſłownej, któręj ilość $a^5 + 5a^4b + \text{i. t. d.}$ ieſt piątym ſtopniem; niemnięj także ieſt oczywiſta, że $\frac{5a^4b}{5a^4}$ daie b , które ieſt drugim wyrazem téżże ilości dwuſłownej. Ale ponieważ mogłoby przytrafić ſię, iż zadana ilość niebyłaby doskonałym piątym ſtopniem, przeto znalazłſzy dopiéro opiſanym ſpoſobem drugi wyraz pierwiaſtka, trzeba ſprawdzić takowy pierwiaſtek, podnoſząc go do piątego ſtopnia, a potem odęmuiać wypadek od ilości zadaney. Zobaczmy to w przykładzie.

Niechay będzie zadano wyciągnąć pierwiaſtek piąty z ilości:

$$\begin{array}{r} 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \\ - 32a^5 \quad \quad \quad + 810ab^4 + 243b^5 \\ \hline \text{Reſzta} + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Pierwiaſtek} \\ 2a + 3b \\ 80a^4 \end{array} \right.$$

Wyciągam piąty pierwiaſtek z ilości $32a^5$, i mam $2a$, które piſzę na ſwoim miejscu.

Podnoſzę $2a$ do piątego ſtopnia, a wypadek $32a^5$ piſzę z znakiem przeciwnym, pod pierwſzym wyrazem $32a^5$ ilości zadaney, tym ſpoſobem po odjęciu, pierwſzy wyraz zoſtanie wyrugowany.

Podnoſzę pierwiaſtek $2a$ do czwartego ſtopnia, co mi daie $16a^4$, które wzięwſzy pięć razy, mam $80a^4$ i piſzę je pod pierwiaſtkiem $2a$; tych $80a^4$ uſżywam do rozdzielenia pierwſzego wyrazu reſztv, to ieſt $240a^4b$; po rozdzieleniu wypada mi wieloraz $3b$, który przypiſuję do pierwiaſtka; tak

iż cały szukany pierwiastek będzie $2a + 3b$. Ale żeby go sprawdzić, podnożę $2a + 3b$ do piątego stopnia, i znajdę też same wyrazy które miałem w ilości zadanej, po odprawionem odjęciu nie mi nie zostaje, skąd wnoszę, że $2a + 3b$ są doskonałym pierwiastkiem piątym ilości zadanej.

Gdyby w pierwiastku miał się znajdować jeszcze jeden wyraz więcej, natenczas po tém pierwszym działaniu zostałaby się reszta; w takim razie wynaleziony pierwiastek $2a + 3b$ poczytałbym iakoby za jedną ilość, i dla wynalezienia trzeciego wyrazu, odprawiłbym z nią też same działania, które oparłem z ilością $2a$, dla znalezienia drugiego wyrazu.

132. Co się tycze ilościów liczebnych, reguła do nich służyć będzie zgola taż sama co do literalnych; to tylko trzeba objaśnić, iakim sposobem poznać co w zadanej liczbie ma odpowiadać pierwszemu wyrazowi a^5 , a co drugiemu wyrazowi $5a^4b$.

Żeby ułatwić tę trudność, nietrzeba tylko zmyślić sobie, że w ilości dwustopniowej $a + b$, a znaczy dziesiątki a b jednostki; natenczas iawna jest że a^5 wyrażać będzie sta tyśiąców, bo piąty stopień dziesięciu czyni 100000; więc pierwszy wyraz a^5 albo ilość z której ma być wyciągniony pierwiastek piąty, dla wynalezienia pierwszey cyfry pierwiastka, niemoże mieścić się w pięciu ostatnich cyfrach po prawey ręce, trzeba tedy oddzielić te ostatnie

tnie pięć cyfer, a tych co zostaną po lewey ręce, (daymy, że ich będzie pięć albo mniej iak pięć), trzeba szukać piątego pierwiastka, który łatwo da się wynaléśdź, bo niemoże składać się tylko z jedną cyfrą.

Znalazłszy pierwszą cyfrę pierwiastka, i onę piątą stopień odiawłszy od ilości która służyła do znalezienia takowego pierwiastka, trzeba obok pozostałéj reszty spuścić oddzielone pięć cyfer. Żeby zaś mieć tę część co ma być rozdzielona przez $5a^4$, to jest przez czwarty stopień wynalezionych dziesiątków powtórzony pięć razy, trzeba oddzielić cztery cyfry po prawey ręce, i niedzielić tylko część pozostałą po lewey ręce: albowiem $5a^4b$, to jest ilość, która ma być rozdzielona przez $5a^4$ żeby mieć b , niemoże zawierać się w czterech ostatnich cyfrach, bo będąc mnogością z $5a^4$ przez b , powinna mieć w sobie przynajmniej dziesiątki tyśiąców, kiedy samo tylko a^4 już daie dziesiątki tyśiąców.

To na przód założywłszy, wyciągnięcie pierwiastka liczebnego, odprawi się w tenże sposób co pierwiastka literalnego.

Np. gdyby zadano było wyciągnąć piąty pierwiastek z następującej ilości,

$$\begin{array}{r}
 3802,04032 \quad \{ 52 \\
 \underline{3125} \\
 6770,4032 \\
 \underline{3125} \\
 380204032 \\
 \underline{} \\
 0
 \end{array}$$

Oddzielam naprzód pięć ostatnie cyfry 04032, i szukam piątego pierwiastka ilości 3802, która zawiera się w sobie mniej jak pięć cyfer, niemożę dać na pierwiastek tylko jedną cyfrę; takowym pierwiastkiem będą 5 które piśzę na boku.

Podnoszę tę 5 do piątego stopnia, a wypadek piśzę pod 3802 dla odjęcia, po którym zostanie mi się 677; obok tych 677 spuszczałam owe pięć cyfer z początku oddzielone, a od tego wszystkiego odłączam cztery cyfry po prawę ręce i część pozostała 6770 dzielę przez czwarty stopień wynalezionego pierwiastka 5 powtórzone pięć razy, to jest przez 5 razy 625, albo przez 3125. Znajduję na wieloraz 2, które przypisuję obok pierwszemu wynalezionemu cyfry 5. Zeby zaś sprawdzić ten pierwiastek 52, podnoszę go do piątego stopnia i znajduję też samą liczbę która była zadana; skąd wnoszę że 52 są doskonałym pierwiastkiem.

Gdyby się została reszta, i gdyby potrzeba było pierwiastka doskonałego przybliżonego, trzeba by obok reszty dopisać pięć zerów, i z wynalezieniem trzeciej cyfry, która już byłaby dzieląca, postąpić sobie tak jak się uczyniło z wynalezieniem drugiej.

W powfzechności, żeby wyciągnąć pierwiastek jakiegokolwiek stopnia m , trzeba (poczynając od prawej ku lewej) porobić przedziały, każdy zawierający w sobie m cyfer, oprócz ostatnie-

go

go po lewą ręce, który może mieć w sobie i mniej cyfer. Potem z tego ostatniego przedziału wyciąga się pierwiastek stopnia m , niezawierający w sobie nigdy więcej nad jedną cyfrę; obok reszty spuszcza się następujący przedział, i po prawę ręce jego oddziela się $m-1$ cyfer, część zaś pozostała po lewą ręce, dzieli się przez pierwiastek wynaleziony, m razy powtórzone, i podniesiony do stopnia $m-1$; i tak dalej. Takowy dopiero przepisany sposób zasada się na tem, że dwa pierwsze wyrazy ilości dwusłownej $a+b$ podniesione do jakiegokolwiek stopnia m , są $a^m + ma^{m-1}b$, i że jeżeli a wyraża dziesiątki, a b jedności, a^m niemożę zawierać się w liczbie m ostatnich cyfer, iako też znowu $ma^{m-1}b$, niemożę zawierać się w liczbie $m-1$ ostatnich cyfer,

O sposobie przybliżenia się do pierwiastka stopniów niedoskonałych ilościów literalnych.

133. **K**iedy ilość zadana wielosłowna, nie jest doskonałym stopniem tego wyniesienia, iaki ma być pierwiastek wyciągnięty, to też niemożna spodziewać się i pierwiastka doskonałego; trzeba tylko przestać na samem przybliżeniu tak daleko pociągniętem, iak zagadnienie

L 3

wy-

wyciągać będzie. W takowem przybliżeniu możnaby sobie postąpić tymże samym sposobem który dopiero podaliśmy do stopniów doskonałych: dzieląc podług niego wypadłby rząd wyrazów ułamkowych, których wartość coraż ubywająca pozwala prześtać na pewnëy liczbie wyrazów, resztę zaniedbawszy: lecz takowe działanie byłoby długie i bardzo żmudne. Można tedy dóysdź tegóż samego wypadku daleko krótszą drogą, przy pomocy reguły wyżej podanëy (128) do podniesienia ilości dwuflowney do stopnia zadanego. Tym końcem należy sobie przypomnieć (109), że każdy pierwiastek, może być wyrażony w postaci stopnia ułamkowego. I tak szukając pierwiastka kwadratowego ilości $a \pm b$, albo szukać wartości tego wyrażenia $\sqrt{a \pm b}$, jest to podnieść ilość $a \pm b$ do stopnia $\frac{1}{2}$; albowiem (109), $(a \pm b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a \pm b}$.

A zatem podług reguły wyżej danëy (128), piszę rząd następujący

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \frac{1}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{4}{5}, \text{ i. t. d.}$$

który wychodzi na $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \text{ i. t. d.}$

A położywszy 1 na pierwszy wyraz drugiego rzędu, składam takowy drugi rząd iak następuje.

$$1 \pm \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} \pm \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} - \frac{1}{128} \frac{b^4}{a^4} \pm \frac{1}{256} \frac{b^5}{a^5}, \text{ i. t. d.}$$

Mnożę pierwszy wyraz 1, przez pierwszy wyraz $\frac{1}{2}$ pierwszego rzędu, i przez $\frac{b}{a}$, to jest przez

drugi wyraz ilości dwuflowney $a \pm b$, rozdzielony przez pierwszy wyraz; i mam na drugi wyraz $\frac{1}{2} \frac{b}{a}$.

Trzeci wyraz składam, mnożąc poprzedzający drugi wyraz przez drugi wyraz $-\frac{1}{8}$ pierwszego rzędu i przez $\frac{b}{a}$, co mi da trzeci wyraz $-\frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2}$.

Dla znalezienia czwartego wyrazu, mnożę ten trzeci wyraz przez trzeci wyraz $-\frac{1}{16}$ pierwszego rzędu i przez $\frac{b}{a}$, skąd mam na czwarty wyraz $-\frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3}$, i tak dalëy.

Naostatek te wszystkie wyrazy mnożę przez pierwszy wyraz ilości dwuflowney podniesiony do stopnia $\frac{1}{2}$, i mam na wartość wyrażenia $(a \pm b)^{\frac{1}{2}}$ albo $\sqrt{a \pm b}$, następującą ilość:

$$a^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} - \frac{1}{128} \frac{b^4}{a^4} \pm \frac{1}{256} \frac{b^5}{a^5}, \right.$$

i. t. d.), którą łatwo będzie pociągnąć sobie iak daleko potrzeba wyciąga.

Zobaczmy w dalszym przeciągu, użycia takowych przybliżeń; teraz zaś prześtaniemy tylko na pokazaniu w przykładzie, iak można przybliżyć się do pierwiastka ilościów liczebnych. Daymy że ma być wyciągniony, pierwiastek kwadratowy z liczby 101. Dzielę 101 na dwie części, z których jedna byłaby doskonałym ile można największym kwadratem, np. na takowe dwie części 100 i 1. Biorę pierwszą część za a a drugą za b , to jest rozumieć być $a = 100$, a $b = 1$; a zatem będzie $a^{\frac{1}{2}} = (100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; zaś $\frac{b}{a} = \frac{1}{100} = 0,01$; więc

rząd dający wartość wyrażenia $\sqrt{a \pm b}$, to jest w niniejszym przykładzie $\sqrt{101}$, położywszy zamiast $a^{\frac{1}{2}}$ i $\frac{b}{a}$ onych wartości, odmieni się w rząd następujący.

$$10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} + \frac{(0,01)^3}{16} - \frac{5(0,01)^4}{128} + \frac{35(0,01)^5}{1280} \right), \text{ i. t. d.}$$

Daymy że chcielibyśmy mieć ten pierwiastek przybliżony, tylko o chybiej iednój dziesiątej części; w takim razie dosyć będzie wziąć pierwiastek z trzech wyrazów, bo czwarty wyraz $\frac{(0,01)^3}{16}$ wychodzi na $\frac{0,000001}{16}$, to jest na 0,0000000625; a lubo może być jeszcze rozmnożony przez 10, które mnożą wszystkie wyrazy złożonego rzędu, atoli i tym sposobem nieuczyni więcej nad 0,000000625, to jest że czwarty wyraz już będzie wyrażony w daleko mniejszych częściach iak w dziesiąt częściach. Następujące zaś wyrazy będą jeszcze mniejsze, gdyż mając być kolejno mnożone przez 0,01 to jest przez ułamek, muszą się co raz umniejszać; albowiem mnożąc przez ułamek, niebierze się cały mnożny ale tylko część jego.

Wartość tedy ilości $\sqrt[5]{101}$, wychodzi na $10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} \right)$, to jest na $10 (1 + 0,005 - 0,000125)$, albo na $10 \times 1,004875$, albo $10,04875$; to jest 10,0499, przeistając na samych dziesiąt częściach.

Ten sposób może być przystosowany do pierwiastków i ilościów wszelkiego gatunku; obierzmy sobie tedy na drugi przykład ilość, $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$. To wyrażenie przemieniam, na $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{5}}$, i postępując

podobnie iak wyżej, piszę $\frac{1}{5}, \frac{1}{5} - \frac{1}{5}, \frac{1}{5} - \frac{2}{5}, \frac{1}{5} - \frac{3}{5}, \frac{1}{5} - \frac{4}{5}$, i. t. d. albo $\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{5}$, i. t. d. Położywszy 1 na pierwszy wyraz drugiego rzędu, składam daley tenże drugi rząd iak następuje.

$$1 - \frac{1}{5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{2}{5} \frac{x^{10}}{a^{10}} - \frac{6}{125} \frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{12}{1250} \frac{x^{20}}{a^{20}} - \frac{798}{31250} \frac{x^{25}}{a^{25}}, \text{ i. t. d.}$$

Mnożę pierwszy wyraz 1, przez pierwszy wyraz $\frac{1}{5}$ górnego rzędu i przez $\frac{x^5}{a^5}$, to jest przez drugi wyraz ilości dwuślownej rozdzielony przez pierwszy wyraz, co mi da na drugi wyraz rzędu, $-\frac{1}{5} \frac{x^5}{a^5}$.

Zeby mieć trzeci wyraz, mnożę wyraz poprzedzający, przez drugi wyraz $-\frac{2}{5}$ górnego rzędu, i przez $-\frac{x^5}{a^5}$, co mi da $-\frac{2x^{10}}{25a^{10}}$.

Tymże samym sposobem wyrachowawszy dalsze wyrazy aż do szóstego, a potem wszystkie rozmnożywszy przez pierwszy wyraz a^5 ilości dwuślownej podniesiony do stopnia $\frac{1}{5}$, to jest, (96), przez $a^5 \times \frac{1}{5}$, albo przez a , mieć będę na wartość przybliżoną wyrazu $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$, następującą ilość:

$$a \left(1 - \frac{x^5}{5a^5} - \frac{2x^{10}}{25a^{10}} - \frac{6x^{15}}{125a^{15}} - \frac{12x^{20}}{1250a^{20}}, \text{ i. t. d.} \right)$$

134. Uważmy względem tego rzędu, i względem wszelkich innych które mogą być złożone tymże sposobem, że na pierwszy wyraz ilości zadanej, zawsze brać trzeba większy wyraz; np. w ilości $\sqrt[5]{(a+b)}$, wzięliśmy byli a na pierwszy wyraz, ale gdyby b było większe nad a , to na pierwszy wyraz należałoby było wziąć b . Przyczyna tego jest ta, że kiedy b jest wię-

większe nad a , pierwszy rząd $\frac{b}{a}$ (i. t. d.) może być omylny; w takim razie $\frac{b}{a}$ będąc ilością większą od jedności, następujące wyrazy, które kolejno wszystkie mają być mnożone przez $\frac{b}{a}$, wypadają coraz większe, tak iż po założeniu pewnej liczby wyrazów, niema już dłużej przyczyny zastanowić się. Ale jeżeli w tymże przypadku, do złożenia rzędu weźmiemy b na pierwszy wyraz, mieć będziemy $b^{\frac{1}{2}}$ ($1 + \frac{1}{2} \frac{a}{b} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{b^2}$, i. t. d.), gdzie wyrazy iedne po drugich wypadają coraz mniejsze.

Rzędy których wyrazy tem bardziej rosną, im bardziej oddalają się od początku, nazywają się *rzędy rosnące* (series divergentes), odwrotnie zaś nazywają się *rzędy ubywające* (series convergentes), których wyrazy mają coraz tem mniejszą wartość, im bardziej oddalają się od początku.

135. Widzieliśmy wyżej (118), że każdy ułamek Algebraiczny może być wyrażony w postaci całkowitki, przestawiliśmy mianownika do licznika z wykład-

dnikiem przeczącym. Ta uwaga, podaie nam sposob do ułożenia w rząd wszelkiego ułamka, któregoby mianownik był ilością wieloścowną; co nam będzie pożytecznie służyć w dalszym przeciągu.

Np. gdybym miał $\frac{a^2}{a^2-x^2}$; zamiast téj ilości pisać $a^2 \times (a^2-x^2)^{-1}$, a potem ilość a^2-x^2 podnieść do stopnia -1 , według reguły danej (128), to jest, układam sobie naprzód pierwszy rząd, -1 , $-1-1$, $-1-2$, $-1-3$, i. t. d. co się przemienia na -1 , -1 , -1 , -1 . Potem składam drugi rząd iak następuje.

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \text{ i. t. d.}$$

To jest, mnożę pierwszy wyraz 1. tego dolnego rzędu, przez pierwszy wyraz -1 górnego rzędu i przez $\frac{x^2}{a^2}$, co mi da $+\frac{x^2}{a^2}$; ten wyraz dopiero wynaleziony mnożę przez drugi wyraz -1 górnego rzędu, i przez $\frac{x^2}{a^2}$, i tak dalej. Naostatek wszystkie

wyrazy mnożę przez pierwszy wyraz a^2 podniesiony do stopnia -1 , to jest (96), przez $a^{2 \times -1}$, albo przez a^{-2} , skąd mi wypadą

$$a^{-2} (1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \text{ i. t. d.})$$

na wartość ilości $(a^2-x^2)^{-1}$; więc żeby mieć wartość ilości $a^2(a^2-x^2)^{-1}$, nie trzeba więcej tylko poprzedzający rząd rozmnożyć przez a^2 . Lecz że $a^2 \times a^{-2}$ daje a^{2-2} , albo a^0 , co jest warto 1, przeto będzie $a^2(a^2-x^2)^{-1} =$

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \text{ i. t. d.}$$

Tymże sposobem postąpićby sobie potrzeba, aby ułożyć w rząd, ilość $\frac{a^2}{a^2 + x^2}$; albowiem można napisać w téj postaci $a^2(a^2 + x^2)^{-1}$. Podobnie zamiast $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$, można naprzód napisać $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, a potem $a^2(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$. Toż może być o innych.

O *Zrównaniach z dwiema niewiadomymi kiedy przechodzą pierwszy stopień.*

136. **Z**równanie z jedną niewiadomą, nazywa się bydl trzeciego, czwartego, piątego, i. t. d. stopnia, kiedy najwyższy stopień niewiadomej jest trzeci, czwarty, piąty, i. t. d. ale oprócz tego najwyższego stopnia, równanie może jeszcze zawierać w sobie wszystkie niższe stopnie.

I tak $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$, są trzy równania, wszystkie trzeciego stopnia.

Zrównanie z dwiema albo z większą liczbą niewiadomych, mówi się że przechodzi pierwszy stopień, nietylko w ten czas kiedy jedna z niewiadomych przechodzi pierwszy stopień, ale też kiedy niektóre z tych niewiadomych są rozmnożone jedna przez drugą; w powszechności zaś stopień równania zawisł, od najwyż-

większej summy iaką czynią wykładniki znajdujące się w iednymże wyrazie.

I tak zrównanie $x^3 + y^3 = a^2b$, jest trzeciego stopnia; równanie $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ jest także trzeciego stopnia; bo summa którą dają wykładniki głosek x i y , położone w wyrazie x^2y , czyni 3; w innych wyrazach już wykładniki są mniejsze.

137. Zeby rozwiązać zagadnienia prowadzące do równań przechodzących pierwszy stopień z wielą niewiadomymi, trzeba iak w równaniach pierwszego stopnia, tak ie rugować po iednemu, żeby nie zostało tylko iedno równanie i iedna niewiadoma.

Jeżeli będą dwa równania i dwie niewiadome, i jeżeli oraz w iednym z tych równań iedna z niewiadomych nie przechodzi pierwszego stopnia: *Weźmij w tém równaniu wartość téj niewiadomej, i takową połącz w drugim równaniu; tym sposobem mieć będziesz już tylko iedno równanie i iedną niewiadomą.*

Np. gdyby trzeba było rozwiązać to zagadnienie: *Znaleźć dwie liczby takie, których summa czyniłaby 12, a mnożąc z nich żeby czyniła 35.* Oznaczmy te dwie liczby przez x i przez y , mieć będą $x + y = 12$ i $xy = 35$.

Z pierwszego równania wyciągam $x = 12 - y$; tę wartość położywszy w drugim równaniu zamiast x , mam $(12 - y)y = 35$, albo $12y - yy = 35$; równanie drugiego stopnia, które będąc rozwiązane według reguł wyżej przepisanych (87 i dalej), da

da $y = 6 \pm 1$, to jest $y = 7$ albo $y = 5$; a ponieważ $x = 12 - y$, więc będzie $x = 5$ albo $x = 7$, to jest że dwie liczby szukane są 5 i 7, albo 7 i 5.

Podobnież gdybym miał te dwa równania $x + 3y = 6$ i $x^2 + y^2 = 12$; z pierwszego wyciągam $x = 6 - 3y$, a położywszy tę wartość w drugim równaniu, mam $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; odprawiając wskazane działanie, będzie $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$ albo po przestawieniu wszystkiego do jednej części i po zebraniu, $10y^2 - 36y + 24 = 0$; równanie drugiego stopnia, które rozwiązuje się według reguły wyżey podanych (87 i dalej).

Obierzmy sobie jeszcze na trzeci przykład dwa równania, $xy + y^2 = 5$ i $x^3 + x^2y = y^2 + 7$. Z pierwszego wyciągam $x = \frac{5 - y^2}{y}$, a położywszy

tę wartość w drugim równaniu, mam $\left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^2 y = y^2 + 7$; co po odprawieniu wskazanych działań i po zwyczajnym zebraniu, przemienia się na $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$ równanie, w którym nieznajduje się już tylko jedna niewiadoma y , ale która jest piątego stopnia.

138. Jeżeli w równaniu które jest niższego stopnia, jedna z niewiadomych nie przechodzi drugiego stopnia; weźmijmy w takim równaniu wartość kwadratu niewiadomej mającay najmniejszy wykładnika, i połącz tę wartość w drugim równaniu zamiast kwadratu téżże niewiadomej i innych stopniów onéyże, i tym sposobem dalej póty sobie postępuj, póki ta niewiadoma nieznajdzie się być w pierwszym

wszym stopniu. Natenczas z takowego ostatniego równania wyciągnij wartość téżże niewiadomej, i połącz ją w równaniu które jest niższego stopnia.

Np. gdybym miał te dwa równania, $x^2 + 3y^2 = 6x$ i $2x^3 - 3y^2 = 8$; wyciągam z pierwszego równania wartość ilości x^2 , która jest $x^2 = 6x - 3y^2$; tę wartość położywszy w drugim równaniu (i dawłszy baczenie na to że $x^3 = x^2 \times x$), będzie $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 8$, co wychodzi na $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. A że w tém równaniu jeszcze znajduie się x^2 , przeto kładę w niem znowu tęż wartość ilości x^2 co wyżej, i mam $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; równanie, w którym x już tylko w pierwszym stopniu znajduie się być położone.

Wyciągam tedy z niego wartość głoski x , i mam $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; tę wartość położywszy w pierwszym równaniu $x^2 + 3y^2 = 6x$, wypada mi $\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)^2 + 3y^2 = 6\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)$ albo $\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2} + 3y^2 = \frac{234y^2 + 48}{72 - 6y^2}$ albo $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$; równanie, w którym niepozostaie tylko odprawić wskazane mnożenia, i uczynić zebranie.

O Równaniach o dwu wyrazach.

139. Nazywają się Równania o dwu wyrazach, te w które niewchodzi więcej tylko jeden stopień niewiadomej; dla tego że zawsze mogą być przyprowadzone tylko do dwu wyrazów.

Np.

Np. Zrównanie $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, jest zrównanie o dwu wyrazach; bo napisawszy go w téj postaci $(a + b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, jawna jest, że a i b będąc ilościami wiadomemi, można $a + b$ wyrazić tylko w iednéj ilości, i $a^4b^2 - a^3b^3$ podobnie w iednéj ilości, tak iż poprzedzające zrównanie może być odmiénione w następujące, $px^5 = q$.

Takowe zrównania są bardzo łatwe do rozwiązania; albowiem jawna jest, że oswobodziwszy stopień niewiadomej przez téż same reguły co w innych zrównaniach niezolstanie więcę do czynienia, tylko wyciągnąć pierwiastek stopnia oznaczonego przez wykładnika niewiadomej.

Np. Zrównanie $px^5 = q$, da mi $x^5 = \frac{q}{p}$, a po wyciągnięciu piątego pierwiastka, będzie $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

140. Kiedy wykładnik jest nieparzysty, to niemoże być nigdy więcę tylko iedna wartość rzetelna.

Np. gdyby było dane takie zrównanie, $x^5 = 1024$, wypadłoby $x = \sqrt[5]{1024} = 4$, jawna zaś jest, że niema tylko iedna taka liczba, która podniesiona do piątego stopnia mogłaby nazad oddać 1024.

Gdyby druga część zrównania miała znak —, wartość ilości x miałaby także znak —; bo — rozmnożone przez — liczbę razy nieparzystą, daie —; ale kiedy wykładnik będzie parzysty, niewiadoma

mieć będzie dwie wartości, które mogą być albo obie rzetelne albo téż obie tylko zmyślone. Ten drugi przypadek prawdzi się w ten czas, kiedy druga część zrównania ma znak —.

Mając zrównanie $x^4 = 625$, wnoszą się $x = \sqrt[4]{625} = 5$; ale że — rozmnożone przez — liczbę razy parzystą, daie tenże sam wypadek co rozmnożone przez +, więc — 5 może tak dobrze uczynić zadość zagadnieniu iak + 5; a zatem należy pisać $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$, iak w zrównaniach drugiego stopnia. Gdyby zaś przeciwnym sposobem dane było $x^4 = -625$, wnioskoby się stąd $x = \pm \sqrt[4]{(-625)}$; ale te dwie wartości są tylko zmyślone; bo niema żadnej takiej liczby ani twierdzącej ani przeczącej, która będąc rozmnożona samą przez się liczbę razy parzystą, mogłaby dać na wypadek ilość przeczącą.

Przystępujemy te zrównania do rozwiązania iakiego zagadnienia: *Daymy że trzeba znaleźć dwie średnie proporcjonalne między 5 i 625.* Oznaczwszy te dwie niewiadome przez x i y , będzie :: 5 : x : y : 625, skąd wypadają następujące proporcye.

$$5 : x :: x : y$$

$$i \quad x : y :: y : 625.$$

Z tych dwóch proporcji, po rozmnożeniu między sobą skrajnych i średnich wyrazów, zrobią się te dwa zrównania, $5y = x^2$, i $625x = y^2$. Z pierwszego wyciągnawszy $y = \frac{x^2}{5}$, i wartość jego położywszy w drugim zrównaniu, będzie $625x = \frac{x^4}{25}$; rozdzieliwszy przez x , a rozmnożywszy

Tom II. M przez

przez 25, będzie znowu $x^3 = 15625$, a naostatek $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; więc $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

O Zrównaniach które mogą być rozwiązane podług sposobu przepisanego do zrównań drugiego stopnia.

141. **T**akowe równania niepowinny zawierać w sobie tylko dwa różne stopnie ilości x , i to takie, ażeby wykładnik jednego stopnia był podwójnością drugiego. Np. $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, są równania tego gatunku, i rozwiązują się tymże sposobem co zrównanie drugiego stopnia; to jest, niewiadomą mającą największego wykładnika, zrobimy ilość twierdzącą, (jeżeli taką nie jest), i oswobodziliśmy ją z ilościów które ją mnożyły albo dzieliły, bierzemy połowę ilości mnożącę niższy stopień niewiadomej, i z tej połowy zrobiony kwadrat dodajemy się do każdej części równania, przez co pierwsza część robi się doskonałym kwadratem. Natenczas z każdej części wyciąga się pierwiastek kwadratowy, dawszy drugiej części podwójny znak $\pm$. I tak równanie przemiennie się w zrównanie o dwu wyrazach.

Np. gdyby było zadano: znaleźć dwie liczby takie, żeby suma ich sześciąt wynosiła 35, mnożąc zaś z nich żeby czyniła 6. Z tego zagadnienia wy-

wypadają dwa równania następujące: $x^3 + y^3 = 35$ i $xy = 6$; z tego znowu ostatniego równania wnoszą

się $y = \frac{6}{x}$, wartość którą położywszy w pierwszym równaniu, będzie $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; a wyrugowa-

wszy mianownika i przestawiliśmy, wypada mi $x^6 - 35x^3 = -216$. Biorę tedy połowę mnożnika 35

to jest $\frac{35}{2}$, i tej połowy kwadrat dodawszy do ka-

żdey części, mam $x^6 - 35x^3 + (\frac{35}{2})^2 = (\frac{35}{2})^2 - 216$; wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy, będzie $x^3 - \frac{35}{2} = \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}$, po przestawieniu zaś $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}$; a naostatek po wy-

ciągnięciu pierwiastka sześciennego, $x = \sqrt[3]{\frac{35}{2} \pm \sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216}}$; że zaś $(\frac{35}{2})^2 = \frac{1225}{4}$, a $(\frac{35}{2})^2 - 216 = \frac{1225 - 864}{4} = \frac{361}{4}$, więc $\sqrt{(\frac{35}{2})^2 - 216} = \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$; więc $x = \sqrt[3]{(\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2})}$; skład wypadają

te dwie wartości, $x = \sqrt[3]{(\frac{35+19}{2})} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} =$

3, i $x = \sqrt[3]{(\frac{35-19}{2})} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; a ponieważ

znaleźliśmy wyżej $y = \frac{6}{x}$, więc mieć będziemy $y = 2$ i znowu $y = 3$.

Kiedy największym wykładnikiem będzie 4 albo wielokrotność czterech, natenczas może być aż do czterech rzetelnych pierwiastków.

O składaniu Zrównań.

142. **W**idzieliśmy dopiero, że równania o dwu wyrazach kiedy są stopnia nieparzystego, na wartość niewiadomej niedają tylko jedną ilość rzetelną, a dwie jeżeli będą stopnia parzystego; ale

daia także iefzcze i infze wartości, które lubo są tylko zmyślone, iednakże przeto niemniéy są użyteczne, iako się to da widzieć przy rozwiązywaniu równań, i indziéy. W powszechności, każde równanie daie zawsze tylé wartościów wiadoméy, ile znajduje się iednościów w największym wykładniku tegoż równania. Spomiedzy tych wartościów które także nazywaią się pierwiastkami równania, iedne mogą bydź twierdzące a drugie przeczące, iedne rzetelne a drugie tylko zmyślone.

143. Zeby te prawdy okazały się tém iafniéy, trzeba uważyc że kiedy w iakiém równaniu wszystkie wyrazy przestawia się do iednéy części, i kiedy w niem wszystkie stopnie ilości x , rozporządzą się koleia podług swoich wielkościów, takową część równania można zawsze zmyślić sobie, iakoby była wypadkiem pochodzącym z mnożenia między sobą wielu czynników dwuflownych, nieskładanych, z których każdy miałby za spólny wyráz x .

Np. Równaniu $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$, dawszy następującą postać za przestawieniem wyrazów - $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$; natenczas daie się to poymować, że $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$, mogą powstawać z roz-

mno.

mnożenia między sobą tych trzech czynników dwuflownych, nieskładanych: $x - a$, $x - b$, $x - c$,

Jakóž rozmnożywszy między sobą te trzy czynniki, mieć będiém:

$$x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$$

$$-bx^2 + acx$$

$$-cx^2 + bcx$$

Zeby zaś to ostatnie równanie wychodziło na toż samo co poprzedzające, do tego nietrzeba więcéy, tylko głoskóm a, b, c , naznaczyć wartości takie, aby było $a + b + c = 8$; $ab + ac + bc = 7$, i $abc = 9$.

Dla wynalezienia tedy każdéy z tych ilościów np. a ; rozmnożywszy pierwsze równanie przez a^2 , a drugie przez a , skąd wypadnie $a^3 + a^2b + a^2c = 8a^2$, $a^2b + a^2c + abc = 7a$, i $abc = 9$, trzeba mówię, odiać drugie równanie od pierwszego, a do wynikającego stąd nowego równania dodać trzecie, co da $a^3 = 8a^2 - 7a + 9$, albo przestawiając, $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$.

Podobnymże sposobém znaleźlibyśmy, iż zrównanie odpowiadające wartości głoski b , byłoby $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, iako též że równanie odpowiadające wartości głoski c , byłoby znowu $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Skąd wynikają następujące podania.

M₃

144.

144. 1^{od} Ponieważ zrównanie które ma dać wartość głoski a , jest także samo iak te co dają wartości głosek b, c , i ponieważ nadto łatwo widzieć się daie, że te wartości głosek a, b, c , niemogą być sobie równe, przeto potrzeba ażeby jedno którekolwiek z tych trzech zrównań mogło dać wartości ilościów a, b i c ; więc każde z tych trzech zrównań musi mieć trzy pierwiastki, z których pierwszy będzie wartością ilości a , drugi wartością ilości b , a trzeci wartością ilości c .

2^{re} Każde z tych zrównań jest także samo, iak zrównanie zadane $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, z tą tylko różnicą, że a , albo b , albo c , przemienia się tu w x . Więc także i to zrównanie powinno mieć trzy pierwiastki, które muszą być wartościami ilościów a, b, c .

Więc ilościami które potrzebaby położyć zamiast a, b, c , w wyrazach $x - a, x - b, x - c$, żeby z rozmnożenia tych trzech czynników nieskładanych wypadło zrównanie $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, takowemi ilościami, mówię, są same pierwiastki tego zrównania.

145. Gdyby spółczynniki różnych stopniów ilości x , zamiast 8, 7, i. t. d. były inšzemi liczbami, albo gdyby zrównanie

za-

zamiast trzeciego stopnia było czwartego, piątego, i. t. d. wnioski któreśmy sobie uczynili zostaną zawsze też same. I tak mając w powszechności $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; gdzie p, q, r, s , rozumieją się być ilości wiadome. Tó zrównanie możnaby także uważać, iakoby wynikające z mnogości czterech czynników nieskładanych $x - a, x - b, x - c, x - d$. Jakóż te cztery czynniki rozmnożone między sobą dałyby:

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx \\ - cx^3 + adx^2 - acdx \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ + bdx^2 \\ + cdx^2 \end{aligned}$$

Zeby zaś to zrównanie było tóż samo co $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, trzeba ażeby wartości głosek a, b, c, d , były takie, żeby było $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$.

Pierwsze z tych zrównań rozmnożony przez a^3 , drugie przez a^2 , a trzecie przez a , i odiawszy drugie i czwarte zrównanie, od pierwszego i trzeciego razem złączonych, mieć będziemy $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra + ra - s$, albo $a^4 = pa^3 + qa^2 -$

M4

$-ra + s = 0$; podobnież znaleźlibyśmy i z równanie odpowiadające ilości b , byłoby $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; z równanie zaś należące do c , byłoby $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$; iako też że z równanie należące do d , byłoby $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. A zatem z równanie które daie a , powinno także dać $b, c, i d$, więc musi mieć cztery pierwiastki dające wartości ilościów a, b, c, d . A ponieważ każde z tych równań, iest toż samo co z równanie $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, przeto ilościami które trzebaby sobie obrać na wartość głosek a, b, c, d , żeby z rozmnożenia czterech czynników nieskładanych $x - a, x - b, x - c, x - d$, wynikło poprzedzające z równanie, ilościami, mówię, takimi, są same pierwiastki tego z równania.

146. Więc w powszechności 1^od Z równanie iakiegokolwiek bądź stopnia może być zawsze uważane iakoby pochodziło z mnogości tylu czynników dwustopniowych, nieskładanych, (z których każdy miałby za spólny wyrząd głosek oznaczającą ilość niewiadomą), ile będzie iednościów w największym wykładniku niewiadomey. 2^oe Dru-gie wyrazy tych ilościów dwustopniowych, są pierwiastkami tego z równania, każdy będąc wzięty z znakiem przeciwnym.

147.

147. Gdyby z równanie zamiast znaków na przemian twierdzących i przeczących, iak mieliśmy w poprzedzającym z równaniu $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, gdyby mówię, z równanie miało iakikolwiek inny porządek znaków, np. gdyby było takie, $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$; niemniéy, i tymże samym sposobem dałoby się dowieśdź, iż go zawżse wyrazićby można przez $(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$; gdzie a, b, c, d , są pierwiastkami tego z równania.

148. Ponieważ a, b, c, d , i. t. d. są pierwiastkami z równania, więc z tych z równań $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, wynika:

1^od Ze w z równaniu $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, a w powszechności mówiąc: Ze w każdym z równaniu, spółczynnik $-p$ drugiego wyrazu, wzięty z znakiem przeciwnym to iest $+p$, równa się summie wszystkich pierwiastków.

2^oe Ze spółczynnik q trzeciego wyrazu, równa się summie mnogościów wynikających z rozmnożenia między sobą tych pierwiastków po dwa.

3^oie Ze spółczynnik czwartego wyrazu wzięty z znakiem przeciwnym, równa się

się summie pierwiastków rozmnożonych po trzy; i tak dalej; i że nakoniec ostatni wyraz, jest mnogością wynikającą z rozmnożenia przez się wszystkich pierwiastków.

Są to prawdy powszechne, niechaj zachodzą bądź iak chce różne znaki w równaniu, byleby współczynnika każdego wyrazu parzystego brać zawsze z znakiem przeciwnym.

Skąd następuje: Ze w równaniu w którym brakuje drugiego wyrazu, zapewne znajdować się muszą pierwiastki twierdzące, i pierwiastki przeczące, i w takim razie summa iednych równa się summie drugich.

I tak w równaniu $x^3 + 2x^2 - 23x + 60 = 0$ summa trzech pierwiastków są -2 , summa ich mnogościów wynikających z rozmnożenia tychże pierwiastków po dwa, są -23 , summa mnogościów wynikających z rozmnożenia po trzy, albo mnogością trzech pierwiastków są $+60$. Jakóż temi trzema pierwiastkami są $+5$, -4 , -3 , iak się o tém przekonać można, położywszy zamiast x każdą z tych liczb w równaniu, bo każda z nich obróci pierwszą część równania w zero. Lecz iawia się, że summa tych trzech liczb to jest $+5$, -4 , -3 , są -2 ; że summa ich mnogościów rozmnożonych po dwie, to jest -20 , -15 , $+12$, są -23 ; i że mnogość wynikająca z rozmnożenia wszystkich trzech, jest $5 \times -4 \times -3$, to jest $+60$.

Podobnie, w równaniu $x^3 - 19x + 30 = 0$, ponieważ brakuje drugiego wyrazu, wnoszę stąd że w poprzedzającym równaniu muszą znajdować się pierwiastki i przeczące i twierdzące, i że w niem

sum-

summa iednych równa się summie drugich; iakóż takowemi trzema pierwiastkami są $+2$, $+3$ i -5 .

149. Uważając zrównanie iakoby powstałe z wielu czynników dwustopniowych, nieskładanych, łatwo pojąć można, iakim sposobem wiele i różnych liczb, mogą wszystkie rozwiązać zrównanie. Np. gdyby zadane było to zagadnienie: Znaleźć liczbę taką, od której odjęwszy 3, a dodawszy do niej kolejno liczby 4 i 5, ażeby dwie summy rozmnożone iedna przez drugą i przez resztę, uczyniły zero. Nazwawszy x , takową liczbę, będzie reszta $x - 5$, a na dwie summy wypadnie, $x + 4$, i $x + 3$; musi tedy być $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5) = 0$, to jest $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$; oczywista zaś jest, że ta mnogość albo onę równa $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5)$, może uczynić zero w trzech różnych przypadkach; to jest, jeżeli będzie $x = -4$, albo $x = -3$, albo też $x = 5$. Jakóż w pierwszym przypadku, wyżey położona mnogość przemieniłaby się na $0 \times (-4 + 3) \times (-4 - 5)$ albo prosto na 0; w drugim, na $(-3 + 4) \times (0) \times (-3 - 5)$, albo także na 0; a w trzecim, na $(5 + 4) \times (5 + 3) \times (0)$, albo podobnie na 0. Kiedy tedy będzie zadane takie zrównanie iako to, $x^3 + 2x^2 - 23x$

$-60=0$, natenczas niema żadney przyczyny któraby zniewalała do obrania wartości głoski x , raczèy ilość -4 aniżeli -3 , albo $+5$; bo każda z nich zarówno przemieniając pierwszą część w zero, rozwiązuje równanie.

150. Położymy tu ieszcze jedną uwagę, która także może mieć swoje użycie czność. Równania $a+b+c+d=p$, $ab+ac+ad+bd+cd=q$, $abc+abd+acd+bcd=r$, $abcd=s$, przywiodły nas były do jednakowego równania, czyto względem a , czyto względem b , czy też t. d. Przyczyna tego jest, bo wszystkie ilości a, b, c, d będąc w każdym równaniu jednakowo rozporządzone, niema żadnego powodu, aby jedna ilość wynaydowała się przez inne działania, iak druga; więc powiedziawszy w powszechności, jeżeli w szukaniu wielu ilościów niewiadomych, okoliczności wyciągają, używać do każdèy jednakowego rozumowania, jednakowych działań, i jednakowych ilościów wiadomych, wszystkie takowe ilości muszą bydź koniecznie pierwiastkami tegò samego równania; a zatem takie zagadnienie przywiedzie rachunek do równania składanego.

151. Ponieważ można uważać równanie, iakoby powstałe z mnogości wielu czynników nieskładanych, więc można go także uważać iakoby

powstałe z mnogości wielu czynników składowych.

I tak równanie trzeciego stopnia, da się uważać iakoby powstałe z mnogości wynikającej z rozmnożenia iednego czynnika drugiego stopnia, takiego iak x^2+ax+b , przez drugiego czynnika pierwszego stopnia, takiego iak $x+c$; iakóż x^2+ax+b , może zawsze wyrażać mnogość wynikającą z dwóch innych czynników nieskładanych.

Podobnież równanie czwartego stopnia, da się uważać iakoby powstałe z mnogości wynikającej z rozmnożenia czterech czynników nieskładanych albo dwóch czynników drugiego stopnia, albo dwóch czynników takich, żeby ieden był trzeciego, a drugi pierwszego stopnia.

152. Ponieważ równanie drugiego stopnia, może zawierać w sobie pierwiastki zmyślone, więc równania wyższych stopniów nad drugi, mogą także zawierać w sobie pierwiastki zmyślone.

O różnych przekształceniach Równań, iakie z niemi przedsiębrać można.

153. **Z** równania dają się przemieniać w różne odmiennie kształty, o których wprzód nam mówić należy, nim do rozwiązania ich przyśkipimy.

154. Jeżeli w równaniu przemieniają się znaki tych wyrazów, które zawierają w sobie ilości podniesione do stopniów nieparzystych, to pierwiastki tego równania twierdzące przemieniają się w przeczące, a odwrotnie przeczące przemieniają się w twierdzące.

Ja.

Jakóż, ażeby odmięniły się znaki w pierwiastkach równań, dosyć jest położyć $-x$ zamiast $+x$ w tych wyrażach, które zawierają w sobie ilości podniesione do parzystych stopniów, ale tylko przemienia znaki tych wyrażów, w których zawierają się ilości podniesione do stopniów nieparzystych.

155. Zeby przemienić równanie mające w sobie wyraży z mianownikami, i inne równanie w którymby nie było mianowników, a oraz zeby pierwszemu wyrażowi współczynnika nadać, trzeba w równaniu zamiast niewiadomey położyć inną niewiadomą, rozdzieloną przez mnożność wynikającą z wszystkich mianowników, a potem całe równanie rozmnóż przez mianownika, iakiego natenczas pierwszy wyraz mieć będzie.

Np. mając to równanie, $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$; robię $x = \frac{y}{mnp}$, i takową ilość położywszy zamiast x w poprzedzającym równaniu, mieć będzie $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; rozmnóżwszy przez $m^3n^3p^3$, wypadnie mi $y^3 + \frac{am^3n^3p^3}{m^3n^2p^2}y^2 + \frac{m^3n^3c}{mn^2p}y + \frac{m^3n^3p^3d}{p} = 0$; a po odprawieniu wskazanych dzielen, będzie $y^3 + ampy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

156. Gdyby $m, n, i p$ były ilości sobie równe, dosyćby było zrobić $x = \frac{y}{m}$. Skąd następuje, że

aby przemienić równanie, w którym wszystkie współczynniki są liczbami całymi, ale w którym pierwszy wyraz ma także swego współczynnika, na inne równanie, w którymby pierwszy wyraz nie miał współczynnika a oraz ażeby współczynniki innych wyrażów były liczbami całymi, trzeba zrobić $x =$

$\frac{y}{m}$; gdzie przez m rozumie się takowy współczynniki pierwszego wyrazu. Jakóż, mając np. równanie $m^3x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, i rozdzieliwszy go przez m , mieć będę, $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, w którymto równaniu wszystkie mianowniki są sobie równe.

157. Zeby wyrugować drugi wyraz z iakiego równania, trzeba zamiast niewiadomey położyć inną niewiadomą, pomnożoną współczynnikiem drugiego wyrazu równania, wziętym z przeciwnym znakiem, a rozdzielonym przez wykładnika pierwszego wyrazu.

Jakóż oznaczywszy sobie w powszechności takie równanie, przez $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + k \dots = 0$. Jeżeli zrobimy $x = y + s$, mieć będziemy dwa równania a trzy niewiadome, więc trzecią niewiadomą będzie nam wolno wynaleść przy pomocy takiego warunku iaki nam się spodoba.

A zatem zamiast stopnia do którego ilość x znayduie się być wyniesiona, położywszy w każdym wyrazie podobny stopień ilości $y + s$, mieć będziemy (126) rząd wyrażów następujący:

$$y^m + msy^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} s^2 y^{m-2} \text{ i. t. d. } + k = 0$$

$$+ ay^{m-1} + (m-1) \cdot asy^{m-2} \text{ i. t. d.}$$

$$+ by^{m-2} \text{ i. t. d.}$$

Uważając tedy y iako niewiadomą, iawnie jest że to zrównanie będzie bez drugiego wyrazu, jeżeli s jest takie, żeby było $ms + a = 0$, to jest jeżeli rozumić się będzie $s = -\frac{a}{m}$, wartość która wypada z tego zrównania na głoskę s . Lecz widzieliśmy niedawno, że na wartość iedną z niewiadomych, a zatém na wartość głoski s , wolno nam obracać sobie taką ilość iaka nam zdawać się będzie; więc ponieważ $-\frac{a}{m}$, jest taką wartością którą nżywszy można wyrugować drugi wyraz w zrównaniu y^m i. t. d., idzie zatém iż ażeby dane zrównanie $x^m + ax^{m-1} + \dots + t. d.$ przemienić na iedne zrównanie, w którémby niebyło drugiego wyrazu, trzeba zrobić $x = y - \frac{a}{m}$; co jest zasadą reguły podanej dopięro wyżej.

Np. gdyby potrzeba było wyrugować drugi wyraz z tego zrównania, $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$, robię $x = y - \frac{6}{3}$, to jest $x = y - 2$; położywszy tę wartość w daném zrównaniu, mieć będę

$$\begin{aligned} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 &= 0 \\ + 6y^2 - 24y + 24 & \\ - 3y + 6 & \\ + 4 & \end{aligned}$$

co po zebraniu, wychodzi na $y^3 - 15y + 26 = 0$ zrównanie w którém już niema drugiego wyrazu.

O rozwiązywaniu Zrównań składanych.

158. W tem wszystkiém co ma nastąpić, raz na zawsze rozumiemy, wszystkie zrównania już przedstawione do iednej części.

W powszechności, rozwiązać zrównanie iakiegokolwiek stopnia, np. iak to $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + k = 0$, iestto wynaléśdź na ilość niewiadomą tyle wartościów, ile będzie iednościów w naywyższym wykładniku téżże niewiadomey, z których wartościów każda byłaby wyrażona przez głoski p, q i. t. d. k , połączone między sobą iakimkolwiek sposobém; iednakże takim, aby te wartości położone w zrównaniu zamiast x piérwizą część przemienily w zero, bez względu na iakąkolwiek szczególną wartość głosek p, q , i. t. d.

Lubo sposób który do tego podać mamy, rościaga się nieokryślenie do wszelkich stopniów a zatém i do czwartego, iednakże my przestaniemy tu tylko na trzecim stopniu. Do czwartego zaś użyjemy innego sposobu, zasadzającego się wprawdzie na tychże fundamentach, ale prędszego. Każdy z tych sposobów na tem zależy, ażeby uważać zrównanie które ma bydź rozwiązane, iako wypadek wynikający z dwóch zrównań z dwiema niewiadomymi. Takowe dwa zrównania można zawsze przemienić w iedno, niezawierające w sobie tylko iedną niewiadomą. Cała tedy rzecz idzie o

Tom. II.

N

do-

dobranie takich równań, ażeby wyrugowanie jednego z nich, dało takie równanie, któreby poczytać można za toż samo, co było zadane. Zobaczmy więc, jakie dla tego powinny być pomienione równania.

Lubo ten sposób niewyciąga wyrugowania drugiego wyrazu z danego równania, jednakże z przyczyny że bez niego rachunki wypadają łatwiejsze, rozumiéć go będziemy iuż wyrugowanego sposobem podanym wyżej (157).

Daymy tedy że równanie zadane, iest takie, $x^m + px^{m-2} + q x^{m-3} + r x^{m-4} + \text{t. d.} + k = 0$.

Obiérám sobie dwa równania następujące, $y^m - 1 = 0$, i $a y^{m-1} + b y^{m-2} + c y^{m-3} + d y^{m-4} + \text{t. d.} + x = 0$, gdzie a, b, c , i. t. d. rozumieją się być ilościami niewiadomymi, które wynaydą się w sposób niżej położony.

Przy pomocy tych dwóch ostatnich równań, wyruguje się y , co przyprowadzi do równania wyrażonego w x , a będącego stopnia m , i niemającego w sobie drugiego wyrazu.

Spółczynniki różnych stopniów ilości x , składać się będą z ilościów a, b, c , i z różnych stopniów onychże.

Ka-

Każdego spółczynnika trzeba zwrócić spółczynnikowi podobnegoż stopnia ilości x , w zadanem równaniu $x^m + p x^{m-1} + \text{t. d.}$ skład na wynalezienie ilościów a, b, c , i. t. d. wypadnie tyle równań, ile iest tychże ilościów. Po wynalezieniu ilościów a, b, c , i. t. d. znajdą się wszystkie pierwiastki czyli wartości ilości x , położywszy takowe wartości ilościów a, b, c , i. t. d. w równaniu $a y^{m-1} + b y^{m-2} + c y^{m-3} + d y^{m-4} + \text{t. d.} + x = 0$, tudzież zamiast y kładąc koléjno każdy z pierwiastków równania $y^m - 1 = 0$, które dadzą się łatwo wynaleść iak zobaczymy niżej.

Przystósowanie do trzeciego stopnia.

159. Niechay tedy będzie $x^3 + p x + q = 0$, równanie zadane do rozwiązania.

Biorę $y^3 - 1 = 0$, i $a y^2 + b y + x = 0$. Zebym wyrugował y , mnożę to ostatnie równanie przez y , a położywszy w niem zamiast y^3 wartość iego 1, wyciągnioną z równania $y^3 - 1 = 0$, mam $b y^2 + x y + a = 0$. To równanie znowu mnożę przez y , i położywszy w niem zamiast y^3 tęż samą wartość iego 1, wyżej wynalezioną, mam $x y^2 + a y + b = 0$.

Co mi da te trzy równania:

$$a y^2 + b y + x = 0$$

$$b y^2 + x y + a = 0$$

$$x y^2 + a y + b = 0$$

Przy pomocy dwóch pierwszych równań, wynayduję wartość ilości y^2 i y , podług sposobu przepisanego do równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, i mam $y^2 = \frac{xx - ab}{bb - ax}$, i $y = \frac{aa - bx}{bb - ax}$.

N 2

Te

Te wynalezione wartości kładę w trzecim równaniu $xy^2 + ay + b = 0$, i mam $x^3 - abx + a^3 - abx$ $+ b = 0$, a po wyrugowaniu mianownika i po zebraniu, $x^3 - 3abx + a^3 = 0$.

Teraz uważam, iż ażeby to równanie było toż samo co równanie $x^3 + px + q = 0$, trzeba aby $-3ab = p$, zaś $a^3 + b^3 = q$; i teto będą dwa równania z których wyciągnę wartości głosek a i b .

Pierwsze daie mi $b = -\frac{p}{3a}$; co położywszy w drugim równaniu, mam $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$, albo rozmnożywszy przez a^3 i przestawiwszy, $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$; równanie które (141) da się rozwiązać podobnie, i które zatem przemieni się w to, $a^6 - qa^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, a potem na $a^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$; przestawiwszy zaś będzie $a^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$, a naostatek, $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Żeby mieć b , kładę w równaniu $a^3 + b^3 = q$, wartość ilości a^3 wyżej wynalezioną, skąd mam, $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} + b^3 = q$, a zatem $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$; więc będzie $b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Zrównanie zaś $ay^2 + by + x = 0$, daie $x = -ay^2 - by$, więc będzie $x = -y^2 \sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - y \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Niektądzie się tu tylko jeden znak przed drugim znakiem pierwiastkowym, bo niepotrzebuje tylko idnney wartości głoski a , i to byle której, każda równo zadofyć uczyni.

$+ \frac{1}{27}p^3]$ $- y \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$, któreto równanie zawiera w sobie trzy pierwiastki.

Nieidzie więcej tylko o wynalezienie wartości głoski y . A że równanie $y^3 - 1 = 0$, daie $y^3 = 1$, więc wyciągnawszy pierwiastek szczęścienny, będzie $y = 1$. Żeby mieć wartość także innych dwóch pierwiastków, dzielę (151) $y^3 - 1$ przez $y - 1$, i mam $y^2 + y + 1$, co zrównawszy zerowi, mieć będę nowe równanie zawierające w sobie inne dwa pierwiastki. To tedy równanie $y^2 + y + 1 = 0$, rozwiązane, daie mi $y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; więc trzy

wartości głoski y będą następujące, $y = 1$, $y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Te wartości kładąc kolejno w równaniu $x = -y^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - y \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$, i uważając że ilości $(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2})^2$, iako téż $(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2})^2$ przemieniaią się pierwsza na $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, a druga na $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, na wartości głoski x wypadną trzy ilości następujące.

$$x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

160. Zastanowiwszy nad temi trzema wartościami głośki x , dopiero wynalezionemi, daje się widzieć, że gdy p będzie ilością twierdzącą, ilość $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ będzie wypadać zawsze także ilością twierdzącą; bo $\frac{1}{4}q^2$ które jest kwadratem ilości $\frac{1}{2}q$, musi być zawsze ilością twierdzącą, chociażby było przeczącą. Taż sama ilość jeszcze będzie twierdzącą, kiedy $\frac{1}{4}q^2$ będzie większe aniżeli $\frac{1}{27}p^3$, p rozumiejąc być ilością przeczącą. W tych dwóch przypadkach dwie ostatnie wartości x są tylko zmyślone. Bo w tym razie dwa znaki pierwiastków sześciennych, będąc ilościami rzetelnymi a nierównymi, ich mnogości pochodzące, z rozmnożenia przez $\sqrt[3]{(-3)}$ i przez $-\sqrt[3]{(-3)}$ to jest przez ilości poprzedzone znakami przeciwnymi nieznoszą się z sobą; a zatem w każdej z tych dwóch wartości głośki x , zostanie się ilość zmyślona, tak że tylko pierwsza wartość będzie rzetelną wartością głośki x .

161. Ale gdyby p będąc ilością przeczącą, $\frac{1}{27}p^3$ znalazło się być większe aniżeli $\frac{1}{4}q^2$, na ten czas $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ byłoby ilością przeczącą, i $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$ byłaby ilość zmyślona; atoli trzy wartości głośki x w takim razie byłyby ilościami rzetelnymi.

Lubo to jest pewna że w przypadku dopiero wymienionym, trzy pierwiastki są ilościami rzetelnymi, jednakże dotąd niemamy sposobu, żeby je mieć pod postacią rzetelną, tylko przez przybliżenie. Trzeba tedy w takim razie udać się do reguł przybliżenia które podamy niżej. Ten przypadek, nazywa się *przypadek przybliżony*.

Tym czasem zastanówmy się nad przykładem co do pierwszego przypadku.

Daymy że mają być znalezione pierwiastki tego równania, $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$. Poczynam naprzód podług (157) od wurugowania drugiego wyrazu, robiąc $y = x - 2$, co mi przemieni dane równanie, na $x^3 - 15x - 26 = 0$.

Lecz

Lecz każde równanie trzeciego stopnia niemające drugiego wyrazu, oznaczyliśmy przez $x^3 + px + q = 0$; więc będzie $p = -15$, $q = 26$; a zatem $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; $\frac{1}{27}p^3 = -125$; więc będzie $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt[3]{(169 - 125)} = \sqrt[3]{(44)}$; a zatem trzy wartości głośki x będą następujące.

$$x = -\sqrt[3]{13 + \sqrt[3]{44}} - \sqrt[3]{13 - \sqrt[3]{44}}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt[3]{(-3)}}{2} \sqrt[3]{13 + \sqrt[3]{44}} + \frac{1 - \sqrt[3]{(-3)}}{2} \sqrt[3]{13 - \sqrt[3]{44}}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt[3]{(-3)}}{2} \sqrt[3]{13 + \sqrt[3]{44}} + \frac{1 + \sqrt[3]{(-3)}}{2} \sqrt[3]{13 - \sqrt[3]{44}}.$$

To jest, że pierwszy pierwiastek jest przeczący, a dwa ostatnie są zmyślone.

Przystósowanie do czwartego stopnia.

162. Żeby poprzedzający sposób przystosować do 162. Z równań czwartego stopnia, trzeba obracać sobie te dwa równania, $y^4 - 1 = 0$, i $y^3 + ay^2 + by + c = 0$. Z tych ostatnie rozmnożywszy trzy razy raz po raz przez y , a za każdym razem zamiast y^4 położywszy wartość onego 1, wypadną cztery równania wyrażone w y i x ; z trzech takowych równań wyciągnąwszy wartości ilościów y^3 , y^2 , i y , i położywszy je w czwartym równaniu, wypadnie nowe równanie czwartego stopnia, wyrażone w x , którego każdy wyraz, przyrównywa się do odpowiadającego wyrazu w powszechnym równaniu czwartego stopnia.

163. Takowe rozwiązanie można uczynić jeszcze łatwiejszem, obrawszy sobie raczej te dwa równania, $y^2 - 1 = 0$, i $y(ax + b) + x^2 + c = 0$. Z tych ostatnie rozmnożywszy przez y , i położywszy w niem zamiast y^2 onego wartość 1, złożą się następujące dwa równania

$$y(ax + b) + x^2 + c = 0.$$

$$y(x^2 + c) + ax + b = 0.$$

N₄

W

W drugim z tych równań położywszy zamiast y wartość onego, wyciągniętą z pierwszego równania, będzie.

$$x^4 + 2cx^2 - 2abx + cc = 0 \\ - aax^2 \quad - bb$$

A porównawszy wyrazy tego równania, z odpowiadającymi wyrazami powszechnego równania czwartego stopnia $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, wypadnie $2c - aa = p$, $-2ab = q$, $cc - bb = r$. Z tych trzech równań pierwsze daie, $c = \frac{p + aa}{2}$, drugie daie, $b = \frac{-q}{2a}$; położywszy te wartości w trzecim

równaniu, po uczynionem zebraniu będzie, $a^6 + 2pa^4 + (pp - 4r)a^2 - qq = 0$. Równanie które lubo szóstego stopnia, iednakże rozwiązuie się tak iak gdyby było trzeciego, bo w niem niezayduią się tylko stopnie ilości a^2 .

Wynalazłszy tedy a^2 sposobem wyżey podanym (159), łatwo potem wynaydzie się także a , a zatem b i c , przy pomocy równań $b = \frac{-q}{2a}$ i $c = \frac{p + aa}{2}$. A tak równanie $y(ax + b) + x^2 +$

$c = 0$ rozwiązuie, uważając w niem y , b , i c iako ilości w adome, da na każdą wartość głoski y , dwie wartości wyrażone w x . Ze zaś równanie $y^2 - 1 = 0$, albo $y^2 = 1$, daie na y te dwie wartości to iest $y = 1$ i $y = -1$, więc położywszy koléyno zamiast y te dwie wartości, wypadną cztery wartości głoski x .

O spółmiérnych Dzielnikach Równań.

164. Jeżeli między pierwiastkami równania, niektóre mają zaydować się spółmiérne, to podług uwag i sposobów następujących łatwiéy będzie można wy-

na-

naléśdź ie, aniżeli by wynalazły się przez rozwiązuie powszechnego równania.

165. Ponieważ ostatnim wyrazem równania, iest mnogość powstaia z wszystkich pierwiastków, (148), więc w iakiémkolwiek równaniu żadna liczba nie może być wartością spółmiérną ilości x , jeżeli ostatniego wyrazu doskonale dzielić niebędzie. Możliaby tedy brać ieden po drugim wszystkich dzielników ostatniego wyrazu, i koléyno zamiast x kładź ie w równaniu, tak z znakiem $+$ iako téż z znakiem $-$, (gdyż x niemniéy może mieć wartości przeczące iako téż i twierdzące): a na ten czas z dzielników użytych, który zadane równanie przemieni w zero, takowy będzie wartością głoski x .

Ale takowe działanie częstokroć wypadłoby bardzo długie; dla tego zobaczmy po czém poznać dzielniki które mają być użyte a które odrzucone; ale wprzód należy wiedzieć iak się zayduią wszystkie dzielniki liczby zadanej.

166. Zeby znaléśdź wszystkich dzielników liczby iakiéykolwiek, trzeba ią rozdzielić koléyno przez te początkowe liczby przez które da się dzielić, poczynając od nayprostszych, i dzieląc przez każdą z nich póty póki można. Potém nap-

pi-

piśzą się w iedney linii te wszystkie liczby początkowe, każda z nich tyle razy mogła być rozdzielć; a dopiero rozmnożywszy je między sobą po dwie, po trzy, po cztery, i. t. d. takowe mnogosci i liczby początkowe wynalezione, będą żadanymi dzielnikami żadaney liczby.

Np. Zeby mieć wszystkich dzielników liczby 60. Dzielę 60 przez 2, co mi daie 30, dzielę 30 przez 2, co mi daie 15 dzielę 15 przez 3, co mi daie 5; naostatek dziele 5 przez 5, co mi daie 1. A zatem pierwszemi dzielnikami będą 2, 2, 3, 5; które rozmnożone po dwa, dadzą 4, 6, 10, 6, 10, 15. Rozmnożywszy je zaś po trzy, mieć będą 12, 20, 30, 30, a nakoniec rozmnożywszy je po cztery, mam 60.

Zebrawszy te wszystkie dzielniki, nierachując jednak tych które znajdują się bydź powtórzone, i przydawszy do nich iedność iako dzielnika każdej iakiejkolwiek liczby, wszystkie dzielniki liczby 60, będą następujące

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

167. Daymy teraz że mają! bydź wynalezione spólmierne dzielniki iakiego zrównania, jeżeli ich ma to zrównanie, np. zrównania czwartego stopnia w powszechności tak wyrażonego: $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Oznaczmy sobie takowego dzielnika przez $x + a$; w takim razie żadane zrównanie, może bydź uważane (151) iakoby powstaie z rozmnożenia ilości $x + a$, przez czynnika trzeciego stopnia, takiego iak iest $x^3 + kx^2 + mx + n$; rozmno-

zmnożmy tedy tych dwóch czynników iednego przez drugi, mieć będziemy zrównanie:

$$x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an = 0 \\ + ax^3 + akx^2 + amx$$

które ponieważ powinno bydź toż samo, co zrównanie $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, więc wynikną stąd następujące zrównania, $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, $an = s$, albo $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, $k = \frac{q - m}{a}$, i $p = \frac{k - p}{a}$.

Daymy więc teraz, iż obrawszy sobie a za iednego z dzielników ostatniego wyrazu, chciałbym wiedzieć jeżeli ten dzielnik może bydź użyty; zrównania $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, i. t. d. wskazują następujące działania, to iest: rozdzieli ostatni wyráz zrównania przez obranego dzielnika; odéym wieloráz od spólczynnika gloski x , a resztę rozdzieli przez tegoż dzielnika; odéym ten drugi wieloráz od spólczynnika gloski x^2 , a resztę znowu rozdzieli przez tegoż dzielnika, i tak dalej wciąż postępuy sobie, aż przydziesz do spólczynnika drugiego wyrazu zrównania, na który powinienś znalazdź 1. za wieloráz. Jeżeli dzielnik tym wszystkim dzieleniom zadowolę

fyć czyni, to pewnie może być obrany za a ; ale jeżeliby choć tylko jedno dzielenie nie dało się odprawić spełna, to liczba obrana powinna być odrzucona.

Ponieważ jedność jest zawsze dzielnikiem każdej liczby, rzecz oczywista, że ię także potrzeba próbować tak z znakiem $+$ iako też z znakiem $-$; ale to prędzēy będzie można odbyć, kładąc kolejno w równaniu zamiast x , $+$ i $-$; co bardzo łatwo da się uczynić, bo wszelkim stopniem ilości $+$ i jest $+$ i, a wszelkim stopniem parzystym ilości $-$ i, jest $+$ i, wszelkim zaś stopniem nieparzystym tēyże ilości $-$ i, jest $-$ i. Jeżeli żadna z tych dwóch użytych ilościów nie da na wypadek 0, to zamiast a niebędzie można wziąć ani $+$ i ani $-$ i.

To założywszy, zobaczmy iak sobie postąpić trzeba w doświadczeniu wszystkich innych dzielników ostatniego wyrazu.

Daymy iż mamy zadane pytanie, jeżeli równanie $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$, ma iakiego dzielnika spółmiernego. Szukam, wszystkich dzielników ostatniego wyrazu 15, oprócz jedności, a znalazłszy ich, piszę je porządkiem podług wielkości (biorąc je z znakami iużto $+$ iużto $-$), iako niżej widzieć się daia.

x⁴

$$\begin{array}{r} x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0. \\ \text{Dzieln. liczb: } 15 \dots \begin{array}{r} + 15 + 5 + 3 - 3 - 5 - 15 \\ + 1 + 3 + 5 - 5 - 3 - 1 \\ - 21 - 23 - 25 - 15 - 17 - 19 \\ + 5 \\ + 18 \\ - 6 \\ - 3 \\ + 1 \end{array} \end{array}$$

Dzielię ostatni wyraz $+ 15$ przez każdą z liczb pierwszēy linii, a wielorazy piszę w drugiēy linii.

Odēymuię każdy wyraz drugiēy linii od spółczynnika głoski x , to jest od $- 20$, a zostaiące reszty piszę w trzeciēy linii.

Dzielię każdy wyraz tēy trzeciēy linii przez wyraz odpowiadaiący, położony w pierwszēy linii, a co znajdę iaki doskonały wieloraz, to go napiszę. Tu nie znajduię tylko ieden, to jest $+ 5$; a zatem jestem pewien, że to równanie niemoże mieć tylko iednego dzielnika spółmiernego. Ale bądźto że niewypadnie tylko ieden doskonały wieloraz, bądź też że ich będzie więcéy, trzeba sobie dalēy postąpić w następujący sposob.

Odēymuię każdy wieloraz od spółczynnika 23 głoski x^2 , a reszty piszę w piątēy linii; iak tu 18.

Dzielię podobnie iak przedtēm każdą z tych reszt, przez odpowiadaiący wyraz pierwszēy linii, a każdy wieloraz piszę poniżēy; iak tu $- 6$.

Odēymuię każdy z tych nowych wielorazów od spółczynnika $- 9$ głoski x^3 , a pozostałe reszty piszę poniżēy; iak tu $- 3$.

Naostatek dzielię te reszty iak piērwēy przez odpowiadaiące wyrazy piērwzēy linii. Znayduię na wieloraz $+ 1$; skąd wnoszę że odpowiadaiący wyraz $- 3$ piērwzēy linii, powiniēn być wzięty za a ; a zatem że dzielnik $x + a$, przemienia się na $x - 3$; to jest że $x - 3$ dzieli równanie; więc $x = 3$, jest wartością spółmierną głoski x , w danēm równaniu.

O

O sposobie przybliżenia się do pierwiastków
zrównań składanych.

168. **W** sposobie który mamy podać, przybliżenia się w zrównaniach do wartości ilości niewiadomej, rozumiemy wartość takowego pierwiastka już być wynalezioną, i już przybliżoną ale tylko do iednej dziesiątnej. Zobaczymy tedy naprzód, iak wynayduie się ta pierwsza wartość. Obierzmy sobie na przykład zrównanie, $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Kładę w tym zrównaniu zamiast x , kilka liczb iużto twierdzących iuż przeczących, póki aż dwa takowe położenia iedno po drugim następujące, niedadzą mi wypadków poprzedzonych znakami przeciwnymi. A kiedy znajde dwa takowe wypadki, wnoszę stąd że wartość ilości x , zawiera się między dwiema liczbami, które położone zamiast x , dały pomienione dwa wypadki, tak że jeżeli te dwie liczby nieróżnią się iedną od drugiey tylko o dziesiątą część iednej z tych dwóch liczb, mieć będą przybliżoną wartość której szukam, wzięwszy iedną lub drugą liczbę, albo środek arytmetyczny między niemi.

Ale jeżeli o więcej między sobą różnić się będą, to działam iak następuje.

Kładę w zrównaniu $x^3 - 5x + 6 = 0$, liczby 1, 2, 3, 4, i. t. d. ale postrzegam wprędce, że te wszystkie liczby dają mi wypadki twierdzące, i że zawsze dawałyby takie bez końca, dla czego zamiast pierwszych kładę raczej liczby 0, -1, -2, -3, i. t. d. skąd przychodzę do wypadków następujących.

Liczby użyte	Wypadki
0	6
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1

Za-

Zastanawiam się tedy nad dwoma ostatniemi, i wnoszę sobie że ieden z pierwiastków zrównania, musi znajdować się między -2 i -3. Ale że te liczby różnią się między sobą o 1, które warto więcej iak dziesiątą część każdej, przeto biorę środek arytmetyczny między temi dwiema liczbami, to jest biorę połowę -2,5 ich summy -5. Kładę w zrównaniu 2,5 zamiast x , i znajduję na wypadek ilość +2,875 to jest ilość twierdzącą; a stąd wnoszę sobie, że pierwiastek znajdować się musi między -2,5 i -3. Biorę tedy środek między -2,5 i -3, to jest -2,7 zaniedbawszy ilości mniejsze nad dziesiątne, i kładę -2,7 w zrównaniu zamiast x , mi da wypadek -0,183 to jest ilość przeczącą. A zatem, ponieważ -2,5 dały wypadek twierdzący, a -2,7 dały wypadek przeczący, więc wartość ilości x zawierać musi między -2,5 i 2,7; te zaś dwie liczby nieróżnią się między sobą tylko o 0,2 to jest o mniej iak o dziesiątą część każdej z tych dwóch liczb; więc wzięwszy między niemi środek, pokaże się wartość główki $x = -2,6$, niechybiająca tylko o iedną dziesiątą.

Tym sposobem znalazłszy liczbę któraby się nieróżniła od x tylko o dziesiątą część wartości téżże ilości, zmyślam sobie x być równe takowej liczbie pomnożonej nową niewiadomą z ; to jest iak tu zmyślam sobie $x = -2,6 + z$, i kładę tę ilość w zrównaniu zamiast x ; ale że z jest naywięcej dziesiątą częścią ilości 2,6 i że zatem kwadrat iego będzie naywięcej setną częścią kwadratu pomienioney liczby, a sześcián iego naywięcej tysięczną częścią sześciánu téżże liczby, więc kładąc w zrównaniu takową wartość zamiast x , zaniedbuję wszystkie stopnie główki z , przewyższające pierwszy stopień; i ażeby uniknąć niepotrzebnych rachunków, w składaniu sześciánu i innych stopniów gdyby się znajdowały z ilości -2,6 + z , nieprzypuszczam tylko dwa pierwsze wyrazy, które mi dać powinna reguła wyżej przepisana (126).

Co

Co żeby się porządnie odprawiło, piszę iak następuje:
 $x^3 = (-2,6 + z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z + 3(-2,6)z^2 + z^3$
 $= -5(-2,6 + z) = -5(-2,6) - 5z + 6 = +6$

Zgromadziwszy tedy wszystko, mieć będzie na wypadek zrównanie, $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z + 3(-2,6)z^2 + z^3 - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, albo po odprawieniu wskazanych działań i po zebraniu, $15,28z + 1,424 = 0$

skąd wyciągam $z = -\frac{1,424}{15,28}$, a przemieniwszy na

dziesiętne, będzie $z = -0,09$; ilość w której przestaię zaraz na pierwszej cyfrze mającej wartość, z dzielenia wypadającej. W powłóczności, dzielania niepotrzeba ciągnąć tylko do tylu cyfer wartujących (biorąc z pierwszą wynalezioną), ile znayduie się mieysc między tą cyfrą, i między pierwszą cyfrą pierwszcy wartości przybliżony, głoski x ; tu między 9, (które są pierwszą cyfrą wartującą w wielorazie 0,09) i między 2, (które są pierwszą cyfrą ilości 2,6, to jest pierwszcy wartości przybliżony głoski x) nieznayduie się tylko jedno mieysce, dla tego przestaię na pierwszej wartujący cyfrze 9.

Wartość tedy głoski x , to jest $x = -2,6 + z$ przemienia się na $x = -2,6 - 0,09$, to jest na $x = -2,69$.

Zeby zaś mieć tę wartość ieszcze doskonalszą, zmyślam sobie znowu $x = -2,69 + t$. Co mi da $x^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 t + 3(-2,69)t^2 + t^3$
 $= -5t + 6 = +6$. A zatem po odprawionych działaniach, będzie $-0,015109 + 16,7083t = 0$; skąd wyciągam, $t = \frac{0,015109}{16,7083}$, i mam naostatek $t = 0,000904$.

Wartość tedy głoski x , to jest $x = -2,69 + t$, przemienia się na $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$

Gdyby potrzeba wyciągała ieszcze doskonalszcy wartości, trzebaby zrobić $x = -2,689096 + u$, i dokończyć tymże sposobem co wyżej.

RO-



ROZDZIAŁ DRUGI.

W którym daie się przystósowanie Algebry do Arytmetyki i do Geometrii.

169. **O**znaczmywszy sposobem powłócznym, każdą z ilościów bądźto wiadomych bądź niewiadomych, wchodzących w zagadnienie, i wyraziwszy w równaniach wszystkie warunki zawierające się w zagadnieniu, można go już zupełnie z pamięci spuścić, niezabawiając się potem, tylko iedynie równaniami i przystósowaniem reguł onym przyzwoitych. Natenczas byleby mieć w przytomnéj pamięci to znaczenie, które się dało bądźto znakom

Tom. II.

O

kom

kóm, bądźto rozporządzeniu głosek, każde równanie służyć może niby za jaką xiażkę, gdzie z większą łatwością wyczytać się daia różne stofunki które wiążą ilości iedne z drugimi. Można także przy pomocy rozmaitego przystofowania reguł przepisanych w piérwizym Rozdziale, dawać takowym równanióm coraz nowe postaci, pod którémiby pomiénione stofunki tym prędzay dały się postrzedz. Słowém, równania uważać sobie można. iakoby zbiór iaki własnościów, należących do ilościów zawieraiących się w tych równaniach, i rozwiązań powszechnych wielkiéy liczby zagadnién, o których wcale niemyśliło się, i o których ani nawet domyslać się można było, żeby z główném zagadniénim miały tak bliski związek.

Jakóž, ponieważ reguły słuzące do wynalezienia wartości ilościów niewiadomych, maią wszystkie za cél, żeby każdą niewiadomą przestawić tylko samę iedną do piérwizéy części równania, a w drugiéy części żeby się znaydowały wszystkie inne ilości, i ponieważ te reguły oczywiscie da-

te

ia się przystofować do każdéy którýkolwiek ilości, zawieraiacéy się w równaniu, przeto iawna iest, że przy pomocy tychże reguł, zawżse można wszelką iakąkolwiek ilość wchodzącą w równanie, samę iedną przestawić do piérwizéy części, tak żeby inne wszystkie składały drugą część. A na ten czas rzecz znayduie się bydz w takim przypadku, iak gdyby trzeba było rozwiązać zagadniénie, w którém wszystkie ilości połozone w drugiéy części, byłyby wiadome, a sama tylko ilość przestawiona do piérwizéy części, znaydowała się bydz niewiadoma. A stąd pokazuje się, że każde równanie rozwiązuie tyle różnych zagadnién, ile zawiera w sobie różnych ilościów. Obiaśniemy to przykładami.

Własności powszechne Progressyów Arytmetycznych.

170. **W**idzieliśmy wyžey (Arytm. 190), że każdy którykolwiek wyráz, Progressyi Arytmetycznéy rosnacéy, składa się z piérwszego wyrazu, pomnożonego o różnicę powszechną, tyle kroć powtó-

02

rzo-

rzoną, ile znajdować się będzie wyrazów przed tym wyrazem, o który rzecz idzie.

Jeżeli tedy oznaczmy przez a liczebną wartość pierwszego wyrazu; przez u wartość tego wyrazu o który rzecz idzie; przez d różnicę spólną albo różnicę w Progresji panujący; a naostatek przez n całą liczbę wyrazów; natenczas, liczba wyrazów poprzedzających wyraz u , będzie $n-1$; i podanie dopiero wyżej wzmiankowane, da się Algebraicznie wyrazić w tém równaniu, $u = a + (n-1)d$, przez które można dóysdź wartości ostatniego wyrazu u , kiedy będą wiadome te trzy rzeczy, to jest różnica progresji d , liczba wyrazów n , i wartość pierwszego wyrazu a .

Ale że w to równanie wchodzi cztery ilości, więc mówię że przez nie rozwiązują się cztery zagadnienia powszechne. Jakóż:

1^o Jeżeli uważać będziemy a iako niewiadomą, i szukać będziemy jego wartości podług reguł podanych w pierwszym Rozdziale, wypadnie $a = u - (n-1)d$, skąd po-

ka-

kazuje się, iż chcąc znaleźć pierwszy wyraz Progresji Arytmetycznej rosnącej, trzeba odjąć od ostatniego wyrazu u , różnicę d powtórzoną $n-1$ razy, to jest różnicę wziętą tyle razy mniej jednym razem, ile znajduje się w Progresji wszystkich wyrazów.

2^o Poczytawszy znowu n za niewiadomą, zrównanie $u = a + (n-1)d$, które nieco innego jest, tylko $u = a + nd - d$, po przestawieniu daie, $nd = u - a + d$, a po rozdzieleniu będzie, $n = \frac{u - a + d}{d} =$

$\frac{u-a}{d} + 1$; co mi znać daie, że mając wiadomy pierwszy wyraz a , ostatni wyraz u , i różnicę progresji arytmetycznej d , potrafię wynaleźć liczbę wszystkich wyrazów progresji, odjąwszy pierwszy wyraz od ostatniego, a resztę rozdzieliwszy przez różnicę d , i naostatek dodawszy jedność do wielorazu. Np. jeżeli wiem, że pierwszym wyrazem progresji są 5, ostatnim 37, a różnicą 2; od 37 odęmuję 5, zostaje mi 32, które rozdzielone przez różnicę 2,

O 3

da-

daia na wieldráz 16, do tych 16 dawfzy 1, wypada mi na liczbę wfzytkich wyrazów téy progressyi 17. ^{3cie} Naostatek, ieżeli uważać będę d , iako niewiadomą, w zrównaniu $u = a + (n-1)d$, po przestawieniu mieć będę, $(n-1)d = u - a$, a po rozdzieleniu przez $n-1$, będzie $d = \frac{u-a}{n-1}$; co mi pokazuje, że chcąc mieć wiadomą różnicę mającą panować w progressyi arytmetycznéy, z którejby piérwszy i ostatni wyraz, iako téż liczba wfzytkich wyrazów były znaiome, trzeba odiać piérwszy wyraz od ostatniego, a resztę rozdzielić przez liczbę wyrazów, mniéy iednym. Ta reguła wychodzi na owę (Arytm. 193), przepisana do wciśnienia pewnéy liczby ilościów śrzednich proporcjonalnych, między zadane dwie ilości. Powiedziało się tam, iż trzeba odiać większą od mniéyszéy, a resztę rozdzielić przez liczbę śrzedków, pomnożoną o iedność, co oczywiscie wychodzi na iedno; ponieważ liczba śrzedków iest mniéysza dwiema iednościami, od liczby wyrazów całej progressyi.

To

To więc samo iedno zrównanie, $a = u + (n-1)d$, daie nam rozwiązanie czterech zagadnień powszechnych, albo téż tego iednego, w którym zawierają się wfzystkie cztery, to iest: *Z tych czterech rzeczy, iakie są piérwszy i ostatni wyraz, liczba wyrazów, i różnica progressyi arytmetycznéy, trzy którekolwiek mając wiadome, żeby wynależać czwartą.*

271. Każda inna własność powszechna, wyrażona także w sposób powszechny, tą samą drogą doprowadziłaby nas do rozwiązania tylu różnych zagadnień, ile wchodzić będzie ilościów w wyrażenie téżże własności.

Np. ieszcze i to iest własnością progressyi arytmetycznych: *Iż ażeby mieć sumę, wynikającą z dodania wfzytkich wyrazów iakiéykolwiek bądź progressyi arytmetycznéy, trzeba dodać piérwszy wyraz do ostatniego, a wypadek rozmnożyć przez połowę liczby wfzytkich wyrazów.*

Np. Zeby mieć sumę, wynikającą z dodania stu piérwszych

O 4

wy-

wyrazów téy progressyi $\div 1.3.5.7.$ i. t. d. który setnym wyrazem byłoby 199; do ostatniego wyrazu 199, dodając pierwszy wyraz 1, a wypadek 200 mnożę przez 50, to jest przez połowę liczby wyrazów; co mi da 10000, na summe wynikającą z dodania stu pierwszych wyrazów nieparzystych.

Nastąpi zaraz niżej objaśnienie téy własności, teraz zaś żebyśmy się od rozpoczętej rzeczy nieoddalali, zachowawszy też same oznaczenia co wyżej, jeżeli nadto nazwiemy s summe wynikającą z dodania wszystkich wyrazów, mieć będziemy na wyrażenie Algebraiczne pominionéy własności, $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

To równanie, służy do rozwiązania następującego zagadnienia powszechnego, w którym znajduie się ich cztery: *Z tych czterech rzeczy, jakie są pierwszy i ostatni wyraz, liczba wyrazów, i summa wynikająca z dodania wszystkich wyrazów progressyi arytmetycznéy, mając trzy którekolwiek rzeczy wiadome, żeby wyznaleśdż czwartą.*

Ja-

Jakóż i^{od} jeżeli a, u, i, n , będą znaiome, zrównanie pokaże zaraz bezśrzednie wartość głoski s . 2^{re} Jeżeli zaś są znaiome a, u, i, s ; żeby mieć n , trzeba wyrugować dzielnika 2, co da $2s = (a + u) \times n$ albo $(a + u) \times n = 2s$; a rozdzieliwszy przez $a + u$ będzie, $n = \frac{2s}{a + u}$; zrównanie dające wartość głoski n , bo ilości a, u, s , składające tę wartość, rozumieją się bydz wiadome. 3^{cie} i 4^{te} Jeżeli a, s, i, n , albo u, s, i, n , były znaiome, żeby mieć u albo a , trzeba powrócić do zrównania $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, z którego wyrugowawszy ułamek, będzie $2s = (a + u) \times n$, a rozdzieliwszy przez n , wypadnie $a + u = \frac{2s}{n}$, skąd dopiero wyciąga się $u = \frac{2s}{n} - a$, to jest, wartość zadofyc czyniąca pierwszemu zagadnieniu, i $a = \frac{2s}{n} - u$, to jest, wartość zadofyc czyniąca drugiemu zagadnieniu.

Powróćmy teraz do owéy własności, którą obiecaliśmy objaśnić.

Ja-

Jawna jest, że jeżeli oznaczymy iak wyżej, pierwszy wyraz przez a , a różnicę przez d , wszelką progresyją arytmetyczną rosnącą, będziemy mogli wyrazić iak następuje: $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d$, i. t. d. Daymy teraz że pod tą progresyją arytmetyczną, jest napisana taż sama progresyja, ale porządkiem odwrotnym, wyraz w wyraz odpowiadająca pierwszemu rzędowi, iakoto:

$$\begin{array}{r} \div a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, \\ \div a + 6d, a + 5d, a + 4d, a + 3d, a + 2d, a + d, a. \end{array}$$

Ponieważ te obie progresyje są sobie równe, więc jawna jest, że suma wyrazów iednéy z tych dwóch progresyów, jest połową obu razem złączonych; daléy zastanowiwszy się cokolwiek, widzieć można, że dwa wyrazy którekolwiek, w tych dwóch progresyach sobie odpowiadające, czynią i powinny zawsze czynić iednakową sumę, która równa się summie pierwszego i ostatniego wyrazu z sobą dodanych, pierwszéy progresyji; więc żeby znalazł sumę obu progresyów, trzeba wziąć pierwszy i ostatni wyraz z sobą dodane

ie-

iednéy progresyji, i takowy wypadek powtórzyć tyle razy, ile będzie w progresyji wyrazów, a zatém żeby mieć sumę tylko iednéy progresyji, trzeba dodać pierwszy wyraz do ostatniego, a wynikający stąd wypadek powtórzyć tylko przez połowę tyle razy, ile znayduie się wżyskich wyrazów, to jest trzeba go rozmnożyć przez połowę liczby wyrazów.

172. Te tedy ośm zagadnień powszechnych, które dopiero rozwiązaaliśmy, zasadzają się tylko na dwóch fundamentach, wyżej podanych (170 i 171). A ponieważ ich rozwiązanie, wypływa bezśrzednie z dwóch równań Algebraicznie wyrażających dane zagadnienie, przeto łatwo stąd zrozumieć można, iakim sposobem przy pomocy Algebry, z iednego niby źródła można wynaléśdź wżyskie inne prawdy od niego zależące.

Lubo te własności, nie są wżyskie zarówno użyteczne, atoli będąc z siebie proste, są tём zgodniéysze do okazania użycia równań, a zatém weźmiemy ie sobie za przykład w następującém okazaniu tego użycia.

W

W tém wszystkiém co poprzedziło, niemieliśmy względu o ieden raz tylko na iedno zrównanie. Ale jeżeli będzie dwoie albo większa liczba zrównań, wyrażających różne własności niektórych ilościów, a oraz jeżeli się znajdą niektóre z tych ilościów wspólne owym zrównanióm, natenczas można z nich dóysdź bardzo wiele innych własnościów, a to z osobliwą łatwością. *Np.* te dwa zrównania fundamentalne progressyów arytmetycznych, to jest $u = a + (n-1)d$ i $s = (a+u) \times \frac{n}{2}$, mają w sobie trzy wspólne ilości, iakoto $a, u, i n$. Jeżeli z każdego z tych dwóch zrównań wyciągnie się koléjno wartość iedną którýkolwiek z tych trzech ilościów, a potém jeżeli te dwie wartości przyrównają się iedna do drugiéy, wypadnie stąd nowe zrównanie, w którém już owa ilość znaydować się niebędzie, i które, pokaże stófunek zachodzący między innemi czterema ilościami, a to bezwzględnie na owę ilość wyrugowaną. *Np.* jeżeli z każdego zrównania

nia wyciągnę wartość gloski a , będą mieć te dwie wartości, $a = u - (n-1)d$, i $a = \frac{2s}{n} - u$; a przyrównawszy iedną do drugiéy, będzie $u - (n-1)d = \frac{2s}{n} - u$; zrównanie w którém ilości $u, n, d, i s$, uważając koléjno iako niewiadome, wyciągnę z niego iak wyżej cztery nowe i powszechne własności progressyów Arytmetycznych. *Np.* poczytawszy s za niewiadomą, mieć będą $s = \frac{2nu - n \cdot (n-1)d}{2}$, wyrażenie, w którém wyczytuie sposób znaleziénia summy progressyów arytmetycznych, przy pomocy ostatniego wyrazu, różnicy i liczby wyrazów; bo tylko z tych trzech ilościów znaiomych, składa się druga część poprzedzającego zrównania.

Gdyby zamiast wyrugowania gloski a , wyrugowaliśmy byli u , albo n , z każdego wyrugowania mielibyśmy byli nowe zrównanie, zawierające w sobie cztery z tych pięciu ilościów a, u, n, d, s ; z których każdą uważając koléjno iako niewiadomą,

ka-

każde nowe zrównanie, dałoby nam cztery formuły, a zatem cztery różne wyrażenia ilości a, u, n, d, s ; z tych zaś wyrażen, każde ma swoją szczególną użyteczność, podług okoliczności zadanego zagadnienia względem progresyów arytmetycznych, w którym te lub owe okoliczności trafić się mogą wiadome. *Np.* gdyby mi potrzeba było znaleźć summę progresyi arytmetycznej, w której byłby mi wiadomy pierwszy wyrząd, różnica i liczba wszystkich wyrazów; w tym razie ponieważ ostatni wyrząd jest niewiadomy, przeto rugnię u , i mieć będę zrównanie niezawierające w sobie tylko głoski a, n, d , i s , z którego łatwo wyciągnąć mogę wartość głoski s .

Wnieśmy sobie stąd, że dwa zrównania $u = a + (n - 1)d$, i $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ dają rozwiązanie wszelkich zagadnień tyczących się progresyów arytmetycznych, byleby w nich mieć wiadome bezśrzednie trzy którekolwiek ilości z tych pięciu a, u, n, d, s .

173. Zebyśmy zobaczyli jakie przytóżowanie tych fundamentów, daymy iż ma być wyrachowana liczba kul umieszczonych w podstawie piramidy trójkątnej.

Jawna jest, że liczba kul zawierających się w każdym rzędzie równoległym iednemu z boków, umniejsza się coraż o 1; i że liczba rzędów równa się liczbie kul umieszczonych w iednym boku. A zatem jeżeli oznaczmy przez n takową liczbę, summa wszystkich kul, będzie summa wszystkich wyrazów progresyi arytmetycznej rosnącej, poczynając się od 1, który ostatnim wyrazem będzie u , i liczbą wyrazów także n ;

będzie tedy wyrażona przez $(n + 1) \times \frac{n}{2}$;

tak że jeżeli *np.* w iednym boku będzie 6 kul, w całej podstawie będzie ich 21.

Ta sama zasada, służąca do układu wyrazów progresyi arytmetycznej, może także być użyta do wynalezienia powierzchni nierównoległoboku albo trójkąta. Albowiem zmyśliwszy sobie wysokość podzieloną na nieskończoną liczbę równych części przez linie równoległe podstawie, łatwo widzieć się daie, że cały nierównoległobok tym sposobem znajdzie się być podzielony na nieskończoną liczbę małych nierównoległoboków, powiększających się coraż o tę samą ilość. Zeby tedy mieć całość złożoną z tych wszystkich nierównoległoboków, potrzeba więcę (171), tylko dodać dwa skrajne a połowę ich rozmnożyć przez liczbę wyrazów; ale że takowe nierównoległoboki, rozumieją się być wysokości nieskończenie małe, więc każdego z nich można uważać, iakoby był równy swojej podstawie rozmnożony przez swoją małą wysokość. A tak

oznaczywszy przez B i b dwie podstawy skraj-
ne tych nierównoległoboków, przez h ich wspól-
ną wysokość, a przez n liczbę części umie-
szczonych w całej wysokości, mieć będziemy
 $\frac{Bh + bh}{2} \times n$, albo $\frac{B + b}{2} \times hn$; że zaś nh wy-
raża całą wysokość nierównoległoboku, więc
trzeba rozmnożyć połowę summy dwóch
podstaw naprzeciw sobie położonych przez
wysokość danego nierównoległoboku.

*O summowaniu wyrazów Progresji
arytmetyczney iakiękolewiek, podnie-
sionych do różnych stopniów.*

174. Niechay będzie zadano kilka
liczb a, b, c, d , i. t. d. poło-
żonych w progresji arytmetyczney
w którejby panowała różnica r .
Będzie iód $b = a + r, c = b + r, d = c + r, e = d + r$

2^{re} skwadrówawszy, będzie

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$

$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$

$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$

$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2$$

3^{cie} podniósłszy do sześciannu, będzie

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$

$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$

$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$

$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3$$

Teráz, jeżeli zrobimy dodanie
zrównań kwadratowych, i drugie
podobneż dodanie zrównań sze-
ściennych, po wyrugowaniu wyra-
zów

zów równych i sobie podobnych,
położonych w przeciwnych czę-
ściach zrównań, mieć będziemy: iód
 $e^2 = a^2 + 2ar + 2br + 2cr + 2dr + 4r^2$
albo $e^2 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^2$; a w powszechności wi-
dzić się daie, że jeżeli ilości a, b, c, d ,
i. t. d. oznaczymy przez n , ostatnią
ilość przez u , sumę tych wszystkich
ilościów przez s , wypadnie $u^2 = a^2$
 $+ 2r(s - u) + (n - 1)r^2$; bo $2r$
znayduie się bydz rozmnożone przez
wszystkie ilości a, b, c, d , i. t. d. oprócz
ostatniéy, a zaś r^2 znayduie się bydz
dodane z sobą tyle razy, ile iest zrów-
nań, to iest tyle razy mniej iednym
razem, ile będzie ilościów a, b, c , i. t. d.
A że to zrównanie zawiera w sobie
 s , więc łatwo będzie wyciągnąć one-
go wartość, a zatém mieć wyrażenie
summy wszystkich wyrazów progres-
ji arytmetyczney, albowiem będzie
 $s = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)r^2}{2r} + u$.

2^{re} Jeżeli znowu zrobimy do-
danie zrównań sześciennych, po wy-
rugowaniu ilościów podobnych so-
bie i równych, w przeciwnych czę-
ściach zrównania położonych, mieć

będziem : $e^3 = a^3 + 3a^2r + 3ab^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3$; to jest $e^3 = a^3 + 3r \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2 \cdot (a + b + c + d) + 4r^3$. Gdzie daie się widzieć, że ilość mnożąca $3r$, jest summa wszystkich kwadratów oprócz ostatniego, że ilość mnożąca $3r^2$, jest summa wszystkich ilościów oprócz ostatniéy, i naostatek sześcián r^3 znajduie się bydz dodany z sobą tyle razy, ile było równań, to jest tyle razy mniéy iednym razem, ile będzie ilościów; a zatém w powłzechności, oznaczywszy przez s'' summę kwadratów, a przez u ostatni wyráz będzie $u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r^2(s' - u) + (n-1)r^3$.

Więc mając wiadomy piérwzły wyráz, ostatni, różnicę, i liczbę wyrázów, przy pomocy tego równania, można mieć wartość gloski s'' , to jest summę kwadratów; bo ilość s' iuż mamy wynalezioną. Jeżeli tedy zamiast s' położymy onego wartość, będzie $u^3 = a^3 + 3r \left(\frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2} \right) + (n-1) \cdot r^3$, albo $2u^3 = 2a^3 + 6rs'' -$

$$-6ru^2 + 3ru^2 - 3ra^2 - 3 \cdot (n-1) \cdot r^3 + 2 \cdot (n-1) \cdot r^3, \text{ co po zwyczajnych działaniach, wychodzi na } s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1) \cdot r^3}{6r}$$

Wziawszy podobnież czwarte stopnie równań, $b = a + r, c = b + r$, i. t. d. dodawszy ie, i obśzedłszy się z niemi poprzedzającym sposobem, znaleźlibyśmy także summę sześciánów. Toż rozumić się o wyrazach prógrysi, podniesionych do wyższych stopniów.

Jeżeli przypuścimy, że prógrysa arytmetyczna o którą rzecz idzie, składa się z naturalnego ciągu liczb poczynających się od iedności, iakoto 1, 2, 3, i. t. d. w takim razie, będzie $a = 1, u = n$; albowiem mamy w powłzechności $u = a + (n-1) \cdot r$, co tu przemienia się, na $u = 1 + n-1 = n$; a zatém będzie $s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, to jest $s'' =$

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = n \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} = n \cdot \frac{(n-1) \cdot (2n+1)}{6}$$

175. Zebyśmy zobaczyli w przykładach przyśtówanie tych sposobów, daymy iż jest zadano wynaléśdź liczbę kul, umieszczonych

nych w piramidzie czworokątnej, mając wiadomą liczbę kul jednego boku podstawy teyże piramidy. Jawną jest, że ta piramida składa się z warstw równoległych podstawie, które są wszystkie kwadratami, mającemi boki coraz umniejszające się albo coraz powiększające się o jedną jedność, jeżeli piramida uważa się od podstawy do wierzchołka, albo też od wierzchołka do podstawy. Całkowitością tedy, będzie summa kwadratów z liczb w naturalnym porządku po sobie następujących, aż do liczby n , oznaczającej ilość kul umieszczonych w jednym z boków podstawy; zatem ta całkowitość będzie wyrażona przez $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, to jest dla wynalezienia iey, trzeba zachować następującą regułę --- Do liczby kul umieszczonych w jednym z boków podstawy, i do podwójności teyże liczby, dodaj po iednemu; te dwa wypadki rozmnoż ieden przez drugi, a mnożąc się wynikającą, znowu przez liczbę kul zawierających się w tymże boku; a na ostatek weźmij szóstą część tey ostatnięj mnogości. Np. jeżeli piramida czworokątna, mieści 6 kul w boku swoięj podstawy; do 6 i do podwójności 6cin to jest do 12, dodaję 1, co mi da 7 i 13, które rozmnożone między sobą, uczynią 91; mnożę 91 przez 6 i mam 546, których szóstą część 91, będzie liczbą kul umieszczonych w zadanej piramidzie.

Gdyby piramida nie miała podstawy kwadratowey, ale tylko równoległoboczną, w takim razie, trzeba by ją sobie zmyślić podzieloną na 2 części (fig. 2.) z których jedna byłaby piramidą kwadratową, o której dopiero mówiło się, a druga byłaby wielościanem, w którym zawartą liczbę kul możnaby wy-

fig. 2.

leśdż

leśdż, rozmnożywszy liczbę kul umieszczonych w trójkącie CEH , przez liczbę kul zawartych w linii CB albo w linii AB — 1.

176. A zatem podług tego co się rzekło (173), jeżeli oznaczmy przez m , liczbę kul umieszczonych w górnęj krawędzi AB , mieć będziemy na całą liczbę kul, zawierających się w piramidzie podług tej, to wyrażenie, $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + n \cdot \frac{n+1}{2}$.

($m-1$). Ta zaś ilość jest $= n \cdot \frac{n+1}{2} \times$

$$\left(\frac{2n+1}{3} + m-1 \right) = n \cdot \frac{n+1}{2} \left(\frac{3m+2n-2}{3} \right)$$

$$= n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{m+2(m+n-1)}{3} \right). \text{ A iako ia-}$$

wna jest, że $m+n-1$, wyraża liczbę kul umieszczonych w krawędzi DF , albo w drugiey równoległey GI , więc idzie zatem, iż chcąc wyrachować liczbę kul zawierających się w piramidzie podług tej, trzeba rozmnożyć liczbę kul umieszczonych w ścianie trójkątnej, przez trzecią część summy, wynikającej z dodania między sobą trzech krawędziów równoległych.

I tak, ponieważ w najmniejszey krawędzi mieści się 21 kul, a w boku podstawy trójkątnej 8 kul, więc w każdęj z dwóch innych krawędziów równoległych, mieścić się będzie po $21+8-1$ to jest po 28 kul; a zatem odprawiam działanie iak następuje:

$$\begin{array}{r} \text{Bok podstawy trójkątnej} \quad - \quad - \quad - \quad 8 \\ \text{Dodawszy 1, będzie} \quad - \quad - \quad - \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Sciana trójkątna, albo połowa mnogości uczyni} \quad 36 \\ \text{Summa trzech krawędziów} \quad - \quad - \quad - \quad 77 \end{array}$$

$$\text{Liczba wszystkich kul (trzecią część mnogości)} \quad 924$$

177. Widzieliśmy w Jeometrii, iż chcąc obrachować bryłowatość piramidy, albo łożka iakiegokolwiek, trzeba rozmnożyć powierzchnią podstawy przez trzecią część wysokości. To podanie można także dowieść, przez formułę służącą do sumowania kwadratów; ale wprzód mamy uważać, że jeżeli w formule $s'' = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$,

przypuścimy liczbę wyrazów n byż nieskończoną, to poprzedzające wyrażenie przemieni się, na $s'' = \frac{n^3}{3}$, albo z przyczyny że

$u = n$, iak widzieliśmy wyżej, na $s'' = \frac{u^3}{3}$.

Jakóż, rozumieć n byż nieskończone, jestto rozumieć, że już pomnożyć się nieda żadną ilością skończoną; a zatem ażeby w rachunku wyrazić to przypuszczenie, przez które n rozumie się byż nieskończone, trzeba koniecznie poczytać $n+1$ i n , za ilości równe sobie, tudzież $2n+1$ i $2n$ także za ilości równe sobie; a w takim razie formuła $s'' = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$ przemieni się, na

$$s'' = \frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{n^3}{3} = n^2 \times \frac{n}{3}, \text{ albo na } s'' = \frac{n^3}{3},$$

położywszy zamiast n wartość onego u .

Lecz dowiedliśmy indziej (Jeometr. 202), że zmyśliwszy sobie piramidę iakoby złożoną z wierszów czyli zrazów równoległych podstawie, takowe zrazy mają się między sobą iak kwadraty odległościów ich od wierszchołka; więc wystawiwszy sobie w myśli, wysokość podzieloną na nieskończoną liczbę równych części, odległości wy-

padać będą w progresji liczb w naturalnym porządku po sobie następujących, a wierszowy czyli zrazy równoległe wypadają będą w progresji kwadratów tychże liczb; a zatem summa wszystkich wierszów, wynajdzie się tymże sposobem co i summa kwadratów.

Formuła zaś $s'' = u^2 \frac{n}{3}$ pokazuje, że trzeba rozmnożyć ostatni kwadrat przez trzecią część liczby tychże kwadratów; więc żeby mieć sumę wszystkich wierszów, trzeba rozmnożyć ostatnią to jest podstawę, przez trzecią część liczby tychże wierszów, to jest przez trzecią część wysokości.

178. Umiejąc rąz wynaléśdź sumę stopniów wielu liczb danych w progresji arytmetycznej, bardzo łatwo będzie można wynaléśdź sumę nieskończonę liczby progresjiów iakiegokolwiek gatunku. Np. mając zadaną progresję arytmetyczną taką, $\div 3. 7. 11. 15. 19.$ i. t. d. iawna jest, że dodając kolejno wyrazy ieden do drugiego, złożylby się rząd następujący: $3. 10. 21. 36. 55.$ i. t. d. który można zsumować. Tę znowu progresji wyrazy dodawszy z sobą, wyniknaby rząd: $3. 13. 34. 70. 125.$ i. t. d. który podobnie można zsumować; toż rozumieć o wyrazach téj ostatniej progresji z sobą dodanych, i tak dalej bez końca.

Jakóż, summa wyrazów progresji arytmetycznej jest $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, albo położywszy zamiast u onego wartość, $u = a + r(n-1)$, $s = [2a + r \cdot (n-1)] \times \frac{n}{2}$. Ta tedy wartość głośki s , oznacza którykolwiek wyraz drugiego rzędu. Więc żeby mieć summę wyrazów drugiego rzędu, trzeba zsumować rząd ilościów, któryby wypadł z ilości $[2a + r \cdot (n-1)] \cdot \frac{n}{2}$ kładąc kolejno zamiast n wszystkie liczby w naturalnej progresji idące, iakoto 1, 2, 3, i. t. d. A że ta ilość wychodzi na $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, w której a i r zostają niedomiennie; więc glosce n dawszy iakąkolwiek bądź wartość, iawna jest, że chcąc zsummować wszystkie ilości wyrażone przez an , nie trzeba tylko zsummować ilości wyrażone przez n , a wynikającą summę rozmnożyć przez a ; takową zaś summę ilościów wyrażonych przez n , jest summa progresji arytmetycznej, złożonej z liczb idących w porządku naturalnym.

nym. Toż samo rozumowanie fluży także względem $\frac{r}{2}n$. Co się tyczy ilości $\frac{r}{2}n^2$, ponieważ r zostało nieodmienne, chociaż zamiast n weźmie się bądź iakąkolwiek liczba, więc zsummuia się wszystkie ilości wyrażone przez n^2 , wzięwszy summę kwadratów z liczb naturalnych, i rozmnożywszy ją przez $\frac{r}{2}$. A zatem na summę ilościów an , wypadnie $a \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2}$; na summę ilościów $\frac{r}{2}n$, wypadnie $\frac{r}{2} \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2}$; na summę zaś ilościów $\frac{r}{2}n^2$, będzie $\frac{r}{2} \times \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$; tak że summa ilościów $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, albo summa wyrazów drugiego rzędu, uczyni $a \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2} + \frac{r}{2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{r}{2} \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2}$; co wychodzi, na $a \cdot (n+1) \cdot \frac{n}{2} + r \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}$. A ponieważ znowu każdy wyraz trzeciego rzędu, jest summa wyrazów drugiego rzędu, więc takowy trzeci rząd zsummuie się, zsummowawszy różne

części tego ostatniego wypadku, który także niebędzie wyciągać tylko zsummowania stopniów liczb położonych w naturalnym porządku, i tak dalej bez końca. Jeżeli przypuścimy byż $a=r$ i $r=1$, to jest jeżeli progressya pierwiastkowa, składa się z liczb w naturalnym porządku po sobie następujących, to w takim razie, progressye o których tu mowa, staia się *liczbami* (iako nazywają) *figuralnemi* (les nombres figurés).

Podobnymże sposobem, można by zsummować inne rzędy, złożone z dodania rzędu kwadratów, albo rzędu sześciąt i t.d. Słowem, podług tych przepisów można zsummować wszelki rząd ilościów, któreby wyraż iakikolwiek zawierał w sobie tyle stopniów doskonałych tęż liczby u , ile się spodoba, i chociażby te stopnie znajdowały się byż rozmnożone przez iakikolwiek bądź liczby, byleby wiadome.

To co się dopiero powiedziało, może byż przytósowano do wynalezienia liczby kul umieszczonych w piramidzie trójkątnej. Jakóż każda warżtwa kul równoległa podstawie, jest wyrażona (173) przez $n \cdot \frac{n+1}{2}$;

więc

więc całością, będzie summa wynikająca z ilościów $n \cdot \frac{n+1}{2}$; króra, (zrobiwszy $r=1$ i $a=1$ w znalezionej wyżej wartości tój summy), przemieni się na $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$; skład wynika reguła bardzo prosta.

179. I odwrotnie, jeżeli mając wiadomą całą liczbę kul umieszczonych w piramidzie trójkątnej, trzeba by wynaleśdż bylo liczbę kul n umieszczonych w każdej krawędzi; oznaczywszy przez a całą liczbę, mieilibyśmy $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{2} = a$, albo $n^3 + 3n^2 + 2n = 6a$, zrównanie, dające się rozwiązać podług sposobu wyżej przepisanego (159). Lecz pomimo tego sposobu, można sobie postąpić krótszą drogą; uważając że ponieważ $n^3 + 3n^2 + 2n$ jest ilość mniejsza aniżeli sześciąt ilości $n+1$, więc $6a$ musi byż także mniejsze iak sześciąt tęż ilości $n+1$; a zatem że pierwiastek sześcienny z $6a$, będzie mniejszy od $n+1$. Z tęż przyczyny, ponieważ n musi byż liczbą całą, więc $n^3 + 3n^2 + 2n$ będzie ilością większą iak sześciąt z ilości $n-1$; a zatem pierwiastek sześcienny z ilości $6a$, niemoże różnić się od n nawet o jedną jedność; więc n jest pierwiastkiem sześciennym największego sześciātu zawierającego się w $6a$.

Gdyby szło o piramidę kwadratową, mieilibyśmy podług (175), $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}$ albo $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = a$, albo $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 3a$; skład na fundamencie podobnego poprzedzającemu rozumowania, wnieslibyśmy

że

że n musi być pierwiastkiem sześciennym największego sześcianu zawierającego się w ilości $3a$.

*Własności i użycia Progresyów
Jeometrycznych.*

180. **S**posobem podobnym tamtemu, który podaliśmy do sumowania stopniów wyrazów progresyi arytmetyczney, można także wynaléśdź i sumę wyrazów Progresyi Jeometryczney.

Daymy że a, b, c, d, e , i. t. d. są kolejne wyrazy progresyi Jeometryczney rosnącey, a stółunek w niéy panujący jest q . Ponieważ każdy wyraz, zawiera w sobie q razy wyraz poprzedzający, więc z tég własności wypadną następujące równania, $b = aq, c = bq, d = cq, e = dq$, i. t. d. A zatém dodawşy te równania, będzie $b + c + d + e = (a + b + c + d)q$; gdzie widziéć można, że w powżeczności piérwsza część składa się zawsze z summy wszystkich wyrazów oprócz piérwszego, a druga z stółunku rozmnożonego przez sumę wynikającą z dodania wszystkich wyrazów oprócz ostatniego. A przeto, oznaczywşy przez s sumę

wşy-

wşyżkich wyrazów, a przez u ostatni wyraz, poprzedzające równanie przemiéni się, na $s - a = (s - u)q$, albo na $s - a = qs - qu$, skąd wyciągnie się $qu - a = qs - s = (q - 1)s$, a zatém będzie $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, formuła, przez którą (byleby miéć wiadomy piérwszy wyraz a i stółunek q) można dóyśdź summy s wşyżkich wyrazów.

Taż sama formuła służy także progresyóm ubywającym; bo progresyja ubywająca niejest co innego, tylko progresyja rosnąca wzięta w odwróconym porządku, w którég ostatni wyraz staie się piérwszym, a piérwszy ostatnim.

Gdyby progresyja ubywająca rościagała się bez końca, natenczas summy s byłoby to wyrażenie, $s = \frac{qu}{q - 1}$, gdzie przez u rozumiéć się piérwszy wyraz. Jakóż, ażeby to wyrazić że progresyja rościaga się bez końca to jest nieskończenie, trzeba to w rachunek wprowadzić, co takowe przypuszczenie w sobie zawiera, to jest, trzeba oznaczyć że ostatni wy-

wyraz jest ilością nieskończenie małą: sposób zaś oznaczenia tego warunku jest, ażeby ostatni wyraz po czytać za nic względem wyrazu qu , bo zostawić go, byłoby to dać znać, że przez qu może być jeszcze zmniejszone, co by było przeciwnie pierwszemu przypuszczeniu.

A stąd pokazuje się, iż ażeby mieć sumę wszystkich wyrazów progresji geometrycznej, trzeba rozmnożyć największy wyraz przez stosunek * panujący w progresji, a odjąć wszy od mnogości najmniejszy wyraz téż w progresji, pozostałą resztę rozdzielić przez stosunek zmniejszony o jedną jedność; tak że gdy progresja będzie ubywająca nieskończenie, reguła wychodzi na rozmnożenie największego wyrazu przez stosunek, a potem na rozdzielenie przez stosunek zmniejszony o jedną jedność.

I tak, sumą téj progresji pociągnięty bez końca $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$ i. t. d. byłoby

* Przez stosunek, rozumiemy w powszechności, liczba oznaczająca wiele razy iatkolwiek wyraz progresji, mieści w sobie wyraz mniejszy zaraz po nim bezśrodknie następujący, tak iż to wyrażenie zarówno służy progresji rosnącej i progresji ubywającej,

byłoby $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{2-1}$ albo 1; toż rozumiemy się o sumie wyrazów téj drugiej progresji, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ i. t. d. który stosunkiem (uważając ją jako rosnącą) będą 3; bo $\frac{1}{2}$ rozdzielone przez $\frac{1}{3}$, dała 3. Jakóż, sumą wyrazów téj progresji, jest $\frac{\frac{1}{2} \times 3}{3-1}$, co wychodzi sta 1. W powszechności, każda progresja geometryczna ubywająca nieskończenie, któryby każdy wyraz miał za nieodmiennego licznika, liczbę mniejszą o jedną jedność, od mianownika pierwszego wyrazu, każda mówi taka progresja jest warta 1. Bo takowa progresja wzięta w powszechności, wychodzi na

$$\frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4} \text{ i. t. d.}$$

której sumą jest $\frac{\frac{n}{n+1} \times (n+1)}{n+1-1}$, albo $\frac{n}{n}$, to jest 1.

181. Widzieliśmy wyżej (Arytm. 196), że którykolwiek z wyrazów progresji geometrycznej, składa się z pierwszego wyrazu, rozmnożonego przez stosunek, podniesiony do stopnia równego liczbie wyrazów poprzedzających ten wyraz, o który rzecz idzie. Więc oznaczwszy przez a pierwszy wyraz, przez u którykolwiek dalszy wyraz, przez q stosunek, a przez n liczbę wyrazów, będzie $u = aq^n - 1$; a że w to zrównanie wchodzi cztery ilo-

ilości, więc można z niego wyciągnąć cztery formuły, służące do rozwiązania tego zagadnienia powyższego: *Mając wiadome trzy z tych czterech rzeczy, jakie są, pierwszy myślarz, ostatni, stosunek, i liczba wyrazów progressji geometrycznej, żeby wyznaczyć czwartą.* Albowiem toż Zrównanie poprzedzające, daie bezśrocznie wartość ilości u . 2^{re} Wartość ilości a , łatwo znajdzie się być

$a = \frac{n}{q^n - 1}$; co się zaś tycze wartości q ; ta także podług tego co się rzekło (139) znajdzie się być $q = \sqrt[n-1]{\frac{n}{a}}$.

Gdzie uważmy, że w tem ostatniem zrównaniu, zawiera się reguła przepisana w Arytmetyce (198) do wciśnięcia wielu środków geometrycznych między dwie ilości zadane. Takowemi ilościami są tu a i u ; ale żeby mieć stosunek q , mający panować w progressji, widzimy tu, że trzeba rozdzielić największą ilość u przez najmniejszą a , a z wielokrotności $\frac{u}{a}$ wyciągnąć pierwiastek stopnia $n-1$; że zaś n jest liczbą wszystkich

tych wyrazów, więc $n-1$ jest liczbą większą o jedną jedność od liczby środków; co się zgadza z regułą dopiero wyżej wspomnianą.

Żeby zaś przy pomocy zrównania $u = aq^{n-1}$ dójsz do wartości u , do tego wprowadzie Algebra niepodaje nam bezśrocznie prostych sposobów, atoli jednak to zagadnienie można łatwo rozwiązać (aczkolwiek kłopotliwą drogą) używszy Logarytmów. Widzieliśmy wyżej (Arytm. 213), iż ażeby liczbę jaką podnieść do danego stopnia, trzeba rozmnożyć logarytm téj ilości, przez wykładnik danego stopnia. Itak oznaczywszy przez L logarytm téj jakiejkolwiek ilości, można zamiast La^2 wziąć $2La$; zamiast La^3 wziąć $3La$; zamiast La^n wziąć nLa . Więc przypomniawszy sobie, że mnożąc przez logarytmy, trzeba dodać logarytmy, a odwrotnie dzieląc przez logarytmy, trzeba odjąć logarytm dzielnika od logarytmu dzielnego, to mówię sobie przypomniawszy, w zrównaniu $u = aq^{n-1}$ mieć będzie $Lu = La + Lq^{n-1}$, albo $Lu = La + (n-1)q$; więc przedstawwszy, będzie

$n-1) Lq = Lu - La$, a rozdzielisz przez Lq , wypadnie, $n-1 = \frac{Lu-La}{Lq}$,
a zatem będzie $n = \frac{Lu-La}{Lq} + 1$.

Przystosujemy to sobie do jakiego przykładu: dajmy że *summa* 60000 złt. jest daną na prowizję po 5 od sta, ale z tym warunkiem, ażeby coroczna prowizja od tej summy obracała się w kapitał od roku do roku, pokiby kapitał urosł do 1000000 złt; jest pytanie, jak długi goiby czasu na to potrzeba?

Ponieważ prowizja jest tu zostą częścią kapitału przeszłorocznego, więc na końcu któregokolwiek roku, kapitał równać się będzie kapitałowi przeszłorocznemu, pomnożonemu o dwudziestą część tegoż kapitału przeszłorocznego; a zatem oznaczywszy przez a, b, c, d, e , rosnące kapitały od roku do roku, mieć będziemy $b = a + \frac{1}{20}a$, $c = b + \frac{1}{20}b$, $d = c + \frac{1}{20}c$, $e = d + \frac{1}{20}d$, to jest $b = a \times (1 + \frac{1}{20})$, $c = b \times (1 + \frac{1}{20})$, $d = c \times (1 + \frac{1}{20})$, $e = d \times (1 + \frac{1}{20})$; skąd pokazuje się, że w każdym kapitale zawie-
ra się kapitał poprzedzający iednakową liczbę razy, oznaczoną przez $1 + \frac{1}{20}$, albo $\frac{21}{20}$. A zatem, rząd tych kapitałów, składa progresję geometryczną, której pierwszym wyrazem a , są 60000 złt; ostatnim wyrazem u , są 1000000 złt; stosunkiem q , są $\frac{21}{20}$; a liczba wyrazów jest niewiadoma. Ta tedy liczba wynaydzie się,

położywszy w formule $n = \frac{Lu-La}{Lq} + 1$ zamiast a, u , i q onych wartości; skąd wypadnie $n = \frac{L_{1000000} - L_{60000}}{L_{\frac{21}{20}} - L_{20}} + 1$. A że szukając w Tablicach, znajdziemy $L_{1000000} = 6,0000000$; $L_{60000} = 4,7781513$; $L_{\frac{21}{20}} =$

$1,3222193$; $L_{20} = 1,3010300$; więc będzie $n = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{1,3222193 - 1,3010300} + 1 = \frac{1,2218487}{0,0211893} + 1 = 57,7$ z małym uchybieniem; to jest że kapitał od 60000 złt. urosnie do 1000000 po skończeniu 57 lat 8½ miesięcy.

Ponieważ (Aryt. 214), ażeby z ilości iakięj wyciągnąć pierwiastek stopnia zadanego przez logarytmy, trzeba rozdzielić logarytm ilości przez wykładnika, więc przy pomocy logarytmów łatwo będzie można rozwiązać w liczbach zrównanie, $q = \sqrt[n]{\frac{Lu-La}{a}}$; albowiem będzie, $Lq = \frac{L \frac{Lu-La}{a}}{n-1}$.

Zeby to przystosować do jakiego przykładu, nie trzeba tylko w poprzedzającym zagadnieniu poszukać, iakaby powinna być prowizja, żeby z niej kapitał od 60000 złt. po 57 lat urosł do 1000000 złt. Mamy tu $a = 60000$, $u = 1000000$, $n = 57,7$; używszy tedy logarytmów, mieć będziemy $Lq = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{58,7 - 1} = \frac{1,2218487}{57,7}$, co daie

$Lq = 0,0211757$; Logarytm który odpowiada w Tablicach liczbie 1,0500 z małym uchybieniem; która przemieniona na dwudziestki daie 21; a stąd na prowizję oczywiście wypada $\frac{1}{20}$.

182. Zrównanie $s = \frac{qa-a}{q-1}$, daie także cztery zrównania, służące do rozwią-

(to jest bez żadnego znaku pierwiastkowego), i jeżeli liczba wymiarów licznika nieprzechodzi tylko o jedną jedność liczbę wymiarów mianownika, to wykryślenie zawsze wychodzić będzie na znalezienie czwartej proporcjonalnej trzem liniom danym. Zobaczmy to w przykładach.

Gdyby było zadano wykryślenie ilości taką jak $\frac{ab}{c}$, w którejby głoski a, b, c , ozna-

fig. 3. czały linie wiadome; trzeba wyciągnąć (fig. 3) dwie linie nieokreślone AZ, AX , czyniące między sobą kąt iakikolwiek. Na jednej z nich AX , bierze się część AB równą linii oznaczonej przez c , i druga część AD , równa jednej z dwóch linii a albo b , daymy niech tu będzie równa linii a ; potem na drugiej linii AZ , bierze się część AC (równa linii b). Złączymy końce B i C pierwszą i trzecią część przez linią BC , przez koniec D , drugą prowadzi się linią DE , równoległą linii BC ; i ta na linii AZ pokaże linią AE odpowiadającą wartości ilości $\frac{ab}{c}$. To jest, że trzeba znaleźć czwartą proporcjonalną trzem liniom danym c, a, b . A ponieważ (Jeom. r. 18) podaliśmy dwa sposoby do znalezienia takowej czwartej proporcjonalnej, więc któregośkolwiek z nich zarówno użyć można do wykryślenia ilości $\frac{ab}{c}$.

Gdy-

Gdyby także zadana była do wykryślenia ilość $\frac{aa}{c}$, iawna jest, że to zagadnienie wychodzi na poprzedzające; bo w takim razie linia b równa się linii a .

Gdyby trzeba było wykryślenie ilości $\frac{ab + bd}{c + d}$; uważylbym naprzód, że ta ilość równa się ilości $\frac{(a + d)b}{c + d}$; poczytawszy tedy $a + d$ za jedną linią wyrażoną przez m , i $c + d$ także za jedną linią wyrażoną przez n , miałbym do wykryślenia ilość $\frac{mb}{n}$, która wychodzi na poprzedzający przypadek.

Niechay będzie znowu zadana ilość $\frac{aa - bb}{c}$; przypomniemy sobie że $aa - bb = (a + b)(a - b)$; a zatem (25) jest jedno co $\frac{(a + b)(a - b)}{c}$; a zatem uważając tę ilość w takiej postaci, nie trzeba będzie tylko poszukać czwartej proporcjonalnej tym trzem ilościom $c, a + b$ i $a - b$.

Gdyby iefzcze była zadana do wykryślenia ilość $\frac{abc}{de}$; trzebaby ją napisać w tej postaci $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; a wykryśliwszy $\frac{ab}{d}$, iak się dopiero nauczyło, linią z tego wykryślenia wypadającą, można oznaczyć przez m ; natenczas $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ przemieni się na $\frac{mc}{e}$, to jest na ilość, która wykryśli się iak wyżey.

Q 4

A

A stąd wnosi się, że gdyby zadano było wykryślić $\frac{a^2b}{c^2}$; trzeba by to wyrażenie przemienić na $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$, a potem wykryśliwszy $\frac{a^2}{c}$, i wartość wypadku oznaczywszy przez m , wykryśliłoby się nakoniec $\frac{mb}{c}$.

A tak, cała sztuka zawisła od rozłożenia ilościów na części, z którychby każda wypadła na postać $\frac{ab}{c}$ albo $\frac{a^2}{c}$; a lute to w niektórych okazyach zdawać się może rzeczą przytrudną, atoli łatwo będzie dać sobie w tym radę, przy pomocy sposobów wyżej podanych do przekształcenia ilościów na inną postać.

Np. gdybym miał zadaną do wykryślenia ilość $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$; zrobiłbym podług upodobania $b^3 = a^2m$, a $c^2 = an$, natenczas $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ przemieniłoby się na $\frac{a^3 + a^2m}{a^2 + an}$, co wychodzi na $\frac{a^2 + am}{a + n}$ albo na $\frac{(a + m) \times a}{a + n}$, to jest, na ilość łatwą do wykryślenia (podług tego co już powiedziało się wyżej), byleby mieć wiadome m i n . Wartości zaś ilościów m i n , daią zrównania $b^3 = a^2m$ i $c^2 = an$, z których wyciąga się $m = \frac{b^3}{a^2}$; i $n = \frac{c^2}{a}$, dające się wykryślić podług sposobów wyżej położonych.

Trasfiają się czasem ilości wypadłe w takie postacie, która zdaie się czynić wcale niepożytecznemi, sposoby przepisane do przekształ-

kształcenia ich na inną postać, co bywa, w ten czas, kiedy ilość niebędzie jednorodną (homogeeną), to jest, gdy każdy z wyrazów licznika albo mianownika nie składa się z jednakowey liczby czynników; np. gdyby się zdarzyła ilość taka, iak $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$. Ale uważyc

mamy, że do takiego wypadku nieprzychodzi się nigdy, tylko kiedy w biegu rachunków (dla prościęszych wyrażeń), ilość iakowa zrobiła się równa jedności. Np.

w ilości $\frac{a^3 + b^2c}{a^2 + c^2}$ gdyby zrobiło się $b = 1$, pierwsza ilość przemieniłaby się w tę drugą $\frac{a^3 + c}{a^2 + c^2}$. Lecz pośpolicie nigdy przedsiębrać

niemożna wykryślenia ilości, niewiedząc początku skąd powstała, w każdym przypadku zawsze bywa wiadomo, która ilość zrobiła się równa jedności, a zatem zawsze ją nazad powrócić można. I w tym żadna trudność zachodzić niepowinna; bo ponieważ w każdym wyrazie licznika i mianownika, musi znajdować się jednakowa liczba wymiarów, (lubo ta liczba może się różnić względem wyrazów licznika i mianownika), więc w każdym wyrazie, trzeba by tylko nazad powrócić stopień linii, za którą wzięta się była jedność, stopień mowie taki któryby dopełniał liczby wymiarów. I tak gdybym miał wykryślić ilość $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$, wiedząc że w niej

zamiaast linii d położyła się jedność, napisałbym $\frac{a^3 + bd^2 + c^2d}{ad + b^2}$; a do wykryślenia téy ostatniéy, zrobiłbym $b^2 = dm$, $c^2 = dn$ i $a^3 = d^2p$, co-

d^2p , co by mi ją odmięniło na $\frac{d^2p + bd^2 + d^2n}{ad + dm}$,

albo na $\frac{dp + bd + nd}{a + m}$, albo naostatek na

$\frac{(p + b + n)d}{a + m}$; ilość łatwa do wykryślenia,

wykryśliwszy wprzód m , n i p , to jest $m = \frac{b^2}{d}$, $n = \frac{c^2}{d}$, $p = \frac{a^3}{d^2}$, w czém niemoże być

żadnéj trudności po tém co poprzedziło.

W tém wszystkiém co się dotąd mówiło, rozumiało się zawsze, że liczbą czynników, albo liczbą wymiarów każdego wyrazu licznika, nieprzechodzi tylko o jedną jedność liczbę wymiarów mianownika. Może atoli pierwsza liczba przewyższać drugą, o dwie a nawet i trzy jedności, ale nigdy o więcej, chyba że iaka linia zrobiła się równa jedności, albo że niektóre czynniki wyrażają tylko same liczby.

185. Kiedy liczba wymiarów w liczniku ilości zadanej, przechodzi liczbę wymiarów mianownika o dwie jedności, to natenczas ilość wyraża powierzchnią, której wykryślenie zawsze naprowadzić można do sposobu wykryślenia równoległoboku, a nawet kwadratu.

Np. gdybym miał do wykryślenia zadaną ilość $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$, uważałbym ją sobie iako $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; lecz ilość $\frac{a^2 + ab}{a + c}$ łatwo da się

wy-

wykryślic podług sposobów wyżey podanych,

napisawszy ją w téj postaci $a \times \frac{a + b}{a + c}$, więc

daymy niech będzie m wartością linii która wynika z takiego wykryślenia, natenczas

$a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$ przemieni się na $a \times m$; iawna

zaś jest, że wzięwszy a za wyfokość, a m za podstawę równoległoboku, $a \times m$ wyrażać będzie powierzchnią tego równoległoboku; więc odwrotnie, taż powierzchnia oznaczać powinna takową ilość $a \times m$, albo $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$.

Do podobnegoż wykryślenia naprowadziły także można ilość $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, zro-

biwszy $bc = am$, i $d^2 = an$, albowiem natenczas pierwsza ilość przemieni się na $\frac{a^3 + amc + and}{a + c}$,

co na jedno wychodzi, iak $a \times \left(\frac{a^2 + mc + nd}{a + c} \right)$.

Lecz wykryślenie czynnika $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$ jest

toż samo co w przypadkach poprzedzających, więc znalazłszy wartość onego, i oznaczwszy ją przez a , niezo stanie mi tylko zrobić wykryślenie ilości $a \times p$, to jest tylko wykryślic równoległobok, którego by wyfokością było a , a podstawą p .

186. Naostatek, jeżeli liczba wymiarów licznika, przechodzi o trzy jedności liczbę wymiarów mianownika, to natenczas ilość wyrażać bę-

będzie bryłę, które wykryślenie za-
wize naprowadzić można na wy-
kryślenie równoległoscianu.

Np. gdybym miał do wykryślenia daną
ilość $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$; napisałbym tę ilość w tę

postaci $ab \times \left(\frac{a^2 + ab}{a + c} \right)$; a zrobiwszy wykry-

ślenie ilości $\frac{a^2 + ab}{a + c}$ podług tego iak się wy-

żę nauczyło, jeżeli oznaczę przez m linią
z tego wykryślenia wypadłą, zagadnienie
skończy się na wykryśleniu tylko ilości ab
 $\times m$; lecz ab wyraża równoległobok (iak
widzieliśmy wyżej), więc zmyśliwszy so-
bie równoległoscian mający za podstawę ta-
kowu równoległobok a za wysokość linią
 m , bryłowatość tego równoległoscianu, ró-
wnać się będzie ilości $ab \times m$, to jest ilości

$$\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}.$$

187. Na tém co się dotąd po-
wiedziało, dosyć jest do wykryślenia
wszelkiéy ilości niepiérwiałtkowéy.
Zastanówmy się teraz nad ilościami
piérwiałtkowými drugiego stopnia.

Takowe, mogą być wykryślo-
ne albo przez średnią proporcjo-
nalną między dwiema liniami da-
nemi, albo przez przeciwprostka-
tną, albo téż przez ieden z boków
trojkąta prostokątnego.

Np.

Np. żeby wykryślic $\sqrt{ab}$; trzeba (fig. 4) fig. 4.
wyciągnąć linią nieokręśloną AB , na któ-
réy potem bierze się część AC równa linii
 a , i część CB równa linii b ; dalej na ca-
łej linii AB iako na średnicy, opisuie się
pół koła przecinającego w D prostopadłą CD ,
podniesioną na linii AB z punktu C ; nateń-
czas CD będzie wartością ilości $\sqrt{ab}$; to jest,
że podług (Jeom. 122), żeby mieć wartość
ilości $\sqrt{ab}$, trzeba wziąć średnią proporcjo-
nalną między dwiema ilościami oznaczona-
mi przez a i b . Jakóż, wiadomo jest (Jeom. 121)
że $AC : CD :: CD : CB$, albo $a : CD :: CD$
 $: b$; więc rozmnożywszy skrajne i średnie,
będzie $(CD)^2 = ab$, a zatem $CD = \sqrt{ab}$.

A stąd pokazuje się, iakby sobie trzeba
postąpić, w przekształceniu na kwadrat iakiéy-
kolwiek powierzchni; gdyby np. rzecz szła
o przemianę równoległoboku, którego by wy-
sokością było a , a podstawą b ; oznaczywszy
przez x bok szukanego kwadratu, miałbym
 $x^2 = ab$, a zatem $x = \sqrt{ab}$; co mi znać da-
je, że na bok kwadratu, mam wziąć śred-
nią proporcjonalną między podstawą i wy-
sokością. Jeżeli rzecz idzie o przekształcenie
trójkąta, który iak wiadomo równa się poło-
wie równoległoboku téż podstawy i téż
wysokości, to trzeba będzie wziąć średnią
proporcjonalną między podstawą i połową
wysokości, albo między wysokością i poło-
wą podstawy.

Gdyby znowu zadano było, przekształ-
cić koło na kwadrat, to trzeba by wziąć śred-
nią proporcjonalną między promieniem i po-
łową okręgu. Niemniéy łatwo także takie
przekształcenie uczynić się daie z wszelką in-
ną iakąkolwiek figurą prostokątną; albowiem
wiadomo (Jeom. 137), że każda figura pro-
stokryślna, da się przemienić w trójkąt, tén
zaś

zaś łatwo przemienić można na kwadrat, wzięwszy średnią proporcjonalną między podstawą i połową wysokości tego trójkąta. Lecz gdyby figura nie była wykryślona, ale tylko było zadane wyrażenie Algebraiczne ię powierzchni, przy pomocy niektórych wymiarów one składających; natenczas w wykryśleniu trzeba sobie będzie tak postąpić iak z ilościami o których zaraz mówić zaczynamy.

Gdyby była zadana ilość $\sqrt{(3ab + b^2)}$; takową naprzód napisałbym sobie w tej postaci $\sqrt{[(3a + b) \times b]}$, a potem wzięłbym średnią proporcjonalną między $3a + b$ i między b .

Podobnież gdyby była dana ilość $\sqrt{(aa - bb)}$, napisałbym ią tak $\sqrt{[(a + b) \times (a - b)]}$, i wzięłbym średnią proporcjonalną między $a + b$ i $a - b$. Gdybym miał $\sqrt{(aa + bc)}$; zrobiłbym $bc = am$, skądbymi wypadło $\sqrt{(a^2 + am)}$ albo $\sqrt{[(a + m) \times a]}$, a zatem nie potrzebaby mi więcej, tylko wzięść średnią proporcjonalną między $a + m$ i między a ,

po wykryśleniu wprzód wartości $m = \frac{bc}{a}$ podług reguł wyżej podanych.

Zeby wykryść $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, możnaby zrobić $b^2 = am$, i z ilością $\sqrt{(a^2 + am)}$ postąpić sobie iak dopiero powiedziało się. Ale własność trójkąta prostokątnego (Jeom. 164), podaie nam sposób do prościęyszego wykryślenia, który jest taki: Wyciągnij linią AB (fig. 5) równą linii a , z końca tej linii A , postaw prostopadłą AC równą linii b ; natenczas poprowadziwszy linią BC , takowa będzie wartością ilości $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Bo ponieważ trójkąt CAB jest prostokątny, więc (podług Jeom. 164), będzie $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$, więc $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.
Mo-

fig. 5.

Można także przy pomocy trójkąta prostokątnego, w odmienny sposób od tego którego użyliśmy wyżej, wykryść ilość $\sqrt{(a^2 - b^2)}$. Tym końcem (fig. 7) prowadzi się linia AB równa linii a , i opisałwszy na AB iako na średnicy, pół koła ACB , z punktu A przeciąga się cięciwa $AC = b$; natenczas poprowadziwszy linią BC , takowa będzie wartością ilości $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; albowiem trójkąt ABC będąc prostokątny (Jeom. 164), daie $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$; więc $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$, a zatem $BC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Można tedy także i ilość $\sqrt{(a^2 + bc)}$ wykryść inaczey iak było wyżej, a to postępując sobie w ten sposób. Trzeba zrobić $bc = m^2$ i wykryść $\sqrt{(a^2 + m^2)}$ iak się już powiedziało; do czego wprzód wynayduie się m , biorąc średnią proporcjonalną między b i c , iako to wskazuje zrównanie $bc = m^2$, dające $m = \sqrt{bc}$.

Chociażby pod znakiem pierwiastkowym znaydowało się więcej wyrazów, to jednakże wykryślenie zawsze naprowadzić można do którego z sposobów poprzedzających, używszy przekształcenia. Np. gdybym miał $\sqrt{(a^2 + bc + ef)}$, zrobiłbym $bc = am$, $ef = an$, skąd wypadłaby mi ilość $\sqrt{(a^2 + am + an)}$, albo $\sqrt{[(a + m + n) \times a]}$, którą wykryłbym, wzięwszy średnią proporcjonalną między a i między $a + m + n$, wykryśliwszy wprzód wartości ilościów m i n , to jest $m = \frac{bc}{a}$, $n = \frac{ef}{a}$. Mógłbym także zrobić $bc = m^2$, $ef = n^2$; a tak zagadnienie wyszłoby na wykryślenie ilości $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2)}$. Kiedy pod znakiem pierwiastkowym, znayduie się rząd kwadratów twier-

twierdzących, np. taki iak $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$ i. t. d.), trzeba zrobić $\sqrt{a^2 + m^2} = h$, $\sqrt{h^2 + n^2} = i$, $\sqrt{p^2 + i^2} = k$, i tak dalej; a ponieważ każda z tych ilościów wynika z poprzedzających, więc ostatnia, pokaże wartość ilości $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$ i. t. d.). Żeby te ilości wykryślić w sposób ile można najprostszy, trzeba każdą przeciwprostokątną uważać kolejno iako bok; np. (fig. 6), zio-
 fig. 6. bawwszy linią $AB = a$, postaw prostopadłą $AC = m$, i wyciągnij BC która będzie wartością h ; z punktu C na linii BC postaw prostopadłą $CD = n$, a wyciągnięty bok BD będzie wartością i , naostatek z punktu D na linii BD postaw prostopadłą $DE = p$, linia BE będzie wartością linii k , to jest wartością ilości $\sqrt{a^2 + m^2 + n^2 + p^2}$.

Jeżeliby między temi kwadratami nie-które znajdowały się przeczące, w takim razie do sposobów dopiero przepisanych, trzeba by jeszcze przydać owe, które podaliśmy do wykryślenia ilości $\sqrt{a^2 - b^2}$. Naostatek gdyby, potrzeba było wykryślić ilość

zadaną w takię postaci, $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{\sqrt{(d+e)}}$, od-
 mięnilbym ją na $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, rozmno-

żywszy tak licznika iak mianownika przez $\sqrt{(d+e)}$; a natenczas szukając średnię proporcjonalną między ilościami $b+c$ i $d+e$, i znalazoną nazwawszy m , niezostanie mi więcej do czynienia, tylko wykryślić ilość $\frac{am}{a+e}$, co da się wykonać bardzo łatwo.

Wreszcie, jest tu mowa tylko o regu-łach powszechnych; częstokroć można od-
 być wykryślenie prościęszymi sposobami, lubo zawżę na tychże fundamentach zasadzo-
 nemi,

nemi, ale te sposoby wynikają z iakich uwag szczególnych, i właściwych każdemu zagadnieniu, a zatem niemogą być podane i wytiomaczone tylko w ten czas gdy się do nich okazyje podadzą. Uważymy jednak ie-
 fzcze przy dokończeniu téj materyi, że lu-
 bo wykryślenie ilościów pierwiastkowych, wychodzi na wzięcie czwartych proporcjo-
 nalnych, albo średnich proporcjonalnych, i na kryślenie trójkątów prostokątnych, atoli takowe wykryślenia mogą wypadać inniemy lub
 więcej proste, i inniemy lub więcej kształtne, to jest podług sposobu, którego użyje się do wy-
 nalezienia takowych średnich proporcjonal-
 nych. Dla tego przydamy tu dwa inne sposo-
 by, służące do wynalezienia średnię propor-
 cyonalną między dwiema liniami zadanemi.

Pierwszy sposób zależy na tém: ażeby na iedną z dwóch linii danych iakoto na AB , opisać pół koła ACB (fig. 7); a wzię-
 wwszy na nię część AD , równą drugięj linii
 fig. 7. daney, podnieść prostopadłą DC , i poprowa-
 dzi cięciwę AC , która będzie średnią pro-
 porcyonalną między liniami AB i AD . Al-
 bowiem wyciągnawszy cięciwę BC , trójkąt
 ACB (Jeom. 65) jest prostokątny, a zatem
 podług (Jeom. 112), AC będzie średnią pro-
 porcyonalną między przeciwprostokątną AB ,
 i między odcinkiem AD .

Drugi znowu sposób zależy na tém
 (fig. 8), ażeby wyciągnąć linią AB , równą
 fig. 8. większej z dwóch linii danych, a wzięwszy
 na nię część AC , równaiącą się mnieyszej
 linii, ażeby na pozostałęj reszcie CB opisać
 pół koła CDB , do którego przytknąwszy sty-
 czną AD , takowa podług (Jeom. 124), będzie
 średnią proporcjonalną między AB i AC .

Stąd tedy pokazuje się, że ilości niepier-
 wiastkowe, zawżę mogą być wykryślone
 Tom. II. R zy

przy pomocy linii prostych, a ilości pierwiastkowe drugiego stopnia, dadzą się wykryć przy pomocy koła i linii prostych razem użytych. Co się zaś tyczy ilościów pierwiastkowych wyrażonych w wyższych stopniach, takowych wykryślenie, zawisło od połączenia między sobą różnych linii krzywych. Teraz zabawimy się tylko takimi zagadnieniami, których rozwiązanie zasada się na ilościach albo niepierwiastkowych, albo pierwiastkowych drugiego stopnia.

Różne zagadnienia Geometryczne, i Uwagi tak nad sposobem ułożenia z nich równań, iako też nad różnymi rozwiązaniami wypadającymi z tych równań.

188. **F**undament który podał się wyżej (60), do wyrażenia danego zagadnienia w równaniu, zarówno służy i do zagadnień Geometrycznych. Trzeba także to, czego ma się dochodzić, oznaczyć sobie jakim powszechnym wyrazem, a potem przy pomocy tego wyrazu, i innych, oznaczających inne ilości wiadome, tak rozumować iak gdyby było wszystko wiadomo, i iak gdyby niešlo tylko o sprawdzenie tego zagadnienia. Takowy sposób obéyscia się z zagadnieniami nazywają *Rozbiórem* (Analysę). Zeby bydź w stanie ułożenia sobie rozu-

mó-

mowań, iakich wyciąga takowe sprawdzenie, trzeba mieć znaiome przynajmniéy niektóre własności téy ilości, którę się dochodzi. Jawną tedy jest, że chcąc iakie zagadnienie Geometryczne ułożyć w równaniach, trzeba mieć obecne w umyśle wiadomości podane w drugiéy części téy Nauki. Pospolicie w zagadnieniach liczebnych, albo w zagadnieniach tego gatunku, które mieliśmy w pierwszym Rozdziale, najczęściej na przystósowanie reguły powszechnéy, dosyć jest treść zagadnienia wyrazić po Algebraicznemu, ale w przystósowaniu Algebry do Geometryi, trzeba częstokroć użyć ieżczé innych sposobów: będziemy się starali dać ie poznać w dalszym przeciągu. Teraz zaś w powzięchności tylko tyle powiedzieć można, że na sprawdzenie ilości, niezawśnie bywa potrzeba zastanawiać się nad tém, ieżeli bezśrzednie czyni zadosyć warunkóm zagadnienia; takowe sprawdzenie częstokroć łatwiey wykonywa się, uważając ieżeli ilość o którą rzecz idzie, zawiera w sobie pewne własności, maiące

R2

isto-

istotny związek z warunkami zagadnienia. Po przełożeniu téy uwagi, którey będziemy mieć okazją użyć na swóich miéyscach, przystępujemy do przykładów, które w takiéy materyi bywaia zawsze łatwieysze do pojęcia, aniżeli fundamenta powszechne.

189. Obierzmy sobie na piérwszy przykład to zagadnienie: *Wpisać kwadrat ABCD (fig. 9), w trójkącie zadanym EHI.* Przez te słowa *w trójkącie zadanym*, rozumiemy trójkąt, w którym byłoby wszystko znaiomo, iakoto boki, kąty, wysokość i.t.d.

Przyłożywszy cokolwiek uwagi, daie się widzieć, że zagadnienie wychodzi na wynalezienie punktu G na wysokości EF, takiego, przez który pociągnąwszy linią AB, równoległą linii HI, ażeby ta linia AB równała się linii FG; skąd zrównanie, prawie samo podaie się naturalnie, wyraziwszy tylko Algebraicznie wartość linii FG i przyrównawszy iednę do drugiey.

Oznaczmy tedy przez a wysokość wiadomą EF; przez b podstawę wiadomą HI; a przez x linią

ią niewiadomą GF; natenczas EG będzie warto $a - x$. Ze zaś linia AB, iest równoległa linii HI; więc powinno wypadać podług (Jeom. 109), $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; to iest $EF : EG :: HI : AB$, albo $a : a - x :: b : AB$; więc (Arytm. 169), $AB = \frac{ab - bx}{a}$; a ponieważ linia AB powinna równać się linii GF, więc będzie $\frac{ab - bx}{a} = x$; skąd przy pomocy reguł podanych w piérwłzym Rozdziale, wyciąga się $x = \frac{ab}{a + b}$.

Teráz, żeby tę ilość wykryścić, trzeba podług tego co się powiedziało (184), wynaléśdź czwartą proporcjonalną ilościami, $a + b, b, i a$, co można wykonać w ten sposób. Wznacz od F do O linią FO, równą ilości $a + b$, to iest równą linii $EF + HI$, wyciągnij EO; potem wzięwszy linią FM, równą linii $HI = b$, wyciągnij równoległe do linii EO linią MG, której przecięcie się z linią EF, da ci linią GF na wartość głośki x . Albowiem z trójkątów sobie podobnych

bnych EFO , GFM , wypada proporcya $FO : FM :: FE : FG$, albo $a + b : b :: a : FG$; więc $FG = \frac{ab}{a+b}$.

190. Weźmy na drugi przykład to zagadnienie: *Mając wiadomą długość linii BC (fig. 10) i kąty B i C które z nią czynią inne dwie linie BA , i CA , znaleźć wysokość AD , w jakiej przecina się z sobą te dwie ostatnie linie.*

Kąty wprowadzają się w rachunki Algebraiczne, przy pomocy tychże samych linii co w Trygonometrii, to jest przy pomocy wstaw, stycznych, i. t. d. I tak, kiedy się mówi, że jest zadany kąt np. kąt C , rozumie się, że jest dana wartość jego wstawy, lub styczney. To na przód założywamy, zrobmy $BC = a$, $AD = y$. W trójkącie prostokątnym ADC podług (Jeom. 300), mieć będziemy $CD : DA$, iak się ma promień, do styczney kąta ACD , to jest będzie $CD : y :: r : m$, oznaczywszy przez r promień, a przez m styczną kąta ACD ; więc (Arytm. 169), $CD = \frac{ry}{m}$. Przez temu podobne roz-

ma

mówanie, oznaczywszy przez n styczną kąta ABD , mielibyśmy $BD :$

$y :: r : n$; więc $BD = \frac{ry}{n}$; lecz BD

$+ DC = BC = a$; więc $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$;

skąd wyciąga się $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

To wyrażenie, da się uczynić prostszem, wprowadziwszy zamiast stycznych m i n dwóch kątów C i B , ich dotyczne, które niech będą oznaczone przez p i q . Tym końcem, trzeba sobie naprzód przypomnieć (Jeom. 295), że $\text{stycz.} : r :: r : \text{dotycz.}$; a na fundamencie tego podania będzie $m : r :: r : p$ i $n : r :: r : q$; skąd wyciąga się $m = \frac{r^2}{p}$ i $n = \frac{r^2}{q}$; a zatem będzie $mn = \frac{r^4}{pq}$, a zaś rn

$+ rm = \frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q} = \frac{r^3(p+q)}{pq}$; więc $y = \frac{ar}{p+q}$; ilość, która bardzo łatwo da

się wykryślić, wziąwszy czwartą proporcjonalną odpowiadającą tym trzem ilościami, $p + q$, r i a .

191. *Mając wiadome wysokości AC i BD dwóch przedmiotów C i D (fig. 11), wyniesionych nad iaką równią (fig. 11), i odległość między niemi AB , równo-*

R 4

18-

ległą téy równi, znaleźć na linii AB taki punkt E , któryby był równo oddalony tak od C iak od D .

Jeżeli może być wyciągnięta linia prosta od C do D , to w takim razie nie trzeba by więcej tylko ze środka téyże linii CD spuścić prostopadłą KE , która oznaczy punkt E . Ale gdyby niemożna było wyciągnąć linii CD , to punkt E trzeba wynaleźć następującym sposobem.

Niech będzie $AC=a$, $DB=b$, $AB=c$, $AE=x$, to będzie $BE=c-x$, $CE=\sqrt{(aa-xx)}$ (Geom. 164), $DE=\sqrt{bb+(c-x)^2}$. Lecz trzeba ażeby było $CE=DE$; więc musi być $\sqrt{(aa+xx)}=\sqrt{bb+(c-x)^2}$; skąd po skwadrówaniu i po zebraniu, wyciąga się $x=\frac{cc-aa+bb}{2c}=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\frac{(a-b)(a+b)}{c}$; ilość, która wykryła się w następujący sposób.

Przez środek linii AB , poprowadź linią ILG równoległą linii AC , która z linią DF równoległą linii AB przetnie się w punkcie G . Zrob $LI=\frac{1}{2}c=LA$, $LH=\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}CF$, a $LO=\frac{1}{2}(a+b)=GH$. Poprowadziwszy linią IO , poprowadź

wadź także przez punkt H równoległą ię linią HE , która oznaczy ci na linii AB szukany punkt E . Albowiem $LI:LO::LH:LE$; to jest, $\frac{1}{2}c:\frac{1}{2}(a+b)::\frac{1}{2}(a-b):LE$; więc $LE=\frac{\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{1}{2}(a-b)}{\frac{1}{2}c}=\dots$

$\frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; lecz $AE=AL-LE=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; więc $AE=x$.

192. Na czwarty przykład, obierzemy sobie takie zagadnienie, które razem służyć nam będzie i do pokazania, iakim sposobem zagadnienia Geometryczne układają się w równaniach, i iak z tychże równań po rozmaitem onych przygotowaniu można sobie wnieść nowe podania.

Mając wiadome trzy boki trójkąta ABC (fig. 12), znaleźć odcinki AD i DC , powstałe z padnięcia prostopadłej BD na linią AC , tudzież znaleźć i samę prostopadłą BD .

Gdyby mi były znane te linie, sprawdziłbym je w następujący sposób. Dodalbym kwadrat linii BD do kwadratu linii CD , i uważałbym jeżeli summa równa się kwadratowi linii BC ; co być powinno, bo trójkąt

kat BDC jest prostokątny (Jeom. 164). Dodalbym także kwadrat linii AD do kwadratu linii BD , i uważalbym jeżeli summa równa się kwadratowi linii AB .

Postąpmy sobie tedy tymże porządkiem, i tym końcem oznaczmy BD przez y ; CD przez x ; BC przez a , AB przez b ; AC przez c ; natenczas AD które jest $= AC - CD$, będzie $= c - x$; skąd wypadną te dwa równania, $xx + yy = aa$ i $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Ponieważ tak xx iako też yy , w obu równaniach niemaia innego współczynnika tylko jedność, przeto odęmy drugie równanie od pierwszego, co mi da, $2cx - cc = aa - bb$,

$$\text{skąd wyciąga się } x = \frac{aa - bb + cc}{2c} = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c;$$

co można napisać w takiej postaci, $x = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$.

Lecz pod taką postacią, stąd co się powiedziało (184), łatwo widzieć się daie, że ażeby mieć x , trzeba szukać czwartéj proporcjonalnéj tym trzém ilościami c , $a + b$, i $a - b$; a znalazłszy ją i wziąwszy onéj

onéj połowę, dodać ją do $\frac{1}{2}c$, to jest do połowy boku AC ; a to właśnie wychodzi na toż samo, co już powiedziało się wyżej (Jeom. 307).

Lecz z tychże samych zównań, można sobie uczynić wiele innych wniosków: wyłożymy tu z nich niektóre, dla naprowadzenia poczynających na sposób, w jaki mają wyczytywać z każdego zrównania to, co zawiera się w tém zrównaniu.

193. 10d. Zrównanie $2cx - cc = aa - bb$, jest toż samo co, $c \cdot (2x - c) = (a + b)(a - b)$. A ponieważ mnogość wynikająca z dwóch pierwszych czynników, równa się mnogości wynikającej z dwóch ostatnich, więc pierwsze dwa czynniki można uważać iako skrajne, a dwa ostatnie iako średnie wyrazy proporcji, a zatem będzie, $c : a + b :: a - b : 2x - c$; lecz $2x - c$, jest iedno co $x - (c - x)$, więc na miéysce tych głosek, położymy linie przez nie oznaczone, będzie $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$; co wychodzi właśnie na toż samo, co już dowiodło się wyżej (Jeom. 306).

194. 2re. Jeżeli z punktu C iako ze środka, promieniem równym linii BC , nakryślisz łuk BO , i poprowadzisz cięciwę BO , mieć będziesz $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$; lecz $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; więc $(BO)^2 = yy + aa - 2ax + xx$, znaleźliśmy zaś wyżej, że $yy + xx = aa$; więc $(BO)^2 = 2aa - 2ax = 2a(a - x)$; położywszy tedy zamiast x jego wartość

$\frac{aa - bb + cc}{2c}$, będzie $(BO)^2 = 2a(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}) = \frac{a}{c} \times [bb - (a - c)^2]$; bo $2ac - aa - cc = -(aa - 2ac + cc) = -(a - c)^2$. Lecz uważając $a - c$ iakoby jedną ilość, będzie $bb - (a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; więc $(BO)^2 = \frac{a}{c} (b + a - c)(b - a + c)$; co da się wyrazić ieszcze w téj postaci, $(BO)^2 = \frac{a}{c} (a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$; więc oznaczywszy przez $2s$ summę wszystkich trzech boków, będzie $(BO)^2 = \frac{a}{c} (2s - 2c)(2s - 2a) = 4 \frac{a}{c} (s - c)(s - a)$. Lecz jeżeli z punktu C , spuści się na linię OB prostopadła CI , podług (Jeom. 299) w trójkącie prostokątnym CIO , wypadnie ta proporcya, $CO : CI :: R : \text{wft. } OCI$, to jest $a : \frac{1}{2} BO :: R : \text{wft. } OCI$; więc $\frac{1}{2} BO = \frac{a \text{ wft. } OCI}{R}$, al. bo $BO = \frac{2a \text{ wft. } OCI}{R}$; a zatem $(BO)^2 = \frac{4a^2 (\text{wft. } OCI)^2}{R^2}$; te dwie wartości ilości $(BO)^2$, zrównawszy jedną z drugą, będzie $\frac{4a}{R^2} (\text{wft. } OCI)^2 = \frac{4a}{c} (s - c)(s - a)$; albo rozdzieliwszy przez $4a$ i wyrugóważy mianowniki, $ac (\text{wft. } OCI)^2 = R^2 (s - c)(s - a)$; skąd wnosi się ta proporcya, $ac : (s - c)(s - a) :: R^2$

$R^2 : (\text{wft. } OCI)^2$, z której wynika reguła bardzo prosta, służąca do wyrachowania któreregokolwiek kąta w iakimkolwiek trójkącie prostokryślnym, mając wiadome wszystkie trzy boki jego. Ta reguła zależy na tém co następuje:

Dodaj razem z sobą wszystkie trzy boki, a od połowy téj summy odéym z osobna ieden po drugim dwa boki zawierające między sobą kąt szukany; co ci da dwie reszty; potem ułóż tę proporcję. Mnogość z dwóch boków zawierających między sobą kąt szukany, ma się do mnogości z dwóch reszt, iak się ma kwadrat promienia, do czwartego wyrazu; który będzie kwadratem wstawy odpowiadający połowie kąta szukanego.

Działając zaś przez Lygarytmy, poprzedzająca reguła odmiénia się w następującą:

Dodaj razem z sobą wszystkie trzy boki; od połowy téj summy: odéym z osobna ieden po drugim każdy z dwóch boków zawierających między sobą kąt szukany; co ci da dwie reszty. Potém dodaj z sobą logarytmy odpowiadające tym dwóm resztom, i dopełnienia arytmetyczne logarytmów odpowiadających dwóm bokom zawierającym między sobą kąt szukany. Połowa summy tych logarytmów, będzie logarytmem wstawy, odpowiadający połowie kąta szukanego.

195. 3cie Zrównanie $yy + xx = aa$, daie $yy = aa - xx = (a + x)(a - x)$; więc położywszy zamiast x onego wartość, będzie $yy = (a + \frac{aa - bb + cc}{2c})(a - \frac{bb - aa - cc}{2c}) = (\frac{2ac + aa + cc - bb}{2c}) \times (\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}) = (\frac{(a + c)^2 - bb}{2c}) \times (\frac{bb - (a - c)^2}{2c}) = [(a +$

$$\left[\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c} \right] \times \left[\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2c} \right]$$

więc $4ccyy = (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$, albo $4ccyy = (a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(a+b+c-2a)$; więc oznaczwszy przez $2s$ sumę trzech boków $a+b+c$, będzie $4ccyy = 2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)$, albo $4ccyy = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$, albo po rozdzieleniu przez 16, po zebraniu, i po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego $\frac{cy}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Lecz $\frac{cy}{2}$ albo ..

$\frac{AC \times BD}{2}$, wyraża powierzchnią trójkąta

ABC ; więc żeby mieć powierzchnią trójkąta przy pomocy trzech boków, trzeba od połowy summy, odjąć z osobna jeden po drugim każdy z trzech boków; potem rozmnożyć trzy reszty przez siebie i przez połowę summy, a naostatek z wypadły mnożności wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

196. 4te. Zrównanie $2cx - cc = aa - bb$, daie $bb = aa + cc - 2cx$; lecz gdyby prostopadła padała zewnątrz trójkąta, zachowawszy też same oznaczenia co wyżej (fig. 13), byłoby $yy + xx = aa$, i $yy + cc + 2cx + xx = bb$, ponieważ AD wyrażone pierwéj przez $c - x$, odmiénia się tu na $c + x$. Więc odjąwszy pierwsze zrównanie od drugiego, będzie $cc + 2cx = bb - aa$, albo $c(c + 2x) = (b + a)(b - a)$; skąd wnosi się proporcya, $c : b + a :: b - a : c + 2x$; lecz $c + 2x$, iest iedno co $x + c + x$, to iest iedno co $CD + AD$; więc $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$, co iest drugą częścią podania już wyżej wywiedzionego (Jeom. 306).

197.

197. 5te. Toż samo zrównanie $cc + 2cx = bb - aa$, daie ielżcze, $bb = aa + cc + 2cx$; które przystósówawłszy do zrównania $bb = aa + cc - 2cx$ odpowiadającego fig. 12, daie się widzieć, że kwadrat bb boku AB położonego naprzeciw ostrego kąta C , iest wart mniej niżeli summa kwadratów $aa + cc$ dwóch innych boków, bo iest wart tylko tyle, ile wynosi ta summa zmniejszona o $2cx$. Przeciwnym sposobem, kwadrat bb boku AB położonego naprzeciw kąta rozwartego C (fig. 13), iest wart $aa + cc + 2cx$, to iest więcej, niżeli wynosi summa kwadratów dwóch innych boków. Jeżeliby tedy wyciągała potrzeba wyrachować kąty przy pomocy zadanych boków, to można zawsze rozemnać na fundamencie tych dwóch uwag, czy kąt szukany ma być ostry albo rozwarty.

198. 6te. Dwa zrównania $bb = aa + cc - 2cx$ i $bb = aa + cc + 2cx$, potwierdzają to co się powiedziało indziej o ilościach przeciwnych. Albowiem iawną iest, że podług tego, iak pada prostopadła BD (fig. 12 i 13), to iest czy wewnątrz albo zewnątrz trójkąta, odcinek CD wypada także z różnych stron położony. Jakóż w tych zrównaniach, wyraz $2cx$, iest w rzeczy samej poprzedzony przeciwnymi znakami. Więc odwrotnie, niechay będą rachunki iakie chcą, które się odprawiły względem iednego z tych trójkątów, z nich zawsze można będzie, wnieść sobie wyrazy należące do przypadków odpowiadających w drugim trójkącie, dawłszy znaki przeciwne częściom położonym z różnych stron na téż linii. Lecz w tém wszystkiém, co się powiedziało wyżej tak względem wyrachowania iednego z kątów, iako też względem wyrachowania powierzchni, widzieliśmy że niewchodził odcinek CD ;

CD; więc te dwa podania należą zarówno, do wszelkiego bądź jakiegokolwiek trójkąta prostokątnego.

199. Chociaż (powiedziawszy w powłzeczności), tém łatwiej jest wyrazić w zrównaniach zagadnienia Jeometryczne, im więcej będzie wiadomych własnościów linii: atoli ponieważ sama Algebra służy do odkrycia takowych własnościów, przeto liczba podań prawdziwie potrzebnych jest bardzo określona. Te dwa podania, iakoto że *w Trójkątach sobie podobnych, boki odpowiadające są proporcjonalne*, i że *w trójkącie prostokątnym, summa kwadratów dwóch boków przyległych kątowni prostemu, równa się kwadratowi przeciwprostokątnej*, te dwa podania mówię, są fundamentem przystósowania Algebry do Jeometryi. Atoli podług rodzaju zagadnienia, może być wiele sposobów użycia tych dwóch podań; w zagadnieniu które rozbióraliśmy dopiero wyżej, takowe użycie łatwo dało się postrzédz; ale co do wniosków które uczyniliśmy sobie z rozwiązania tego zagadnienia, i które nam służyły do wyrachowania

nia kąta przy pomocy trzech boków, nietak łatwo napaśdź można na przeprzemyśl nakryślenia łuku *BO* (fig. 12) dla wyrachowania cięciwy *BO*; i na sposób wynalezienia wstawy kąta *OCL*, przy pomocy połowy *OL* téżże cięciwy. Tóż samo dałoby się powiedzieć o wielu innych zagadnieniach. Albowiem już to trzeba przedłużyć pewne linie, póki aż nieznaydą się z drugimi, już to trzeba je poprowadzić równolegle innym liniom, już téż dać im kierunki takie, żeby pewny iaki kąt między sobą czyniły. Słowem, przystósowanie Algebry do Jeometryi, lub téż do iakiéykolwiek innéy nauki, wyciąga po Rachmistrzu dostatecznego rozkładu, potrzebnego mu do wyboru i do użycia sposobów. Ze zaś takowy rozkład, po większej części nabywa się przez używanie, przeto zdało nam się być rzeczą potrzebną, przystósować te uwagi do różnych przykładów.

200. Obierzmy sobie naprzód do rozwiązania to zagadnienie: *Z danego punktu fig. 14. A (fig. 14), którego położenie byłoby wiadome względem dwóch linii HD i DI, czyniących między sobą wiadomy kąt HDI, poprowadzić*

Tom II.

S

wadzić

wadzić linią prostą AEG, w taki sposób, ażeby trójkąt EDG przez nią ograniczony, miał jaką pewną zadaną powierzchnią, to jest powierzchnią np. cc , równającą się powierzchni kwadratu jakiego wiadomego.

Z punktu A poprowadźmy linią AB równoległą linii DE , i linią AC prostopadłą na linią DG przedłużoną; z punktu E gdzie linia AEG ma się przecinać z linią DH , zmyślmy sobie prostopadłą EF . Gdyby nam były wiadome linie EF i DG , rozmnożywszy je jedną przez drugą, i wzięwszy połowę wynikającą stąd mnogości, mielibyśmy powierzchnią trójkąta EDG , która powinna równać się ilości cc .

Zróbmy tedy $DG = x$; a względem linii EF , zobaczmy czy niemożnaby naznaczyć ię wartości, już to przy pomocy ilości x , już przy pomocy tego, co mamy wiadomo w zagadnieniu.

Ponieważ położenie punktu A rozumiemy się znajome, więc należy także poczytać za rzecz wiadomą odległość BD , w której przechodzi równoległa AB , i odległość AC , od punktu A do linii DG przedłużonej. Oznaczmy tedy BD przez a , a AC przez b ; trójkąty sobie podobne ABG i EDG dadzą, nam, $BG : DG :: AG : EG$; trójkąty zaś ACG , EFG także sobie podobne, dadzą znowu, $AG : EG :: AC : EF$; więc $BG : DG :: AC : EF$; to jest $a + x : x :: b : EF$; więc

$$EF = \frac{bx}{a+x}$$

A że powierzchnia trójkąta EDG , powinna równać się kwadratowi cc ; więc musi być $EF \times \frac{DG}{2}$ albo $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc$;

to jest, że będzie $\frac{bxx}{2a+x} = cc$, albo wyrugó-

wa-

wawszy mianownika, $bxx = 2acc + 2ccx$.

To zrównanie, rozwiązane podług reguł przepisanych do zrównań drugiego stopnia (81 i dalej), daie na x te dwie wartości, $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$; z których ta co ma znak —, nienależy do zagadnienia teraźniejszego.

Zeby wykryść pierwszą wartość, piszę ją w postaci następującej: $x = \frac{cc}{b} +$

$\sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$. Po tém przygotowaniu,

prowadzę linią nieokreśloną PQ (fig. 15); na téj linii z któregożkolwiek punktu C , sta-

wiam prostopadłą $AC = b$, i biorę na liniach CA i CP , linie CO i CM każdą z nich równającą się bokowi zadanego kwadratu; a poprowadziwszy linią AM , prowadzę przez punkt O , równoległe z tą linią AM , linią ON , która mi odznaczy długość CN , na wartość ilości $\frac{cc}{b}$; albowiem trójkąty, sobie podobne ACM , OCN , dają mi $AC : OC :: CM$

: CN , to jest $b : c :: c : CN$, więc $CN = \frac{cc}{b}$.

A natenczas wartość ilości x odmieni się na tę, $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; lecz $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$, wyraża (187) średnią proporcjonalną między CN i $CN + 2a$; więc nieidzie tylko o wynalezienie téj średniej proporcjonalnej i o dodanie ię do CN . Tym koncem, na linii NC przedłużonej, biorę $CQ = 2a$, a na całości NQ opisuję półkoła NVQ przecinające się w V z linią CA ; wznaczam cięciwę NV od N do P , i mam CP na wartość ilości x . Albowiem NV

S 2

(Je-

(Jeom. 112) jest średnią proporcjonalną między NC i NQ , to jest między CN i $CN + 2a$; więc NV albo $PN = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; więc $CP = CN + PN = CN + \sqrt{(CN + 2a) \times CN} = x$. Wznaczywszy tedy linię CP od D do G (fig. 14), pokaże się punkt G , przez który i przez punkt A pociągniemy linię AG , zamknie się trójkąt EDG równający się w powierzchni kwadratowi cc .

201. Zeby zaś wiedzieć co znaczy druga wartość głoſki x , to jest $x = \frac{cc}{b} - \sqrt{[(\frac{cc}{b} + 2a) \frac{cc}{b}]}$, trzeba uważać, że ponieważ w danym zagadnieniu nic mi znać nie daie, jeżeli rzecz idzie o kąt EDG (fig. 14), albo też o kąt $E'D'G'$ pierwszemu równy, i powstający z przedłużenia linii GD , ED ; iako też ponieważ ilości zadane wiadome, zarówno służyć do obu, przeto to drugie rozwiązanie czyli ta druga wartość, miałyby miejsce w ten czas, gdyby potrzeba było zrobić toż samo w kącie $E'D'G'$, co się zrobiło w kącie EDG . Jakóż, oznaczywszy DG' przez x , i inne oznaczenia zostawiwszy też same, trójkąty ABG' , $E'DG'$, sobie podobne, z przyczyny równoległych AB i DE' daią $BG' : DG' :: AG' : GE'$; spuściwszy zaś prostopadłą EF' , trójkąty sobie podobne ACG' , $E'FG'$, znowu dadzą $AG' : GE' :: AC : FE'$; więc $BG' : DG' :: AC : FE'$, to jest, $a - x : x :: b : FE'$; więc $FE' = \frac{bx}{a+x}$. A że powierzchnia trójkąta $G'E'D'$ ma być równa kwadratowi cc , więc musi być $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc$; skąd wnosi się $bx = 2acc - 2ccx$;

a zatem będzie $x = \frac{-cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b})}$;

wartości też same co w przypadku poprzedzającym, tylko z tą różnicą, że mają znaki przeciwne, tak iak być powinno; ponieważ tu ilość x uważa się z przeciwnéj strony, względem tamtéj z której uważała się pierwéj. Co może służyć za nowe potwierdzenie tego, o czém już powiedziało się tyle razy, to jest, że wartości przeczące, należy brać w rozumieniu przeciwném tamtemu, w którym brały się ilości twierdzące.

Wykryślenie przepisane do przypadku poprzedzającego, służy zarówno i do niniejszego, tylko z tą różnicą, ażeby (fig. 15) fig. 15. oznaczyć NV od N do K ku Q ; a natenczas wartość głoſki x , która w poprzedzającym przypadku była wyrażona przez CP , tu będzie wyrażona przez CK . Jakóż wartość głoſki x , odpowiadająca teraz niéżyłému przypadkowi, jest $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b})}$, al-

bo $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{[(\frac{cc}{b} + 2a) \times \frac{cc}{b}]}$, to jest, $x = -CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; a ponieważ $NV = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; więc będzie $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$. A zatem wznaczywszy CK od D do G' (fig. 14), wynaydzie się punkt G' , przez który iako też przez punkt A poprowadzimy linię $AG'E'$, zamknie się trójkąt $G'DE'$ równający się kwadratowi cc , i dający drugie rozwiązanie tegóż zagadnienia.

202. W poprzedzającym przykładzie, rozumieliśmy punkt A (fig. 14) być położony nad linią BG ; gdyby zaś przeciwnie znaydował się pod nią (fig. 16), to natenczas fig. 16. ilość b , albo linia AC , byłaby przecząca, a

zatem pierwsze dwie wartości głoski x byłyby następujące: $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b})}$,

albo $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; gdzie

widzieć można, iż zagadnienie tylko w ten czas jest podobne do rozwiązania, kiedy $2a$

będzie mniejsze iak $\frac{cc}{b}$; bo gdyby było wię-

ksze, to ilość położona pod znakiem pierwiastkowym, byłaby przecząca, a zatem (85) i wartości głoski x byłyby albo zmyślane albo wcale niepodobne. Kiedy $2a$ będzie

mniejsze, iak $\frac{cc}{b}$, to natenczas dwie wartości

głoski x wypadają przeczące; to jest, że w takim razie zagadnienie względem kąta HDI jest niepodobne do rozwiązania; ale względem drugiego kąta EDG równego pierwszemu, może mieć dwa rozwiązania: które żeby mieć, trzeba wykryślić te dwie wartości $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$, a to

w sposób następujący. Wynałazłszy, iak wy-

żę, na wartość ilości $\frac{cc}{b}$ linią CN , zrób

fig. 17. (fig. 17) $NQ = 2a$, i opisałwszy na NQ iako na średnicy, półkoła NVQ , przytknij do niego styczną CV ; potem wnieś CV od C do P ku N i od C do K na drugą stronę; to linie NP i NK będą dwiema wartościami głoski x ; które wznaczywszy od D do G i od D do G'

fig. 16. (fig. 16), a przez punkt A , i przez punkta G i G' poprowadziwszy dwie linie proste EG , EG' , zrobią się dwa trójkąty EDG , EDG' , z których każdy równać się będzie kwadratowi cc . Co zaś powiedziało się że dwie li-

nie

nie NP i NK (fig. 17) będą dwiema wartościami głoski x , to wynika stąd, że podług (Jeom. 124), CV będąc średnią proporcjonalną między CN i CQ , jest $= \sqrt{(CQ \times CN)}$, albo (położywszy zamiast tych linii onych wartości), będzie CV albo CP albo $CK =$

$\sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; więc $NP = CN - CP$

$= \frac{cc}{b} - \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; a zaś $NK =$

$CN + CK = \frac{cc}{b} + \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$; lecz

te dwie ilości, są też same co wartości głoski x , odmieniwszy tylko w nich znaki; więc też ilości wznaczone od D ku G (fig. 16), fig. 16. będą wartościami głoski x .

203. Gdyby punkt A (fig. 18) znajdował się bydź położony w samymże kącie HDI , natenczas z przyczyny że BD przypada z przeciwnęj strony, iak przypadała przedtem, ilość a staie się przeczącą, a zatem dwie wartości głoski x będą następujące, $x = \frac{cc}{b} \pm$

$\sqrt{(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b})}$, to jest też same (przemieni-

wszy tylko znaki), o których wykryśleniu dopiero mówiliśmy. Skąd pokazuje się, że powinny bydź tak wykryślane, iak było w fig. 17; ale wartości głoski x trzeba wznaczyć od D ku I (fig. 18); przez co zamkną się dwa trójkąty DEG , $DE'G$, oba czyniące zadosyć zagadnieniu.

204. Naostatek punkt A , może iefzcze znajdować się bydź położony nietylko poniżej linii BD (fig. 19), ale nadto w samymże kącie BDE fig. 19. Natenczas obie ilości a i b , wypadają prze-

czące, skład wynika $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} \pm \frac{2acc}{b}\right)}$,
to jest że wyrazy wypadają też same co wy-
żey, ale z przeciwnymi znakami. Wykry-
fig. 15. ślić ie tedy należy tak iak w fig. 15. Gdzie
CK będąc wartością twierdzącą, pierwszą trze-
CP ięży wartością przeczącą, pierwszą trze-
fig. 19. ba wznaczyć (fig. 19), od D do G ku B, a
drugą z przeciwny strony, to jest od D do G.

Nad temi różnemi przypadkami rozwią-
zań, dla tego zastanowiliśmy się tu tak dłu-
go, ażeby się pokazało, iako te wszystkie ro-
związania zawierają się w iednym zrówna-
niu, iako wynikają z samy odmiany zna-
ków, i iako przeciwne położenia linii, by-
wają oznaczone przeciwnymi znakami i od-
wrotnie. Zostaie nam ieszcze, ażebyśmy po-
kazali niektóre użycia tegoż rozwiązania, nad
którem bawiliśmy się dotąd.

205. Gdyby zadane było to zagadnie-
fig. 20. nie: Z danego punktu A (fig. 20) zewnątrz
albo wewnątrz trójkąta wiadomego DHI, po-
prowadzić linią AF, któraby przedzieliła ten
trójkąt na dwie części DEF, EFH, takie, aby
iedna do drugiey miała się w stosunku wiado-
mym, to jest np. w takim: $m:n$. To zagadnie-
nie, znayduie swoje rozwiązanie w rozwią-
zaniu zagadnienia poprzedzającego. Albo-
wiem, ponieważ trójkąt DHI jest zadany,
i ponieważ wiadomo, trójkąt DEF iaką ma
bydź częścią trójkąta DHI, więc szukając
czwartego wyrazu téy proporecy, $m:n$:
 m : jak się ma powierzchnia trójkąta DHI
do czwartego wyrazu, takowy czwarty wy-
raz pokaże powierzchnią odpowiadającą tró-
kątowni DEF. Lecz zawsze można wyna-
leśdź kwadrat cc , równający się téy powie-
rzeni (185); więc zagadnienie wychodzi na
to

to, ażeby przez punkt A poprowadzić linią
AEF, któraby wraz z bokami DH, DI, za-
mykała trójkąt DEF równający się kwadra-
towi cc ; co wychodzi właśnie na zagadnie-
nie poprzedzające.

206. Jawną iest także, że pod toż sa-
mo zagadnienie możnaby ieszcze podciągnąć
i to: Przedzielić iakąkolwiek figurę prostokry-
śną (fig. 21) przez linią poprowadzoną z fig. 21.
iakiękolwiek punktu A, na dwie części BCDE,
EFDHK, któreby były między sobą w danym
stosunku. Jakóż, ponieważ figura BCDHK
rozumie się wiadoma, więc muszą bydź w
niey wiadome wszystkie kąty i boki; a za-
tém łatwo będzie mieć trójkąt BLC, po-
wstający z dwóch boków przedłużonych KB
i DC; mając wiadomy bok BC, i dwa ką-
ty LBC i LCB, które są spełnieniami ką-
tów wiadomych CBK i BCF; a tak po-
wierzchnią trójkąta LBC można poczytać
za znaną. Naostatek, ponieważ powierz-
chnia EBCF ma bydź pewną częścią po-
wierzchni całkowitey, więc także rozumie
się wiadoma; a zatem zagadnienie wychodzi
na to: ażeby poprowadzić linią AEF, któ-
raby w kącie KLD zamknęła trójkąt, ró-
wnający się zadanemu kwadratowi. Stąd
zaś łatwo można zrozumieć, iakby sobie
trzeba postąpić, gdyby przyszło podzielić
tę figurę na większą liczbę części, znay-
dować się mających między sobą w danych
stosunkach.

207. Należy nam tu uczynić
ieszcze iedną uwagę, a ta iest, że
iżeli niektóre z ilościów danych,
wchodzących w zrównanie służące
do

do rozwiązania iakiego zagadnienia, są takie, iż odmiéniwszy znaki przedniemi położone, w znaki przeciwne, zrównanie przeto nieodmiéni się; albo jeżeli odmiana w położeniu iakiey linii, lub téż szukane linie figury, niepociągają za sobą żadnéy odmiany, ani w położeniu ani w wielkości linii zadanych; natenczas pomiędzy różnemi wartościami głoski x , (kiedy ich będzie wiele w zrównaniu), zawsze znajdzie się jedna taka, która da rozwiązanie przyzwoite temu przypadkowi, co wskazuje taką odmianę.

Np. W zagadnieniu, którem zabawialiśmy się dotąd, widzieliśmy że jedna z wartościów głoski x , rozwiązywała go bezśrednie w takim przypadku, kiedyby linia AEG (fig. 14), miała przechodzić przez kąt HDI , iak się rozumiało w przedsięwziętym rachunku; lecz oraz widzieliśmy, że druga wartość téżże głoski x , dała nam rozwiązanie zagadnienia w takim przypadku, kiedyby rzecz szła nie o kąt HDI , ale o kąt iemu przeciwny w wierszchołku.

Przyczyna tego ta jest, że w każdym przypadku mając używać tychże ilościów, i czynić téż same rozumowania, powinno się koniecznie przyiść do tegoż samego zrównania; a zatem tóż samo zrównanie musi dać oba rozwiązania.

208. Daymy teraz, że na kierunku danéy linii AB (fig. 22), trzeba wynaléźć punkt C , taki ażeby odległość iego od punktu A , była średnią proporcjonalną, między iego odległością do punktu B i między całą linią AB . Oznaczywszy tedy przez a , linią daną AB , a przez x szukaną odległość AC , mieć będą $BC = a - x$, a ponieważ ma być $AB : AC :: AC : CB$ albo $a : x :: x : a - x$, więc po rozmnożeniu skrajnych i średnich wyrazów, musi być $xx = aa - ax$, albo $xx + ax = aa$; zrównanie drugiego stopnia, z którego wnosi się $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$.

Zeby wykryść pierwszą z tych wartościów, to jest $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, trzeba podług tego co się powiedziało, (187), z punktu B wyśtawić prostopadłą $BD = \frac{1}{2}a$, potem poprowadziwszy AD , będzie $AD = \sqrt{[(BD)^2 + (AB)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; niezoftanie tedy więc do czynienia, tylko od téy linii odjąć ilość $\frac{1}{2}a$, co wykonać można, wznacając DB od D do O ; natenczas AO , będzie warto tyle, co $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)} - \frac{1}{2}a$, to jest będzie równać się ilości x ; wstawivszy tedy AO od A do

do C ku B , punkt C będzie szukanym punktem.

Co się zaś tycze drugiey wartości x , to jest $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; wznaczywszy BD do O' na przedłużeniu linii AD , linia AO' będzie warta tyle, co $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; a że taż sama ilość wzięta w sposób przeczący, jest wartością głoſki x , więc trzeba wznaczyć AO' od A do C' na linii AB , przedłużonę w przeciwną stronę, tę w którą rozumieliśmy że x dążyło w poprzedzającym rozwiązaniu; tym sposobem znajdzie się drugi punkt C' taki, że odległość jego od punktu A , będzie średnią proporcjonalną, między odległością jego od punktu B , i między całą linią AB .

Uważmy tu po drodze, że w tém zagadnieniu zawiera się także i to: *Ażeby linią daną AB przedzielić w średnim i skrajnym stosunku.* Dla tego też wykryślenie dopiero przepisane, jest właśnie toż samo, które podaliśmy byli wyżej (Jeom. 125). Lecz widzimy, że Algebra prowadzi nas do wynalezienia sposobu takowego wykryślenia, zamiast że w Jeometrii, zakładaliśmy się na wykryśleniu już wynalezioném, i tylko dowodziliśmy należytości i prawdy jego.

209. Jeżeli cokolwiek zastanowimy się nad porządkiem, który zachowaliśmy w zagadnieniach poprzedzających, to pokaże się, że zawsze na niewiadomą obieraliśmy sobie taką linią, któraby (znalazłszy ją) służyła do wynalezienia wszystkich

ſtkich innych linii, zgadzających się z warunkami zagadnienia. I tak zawsze trzeba sobie postępować: atoli w obieraniu sobie takiej linii, należy jeszcze umieć uczynić wybór; częstokroć może być kilka takich linii, które będąc raz znaiome, zarówno służyłyby do wynalezienia inſzych linii; ale spomiędzy nich, iedne prowadzą do trudniejszych a drugie do łatwiejszych zrównań. Zeby tedy wiedzieć do czego skłonić się w takim przypadku, kładziemy tu regułę następującą.

210. Jeżeli spomiędzy linii albo ilościów, które osobno obrane będąc na niewiadomą, służyłyby do wynalezienia wszystkich innych ilościów, jeżeliby mówię, spomiędzy takich linii albo ilościów, znajdowało się dwie zarówno zgodnych, tak iżby rozsądnie przewidyć można, że obie przywiodłyby do iednakowego zrównania (wyjąwszy odmiennosc znaków); w takim razie dobrze będzie, ani tę ani owę niebrać za niewiadomą, ale raczej wziąć inną ilość, któraby zarówno zawisła od takich obu ilościów.

Np.

Np. wziąć za niewiadomą połowę summy owych dwóch ilościów, albo połowę ich różnicy, albo też średek proporcjonalny między niemi i. t. d. Tym sposobem zawsze wpadnie się na zrównanie prościęjsze, iak gdyby się szukało było samej ilości téj lub ówéj. W następującem zagadnieniu zobaczymy téj prawdy kilka przykładów.

211. Z punktu D (fig. 23) położonego w kącie prostym IAE i równo odległego od dwóch boków IA i AE , poprowadzić linią prostą DB , taką ażeby część iéy CB zawarta w kącie prostym EAB , równała się iakiéy pewnéj linii danéj.

Postawiwszy prostopadłe DE , DI , mogą zarówno obrać sobie na niewiadomą, linią CE albo AB , AC albo IB , CD albo DB . Jeżelibym wziął na niewiadomą np. linią CE , to oznaczywszy ją przez x , a przez a każdą z dwóch linii sobie równych DE , DI , które rozumieją się być wiadome, nadto oznaczywszy przez c linią daną, któręj ma się równać linią BC , mieć będę $AC = AE - CE = a - x$; a zaś linią AB , da-

dzą

dzą mi dwa trójkąty sobie podobne DEC , CAB , przez tę proporcją: $CE:DE::AC:AB$; to jest, $x:a::a-x:AB$; skąd wyciąga się AB

$$= \frac{aa - ax}{x}. \text{ Lecz na fundamencie}$$

własności trójkąta prostokątnego (Jeom. 164), $(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2$; więc położywszy zamiast tych linii ich wartości Algebraiczne,

$$\text{będzie } (a-x)^2 + \left(\frac{aa-ax}{x}\right)^2 = cc,$$

$$\text{albo } aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx} = cc,$$

albo po wyrugowaniu mianownika, po przestawieniu i po zebraniu, $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$; zrównanie czwartego stopnia, i oczywiście nienayłatwiejsze do rozwiązania.

Jeżelibym znowu zamiast CE , wziął na niewiadomą linią IB ; to oznaczywszy ją przez x , i sprawiwszy się porządkiem zachowanym w poprzedzającym rozwiązaniu, wpadłbym na zrównanie nieróżniące się od dopiero wyżej wynalezionego, tylko w tém, że zamiast $a-x$ byłoby w niém położono $x-a$; to jest, które byłoby właśnie toż samo, z

przy-

przyczyny że te ilości znajdą się w niem byż podniesione do kwadratu. Podobnież, gdyby się na niewiadomą obrała linia AB , zrównanie z takiego obrania wynikające, nieróżniłoby się tylko znakami, od zrównania wypadającego przez obranie linii AC za niewiadomą. Co się zaś tycze linii DB i DC , zrównania odpowiadające każdey z nich, nieróżniłyby się także między sobą, tylko znakami; zatem żadney z tych dwóch linii obierać sobie nienależy za niewiadomą.

Ale wzięwszy za taką niewiadomą, sumę dwóch linii DB i DC , i oznaczywszy ją przez $2x$, podług (Jeom. 305) mieć będą $DB = x + \frac{1}{2}c$, a $DC = x - \frac{1}{2}c$; do wynalezienia zaś linii AB i AC , równoległe DI i CA , dadzą mi te dwie proporcye, $DC : CB :: IA$ albo $DE : AB$ i $DB : CB :: DI : AC$; to jest, $x - \frac{1}{2}c : c :: a : AB$, i $x + \frac{1}{2}c : c :: a : AC$; więc $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$, a zaś $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; a zatem, z przyczyny że trójkąt prostokątny daje

mi $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, mieć będą $\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$; albo też po zniesieniu ułamków i po rozdzieleniu przez cc , $a^2(x + \frac{1}{2}c)^2 + a^2(x - \frac{1}{2}c)^2 = (x + \frac{1}{2}c)^2(x - \frac{1}{2}c)^2$; po odprawieniu wskazanych działań, po przestawieniu i po zebraniu będzie, $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$; zrównanie wprowadzie także czwartego stopnia, ale od poprzedzającego łatwieysze do rozwiązania, bo podług (141) rozwiązuie się w sposób przepisany do zrównań drugiego stopnia.

Można także ieszcze przyiść do zrównań dołyć prostych, używając dwóch niewiadomych, z którychby jedna wyrażała sumę obu linii AB i AC , a druga ich różnicę; to jest, trzeba zrobić $AB + AC = 2x$, a zaś $AB - AC = 2y$, skąd wypadnie $AB = x + y$, a zaś $AC = x - y$; natehczas, trójkąt prostokątny ABC , da mi $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, a trójkąty sobie podobne ABC , IBD , dadzą $AB : AC :: IB : ID$, skąd składam sobie dwa zrównania, służące do wynalezienia wartościów

głoszek x i y . A wyciągnawszy z jednego z nich wartość kwadratu xx , i takową położywszy w drugim równaniu, mieć będę nowe równanie, służące mi do wynalezienia wartości głoski y . Lecz dokóńczenie takowego rachunku, zostawiamy dla wprawy poczynającym, sami zaś powracamy do naszego równania.

Podług tego co się powiedziało (141), będzie $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 = (\frac{1}{4}cc + aa)^2 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4 = aacc + a^4$; a wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy, będzie $x^2 - (\frac{1}{4}cc + aa) = \pm \sqrt{aacc + a^4}$, a zatem $x^2 = \frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{aacc + a^4}$; wyciągnawszy znowu powtórnie pierwiastek kwadratowy będzie naostatek:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{aacc + a^4}} \text{ albo } x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa \pm a \sqrt{cc + aa}}$$

Z tych czterech wartościów głoski x , wynikających z dwójakiego połączenia podwójnego znaku $\pm$, nieznayduie się tylko jedna, która by należała do zagadnienia zadanego; to jest, $x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa \pm a \sqrt{cc + aa}}$. Ta zaś wartość, $x =$

$\pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + aa - a \sqrt{cc + aa}}$, rozwiązałyby zagadnienie w takim przypadku, kiedyby linia CB miała zawierać się w tymże kącie co punkt D (zob. fig. 24); a natenczas x , niewyraża połowy summy, ale połowę różnicy między dwiema liniami DB i DC ; o czém łatwo można przekonać się, oznaczywszy takową różnicę przez $2x$, i rozwiązałyby zagadnienie tymże sposobem co wyżej; albowiem będzie $DB = \frac{1}{2}c + x$, $CD = \frac{1}{2}c - x$, a równoległe DI i CA , dadzą $DB : CB :: DI : CA$, tudzież $DC : CB :: AI : AB$; to jest $\frac{1}{2}c + x : c :: a : CA$, i $\frac{1}{2}c - x : c :: a : AB$; więc $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}$, a zaś $AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}$; więc z przyczyny trójkąta prostokątnego CAB , będzie $\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2$, albo po odprawieniu tychże działań co wyżej, $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$; równanie zgoła toż samo, króre wypadło nam wyżej, wziąwszy za niewiadomą summe dwóch linii BD i CD (fig. 23). fig. 23. Więc toż samo równanie służąc do

fig. 23. LIM , daje (fig. 23) $LM = \sqrt{(MI)^2 + (IL)^2}$
 fig. 24. $= \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc + a \sqrt{(aa + cc)}]} = x$, a w fig.
 24. $IM = \sqrt{(LM)^2 - (IL)^2} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc]}$
 $= a \sqrt{(aa + cc)} = x$; więc t. d.

Trzeba tu uważać względem téj oratniéy wartości, że w wykryśleniu dopiero opisaném, rozumie się linia IH (fig. 24.) większa nad linią LI , albo przynajmniéy onéy równa. Gdyby była mniejsza, zagadnienie w tym razie byłoby niepodobne do rozwiązania; co téż pokazuje i Algebra. Albowiem w wartości $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a \sqrt{(aa + cc)}]}$, jeżeli $aa + \frac{1}{4}cc$ to jest $(IH)^2$ jest mniejsze od $a \sqrt{(aa + cc)}$ to jest od $(IL)^2$, to cała ilość okryta pierwszym znakiem pierwiastkowym, będzie przecząca, a zatem wartość głoski x tylko będzie zmyślona.

212. Obrawszy sobie na niewiadomą, sumę dwóch linii DB i DC (fig. 23) albo ich różnicę (fig. 24), przypadliśmy na zrównanie prościęysze iak biorąc CE albo AC albo AB albo IB , bo stósowność linii DB i DC z liniami IB i AB , jest podobna do téj, która zachodzi między temiż liniami DB i DC

a

a między liniami AC i CE ; to jest że mogą bydź wynalezione przez działania jednakowe, używając linii IB i AB , albo AC i CE . A w powszechności powiedziawszy, ponieważ zrównanie powinno zawierać w sobie wszystkie różne stósunki, iakie tylko zachodzić mogą między ilością szukaną i innemi ilościami od niéy zawisłemi, więc takowe zrównanie zawsze wypadać będzie tém prościęysze, im mniey zachodzić będzie różnych stósunków, między tą ilością co się obrała za niewiadomą, a między innemi ilościami.

213. Daymy że $ABED$ (fig. 25). wyraża kulę powstałą z kołowrotu półkoła ABE około średnicy AE . W takowym ruchu, z obrotu wycinka ABC robi się wycinek kulowy, składający się z odcinka kulowego, powstałego z kołowrotu półodcinka ABP i z stożka, powstałego z kołowrotu trójkąta prostokątnego BPC . Jest zadano ażeby dóysdź, w którym mięyscu odcinek kulowy i stożek, są sobie równe.

T 4

Zeby

Zeby rozwiązać to zagadnienie, należy sobie przypomnieć (Jeom. 247), że wycinek kulowy, równa się mnogości, z powierzchni cząłki BAD rozmnożony przez trzecią część promienia AC . Powierzchnia zaś cząłki (Jeom. 226), wynajduie się, rozmnożywszy okrąg $ABED$ przez wysokość AP téż cząłki. Więc jeżeli oznaczmy przez $r : c$, stosunek promienia do okręgu, i jeżeli zrobimy $AC = a$, $AP = x$; dóydzimy okręgu $ABDE$ przy pomocy téy proporcji, $r : c :: a : ABDE$, który pokaże się być $\frac{ca}{r}$; więc powierzchnia cząłki będzie $\frac{cax}{r}$, a zatem na bryłowość wycinka wypadnie, $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ albo $\frac{caax}{3r}$.

Zeby mieć bryłowość stożka, trzeba rozmnożyć powierzchnią koła służącego mu za podstawę, to jest powierzchnią koła mającego za promień BP , przez trzecią część wysokości CP : lecz $CP = CA - AP = a - x$, a zaś $CB = a$, więc w trójkącie prostokątnym BPC , będzie $BP = \sqrt{(CB)^2 - (CP)^2} = \sqrt{(aa -$

aa

$aa + 2ax - xx) = \sqrt{(2ax - xx)}$; a ponieważ znowu, żeby mieć powierzchnią koła mającego za promień BP , trzeba rozmnożyć okrąg jego przez połowę promienia, żeby zaś mieć takowy okrąg, trzeba wyrachować czwarty wyraz téy proporcji, $r : c :: \sqrt{(2ax - xx)}$, do czwartego wyrazu, który bydz pokaże się $\frac{c\sqrt{(2ax - xx)}}{r}$, więc rozmnożywszy ten okrąg przez połowę promienia $\sqrt{(2ax - xx)}$, wypadnie na powierzchnią podstawy stożka, $\frac{c(2ax - xx)}{2r}$; którą naostatek rozmnożywszy przez trzecią część wysokości CP , to jest przez $\frac{a - x}{3}$, wyniknie nabryłowość stożka, $\frac{c(2ax - xx)}{2r} \times \frac{a - x}{3}$. Lecz ażeby stożek równał się odcinkowi, trzeba aby odcinek który jest sumą tych obu brył, był dwa razy większy od każdéy z nich, więc musi być $\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a - x}{3}$, albo $\frac{caax}{3r} = \frac{c(2ax - xx) \cdot (a - x)}{3r}$, wyrugówawszy

czynnika 2, spólnego licznikowi i mianownikowi. Otóż jest zrównanie

nie służyć maiace do rozwiązania zagadnienia. Można go ieszcze zrobić prościęyszym, wyrugowawszy 3r. wspólnego dzielnika, i cx wspólnego mnożnika obu części równania; a natenczas będzie, $aa = (2a - x)(a - x)$, albo $xx - 3ax = -aa$; skąd podług reguł pierwszego Rozdziału, wyciąga się $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Lecz z tych dwóch wartościów, nierozwiązanie zagadnienia tylko ta, $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, bo druga wartość $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, iako wyrażająca więcej nad $2a$, to jest więcej nad średnicę, oczywiście niemoże służyć do kuli.

Chcąc tedy wykryć tę wartość, $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, trzeba ją napisać w téj postaci: $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{3}{2}aa - aa)}$; a dopiero zrobiwszy $AM = \frac{3}{2}a$, na AM iako na średnicy, opisać się pół koła AOM , w którym wznaczywszy cięciwę $AO = a$, i poprowadziwszy OM , takowa linia OM przenosi się od M do P ku A , tak że punkt P da wymiar wysokości AP , czyli wartość głoski x . Jakóż, z przyczyny trójkąta prostokątnego AOM , będzie OM albo $PM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{(\frac{3}{2}aa - aa)}$; więc $AP = AM - PM = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{3}{2}aa - aa)} = x$.

Co się tyczy drugiego rozwiązania, $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, takowe (iako powiedziało się dopiero wyżej) nienależy do niniejszego zagadnienia; ale należałoby iako też i pierwsze do następującego zagadnienia, które łatwo da się

się wyczytać z danego równania $xx - 3ax = -aa$, albo $3ax - xx = aa$, to jest: Maiąc daną linią AN (fig. 26) podzieloną na trzy równe części w punktach B i D , żeby na kierunku téż linii wynaleźć taki punkt P , iżby część AD , była średnią proporcjonalną między AP i PN . Jakóż, oznaczywszy przez a linią AD , która jest trzecią częścią danej linii AN , a zaś AP przez x , będzie $PN = 3a - x$; a z warunków zagadnienia wypada proporcja, $x : a :: a : 3a - x$, skąd składa się to równanie, $3ax - xx = aa$, którego dwoma pierwiastkami, jest taż sama ilość co wyżej, to jest $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, i może być wykryślona podobnymże sposobem. oprócz drugiey wartości $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, którą żeby wykryć, trzeba przenieść MO od M do P' ku N ; a natenczas AP i AP' będą dwiema wartościami głoski x .

Dalsze przystosowania Algebry w różnych materyach.

214. **B**ryły, które uważaliśmy w Geometrii, nadarzaia się w wielu zagadnieniach, a osobliwie w zagadnieniach Fizyczno - Matematycznych, bo z nich składaia się wszystkie inne bryły. Dobrze tedy będzie, obeznac się z wyrażeniami Algebraicznemi, oznaczającemi bądźto całe takowe bryły, bądźto części onychże. Oprócz iż nam to będzie rzeczą wielce użyteczną w dalszym przeciągu téj nauki, ten zysk ieszcze

szcze stąd odnieśliemy, iż zobaczymy użyteczność Algebry w uważaniu takowych brył iednych naprzeciw drugim, i w obrachowaniu innych, któreby miały związek z pierwszymi.

Jeżeli oznaczmy w powszechności, przez $r : c$, stófunek promienia do okregu koła, [stófunek wiadomy z dokładnością, do praktyki więcę iak dostateczną (Jeom. 146)]; natenczas, okrag iakiegokolwiek innego koła, którego by promieniem było a , byłby wyrażony przez $\frac{ca}{r}$, a powierzchnia iego

go przez $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2}a$ albo przez $\frac{ca^2}{2r}$.

A stąd pokazuje się, że powierzchnie kół, rosną iak kwadraty ich promieniów; bo $\frac{c}{2r}$ będąc zawżse iednakowęj wartości, ilość $\frac{ca^2}{2r}$ nieprzyraffa tylko w proporcji ilości a^2 .

Jeżeli h , iest wysokością wałka, którego promieniem podstawy byłoby a , to podług (Jeom 237) wyrażeniem bryłowości iego, będzie $\frac{ca^2}{2r} \times h$; z podobnéjże przyczyny, na bryłowość drugiego wałka, którego by wysokością było h' , a promieniem podstawy

stawy a' , wypadłoby $\frac{ca'^2}{2r} \times h'$; tak iż bryłowości tych dwóch wałków byłyby między sobą $:: \frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{ca'^2}{2r} \times h'$, albo $:: a^2h : a'^2h'$; wyrugówawszy spólnego czynnika $\frac{c}{2r}$; to iest, że bryłowości wałków mają się między sobą, iak mnogości, wynikające z rozmnożenia wysokościów przez kwadraty promieniów, odpowiadających swoim podstawóm. Gdyby wysokości były proporcjonalne promieniom podstaw, to natenczas byłoby $h : h' :: a : a'$, a zatem wypadłoby $h' = \frac{ha'}{a}$, i stófunek $a^2h : a'^2h'$, przemienilby się naten, $a^2h : \frac{a^3h}{a}$, albo (wyrugówawszy spólnego czynnika h , rozmnożywszy przez a , i zniósłszy mianownika a), przemienilby się na $a^3 : a'^3$; to iest, że w takim razie bryłowości miałyby się między sobą, iak sześciany promieniów odpowiadających swoim podstawóm.

Mówiąc w powszechności, powierzchnie (iak widzieliśmy w Jeometrii), zawisły od mnogości z dwóch wymiarów, a bryłowości zawisły od mnogości z trzech wymiarów; a zatem jeżeli każdy wymiar iednéj z dwóch brył, albo iednéj z dwóch powierzchniów, które stófuia się między sobą, ma się do każdego wymiaru drugiey bryły albo

bo drugię powięrszchni w tymże stófunku, to takowe dwie powięrszchnie będą między sobą iak kwadraty, a dwie bryły, będą między sobą iak sześciiany dwóch wymiarów odpowiadających; a biorąc ięszcze powięrszchnię, iężeli dwie ilości iakiekolwiek iednakowię natury, będą wyrażone przez tyle czynników, ile się spodoba, i iężeli każdy czynnik iednę ilości, ma się do każdego czynnika drugię ilości w tymże stófunku, to takowe dwie ilości będą między sobą, iak odpowiadający czynnik w każdej ilości, podniesiony do stopnia oznaczonego przez liczbę tychże czynników. *Np.* niechay iedna ilość będzie wyrażona przez $abcd$ a druga przez $a'b'c'd'$, tak że te dwie ilości mają się iedna do drugię $:: abcd : a'b'c'd'$; natenczas, iężeli $a:a' :: b:b' :: c:c' :: d:d'$, to z tych proporcjów można wyciągnąć, $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$; a zatém stófunek $abcd :$

$\frac{a'b'c'd'}{a^4}$ odmięni się na ten, $abcd : \frac{a^4bcd}{a^3}$ albo na $a : \frac{a^4}{a^3}$, albo na $a^4 : a^3$.

Ta

Ta prawda, ięszcze miałaby mięysce, chociażyby takowe ilości niebyły iednostkowe, *np.* gdyby iedna była wyrażona przez $ab + cd$, a druga przez $a'b' + c'd'$; iężeli wymiary pięrszēy ilości, są proporcjonalne wymiaróm drugię, to takowe ilości mię się będą iedna do drugię $:: a^2 : a'^2$. Jakóży, ponieważ rozumię się, że $a:a' :: b:b' :: c:c' :: d:d'$, więc będzie $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$; a zatém stófunek $ab + cd : a'b' + c'd'$,

prziemięni się na ten, $ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}$.

albo $ab + cd : \frac{aa'^2b}{a^2} + \frac{a'^2cd}{a^2}$ albo $ab + cd : \frac{a'^2(ab + cd)}{a^2}$ albo $a^2(ab + cd) : a'^2(ab + cd)$, albo naostatek $a^2 : a'^2$.

Ta ostatnia uwaga, okazuje w sposób powięrszchny, że powięrszchnie figur podobnych sobie, mają się między sobą, iak kwadraty dwóch wymiarów odpowiadających którychkolwiek, bryłowatości zaś brył są między sobą, iak sześciiany. Albowiém, niech będą iakie chcą te figury, albo te bryły, pięrszēe zawłże można uważać, iakoby złożone z tróykątów sobie podobnych, którychby wysokości i podstawy w obu figurach były iedne drugim proporcjo-

cyonalne; drugie zaś znowu, to jest bryły, można uważać, iakoby złożone z piramid sobie podobnych, mających swoje trzy wymiary proporcjonalne iedne drugim.

A stąd pokazuje się, iak łatwo jest przyśtółować ilości iedne do drugich, mając ie wyrażone Algebraicznie; czyto te ilości będą iednakowego gatunku, czy też różnego, iakoto mając stożek i kulę, wielościan i walek, byleby iednakże były iednakowéy natury, to jest albo obie bryły, albo obie powierzchnie, albo t. d.

Np. gdyby trzeba było uczynić porównanie stółunku bryłowościów z stółunkiem powierzchniów; oznaczywszy bryłowości dwóch ciół sobie podobnych przez V i u , powierzchnie ich przez S i s a linie w nich odpowiadające przez L i l ; będzie $V : u :: L^3 : l^3$, albo $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} :: L : l$. Podobnież będzie, $S : s :: L^2 : l^2$ albo $\sqrt{S} : \sqrt{s} :: L : l$; więc $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$, albo $V : u :: S^3 : s^3$, albo $\sqrt[3]{V^2} : \sqrt[3]{u^2} :: S : s$; skąd daie się widzieć, że powierzchnie rosną w mnieyszym stółunku, aniżeli bryłowości.

215. Nauczyło się w Jeometrii (l. 243), iak sobie trzeba postąpić, żeby mieć bryłowość piramidy uciętéy, albo stożka uciętégo. Jeżeli tedy oznaczmy przez h wysokość całéy piramidy, a przez h' wysokość pi.

piramidy odciętéy; przez s powierzchnią dółnéy podstawy, a przez s' powierzchnią górnéy podstawy, mieć będziemy podług (Jeom. 202), $s : s' :: h^2 : h'^2$; a zatem będzie h'^2

$$= \frac{h^2 s'}{s}, \text{ albo } h' = h \sqrt{\frac{s'}{s}}; \text{ jeżeli zaś oznaczmy przez } k \text{ wysokość samego piénka, mieć będziemy } k = h - h', \text{ a zatem będzie } k = h - h \sqrt{\frac{s'}{s}}, \text{ albo } k = \frac{h\sqrt{s} - h'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}; \text{ skąd}$$

wyciąga się $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$. Ze zaś bryłowość całéy piramidy, jest wyrażona przez $s \times \frac{h}{3}$, a bryłowość piramidy odciętéy przez

$s' \times \frac{h'}{3}$, albo (położywszy zamiast h' wartość iego dopiéro wynalezioną), $s' \times \frac{h}{3} \sqrt{\frac{s'}{s}}$; więc na bryłowość stożka uciétego, wypadnie

$$\frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}}, \text{ albo } \frac{h}{3} \cdot (s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}), \text{ albo naostatek, } \frac{h}{3} \cdot \frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}; \text{ położywszy znowu zamiast } h \text{ wartość iego wynalezioną, mieć}$$

będziem $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \frac{(s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'})}{\sqrt{s}}$, co wychodzi na $\frac{k}{3} \left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}} \right)$, albo rozdzieliwszy

przez $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$, na $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$; wartość, z której pokazuje się, że każda piramida albo stożek uciéty, składa się z trzech piramid téżé wysokości, z którychby pierwsza miała za podstawę, podstawę s dółną piénka, Tom II. U dru-

druga, podstawę jego górną s' , a trzecia, podstawę średnią proporcjonalną $\sqrt{ss'}$, między podstawą górną s' i między dolną s . Albowiem, żeby mieć bryłowość tych trzech piramid, mających spólną wysokość, dożyć jest dodać razem trzy podstawy, iakoto $s + \sqrt{ss'} + s'$, a sumę rozmnożyć przez trzecią część wysokości spólnej, to jest przez $\frac{h}{3}$, a z tego działania, wypadnie też sama ilość co wyżej.

Na tym fundamencie, można wnieść sobie formułę dożyć prosta. służącą do wyrażenia bryłowości stożka uciętego, wydrążonego wałkowo i równolegle ośi. Jakóż, jeżeli oznaczymy przez m promień wałka wydrążonego, przez e mnieyszą, a przez E większą grubość; ponieważ powierzchnia koła, podług (Jeom. 157), równa się kwadratowi promienia, rozmnożonemu przez stośunek półokręgu do promienia, więc na wyrażenie trzech powierzchniów o które rzecz idzie, wypadną te trzy ilości, $\frac{c}{2r} \times (m + e)^2$,

$\frac{c}{2r} \times (m + E)^2$, i $\frac{c}{2r} \times (m + e) (m + E)$; a zatem sumę tych trzech powierzchniów, rozmnożywszy przez trzecią część wysokości h , a od mnogości odjąwszy bryłowość wydrążonego wałka, to jest $\frac{c}{2r} \times m^2 h$, albo $\frac{c}{6r} \times$

$3m^2 h$, wypadnie na bryłowość szukaną, $\frac{ch}{6r}$

$\times [(3E + 3e) \times m + E^2 + Ee + e^2]$, albo $\frac{ch}{2r}$

$\times [(E + e) (3m + E) + e^2]$.

T.

Ta formuła, może służyć do wynalezienia wagi armatney, któreby wymiary były wiadome; bo armata, iak wiemy, składa się z trzech stożków uciętych, wydrążonych wałkowo, z których pierwszy daie denną, drugi czopową, a trzeci wylotową sztukę; do tych przydaćby trzeba, wałek składający samo dno armaty. Co się tycze czopów, uszu, i wszelkich ozdób, takowe rozładnie oszacować można na pamięć. Zobacz Tom I. Jeom. kart. 311 Zagadn: VIII.

216. Jeżeli a oznacza promień kuli, to $\frac{ca^2}{2r}$ będzie powierzchnią ięć koła naywiększego; $\frac{4ca^2}{2r}$ albo $\frac{2ca^2}{r}$ będzie powierzchnią samey kuli; a zatem $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3}a$, albo $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ będzie bryłowością onéyże (Jeom. 223. 244).

Jeżeli oznaczymy przez x , wysokość ućinka kołowego iakiegokolwiek, to (iak widzieliśmy w rozwiązaniu ostatniego zagadnienia) (213), na wyrażenie bryłowości wycinka, mieć będziemy $\frac{caax}{3r}$, a zaś na bryłowość stożka, z którego składa się pominiony wycinek, będzie $\frac{c}{2r} \times (2ax - xx) \times \frac{a-x}{3r}$; więc ućinka kulowe-

U 2

lowe-

i któryby średnica była na $\frac{3}{4}$ wysokości, trzeba by zrobić $a = 12$, $p = 51$, $P = 45$; $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$; po czém pokazaloby się bydź $x = 6,47$ cal.

O Liniiach krzywych w powszechności; a w szczególności o Przecięciach Stożkowych.

218. **S** pomiędzy linii krzywych które uważać się zwykły w Jeometrii, iedne są takie, że w nich każdy punkt może bydź wynaleziony na fundamencie iednéyże zasady, to iest przez rachunki i działania podobne iedne drugim; inne zaś są takie, że w nich każdy punkt wynduie się na infzym fundamencie, to iest, przez odmiénne rachunki i działania; atoli ta sama odmiénność podléga pewnemu prawu.

Co się zaś tycze linii nakryślonych, iak się nadarzą, iakie np. kryśli piszący na papierze, takowe niemogą należyć do Jeometrii ściśle wziętęy. Atoli sposoby które podają się w téyże Jeometrii, mogą służyć, przy pomocy pewnych i niezawodnych prawideł, do wykryślenia różnych zawodów, zdających się niepodlégać żadnym prawóm. Takowa sztuka, łączenia między sobą, ilościów, których prawdziwa natura byłaby albo niewiadoma, albo zbyt poskładana, iest iedno z przystöfowań Jeometrii i Algebry, nienaypoślednięy użyteczne.

Ze-

Zeby tedy można było wykryślic sobie linie krzywe, któremi zabawia się Jeometria, trzeba mieć znaime prawa, różnego położenia punktów, składających obwód takowych linii. Te zaś prawa mogą bydź zadane rozmaicie, to iest, albo wskazując sposób, przez który takowe linie, mogą bydź opisane ruchém iednostaynym i iednokształtnym; takie iest koło, które kryśli się obwodząc w okrąg na płaszczyźnie, linią wokoło punktu zadanego. Albo téż wymieniając iakową własność, statecznie należącą do każdego z punktów téy linii krzywęy. Naostatek, to prawo może ielższe bydź zadane w zrównaniu, a nawet można zawsze rozumieć, że iest tak zadane; ponieważ dwa piérwsze sposoby, o których namiénilo się, służą także do wynalezienia zrównania wyrażającego takowe prawo. I w takito ofobliwie sposób uważać tu będziemy linie krzywe, iako nayprostszy a oráz nayzgodnięyszy do poznania ich własnościów, szczególnościów, i użycia. Zobazmy tedy, iakim obyczaiém zrównanie, może

U 4

wy-

wyrazić naturę linii krzywéy, a ponieważ ieszcze dotąd nieznamy in-szély oprócz okręgu koła, przeto pocznijmy od niego.

219. Daymy więc że *AMB* fig. 27. (fig. 27)), jest linia krzywa, w której nieznalibyśmy innéy własności nad tę, że prostopadła *PM*, spu-szczona z któregośkolwiek punktu *M* tęy linii krzywéy, na linię *AB*, jest średnią proporcjonalną między dwiema częściami *AP* i *PB*. Zobaczymy jakim sposobem Algebra, może nas doprowadzić do wynalezienia każdego punktu tęy linii, i różnych własnościów onéy.

Jeżeli sobie oznaczę przez *a* linię *AB*, część iéy *AP* przez *x*, a prostopadłą *PM* przez *y*; to natenczas *PB* będzie wyrażone przez *a—x*; a ponieważ rozumié się *PM* bydź średnią proporcjonalną, między *AP* i *PB*, więc będzie, $x:y::y:a-x$, a zatem $yy=ax-xx$.

Teráz zmyślmy sobie linię *AB* podzieloną na pewną liczbę równych części *np.* na 10, i że z każdego punktu tych przedziałów, są poprowa-dzone prostopadłe *pm, pm, pm*, i. t. d;

12.

iawna jest, że jeżeli w zrównaniu do-pięro wynalezioném, weźmiemy ko-léyno *x*, iakoby równe każdéy linii *Ap, Ap*, i. t. d. *y* będzie wyrażać ka-żdą linię odpowiadającą *pm, pm*, i. t. d.; bo zrównanie $yy=ax-xx$, daie znać, że *y* jest zawsze średnią proporcjonalną, między *x* i między *a—x*, niechayby *x* wyrażało linię iaka się spodoba; i ta jest własność, którą przypisuiemy każdéy prosto-padléy *pm*. Więc naznaczywszy koléyno głosce *x* różne wartości, i wyrachówawszy odpowiadające wár-tości głoski *y*, można będzie wynaléśdź wszystkie punkta tęy linii krzy-wéy ieden po drugim: zobaczymy to w przykładzie.

Podług wyżéy założonego przypuszcze-nia, że linia *a* jest podzielona na 10 cz. miéć będiém *a=10*, a zatém naszé zrównanie przemieni się, na $yy=10x-xx$. Jeżeli te-dy zrobimy koléyno $x=1, x=2, x=3, x=4, x=5, x=6, x=7, x=8, x=9, x=10$; znajdziemy na *y* te odpowiadające wartości $y=\sqrt{9}; y=\sqrt{16}; y=\sqrt{21}; y=\sqrt{24}; y=\sqrt{25}; y=\sqrt{24}; y=\sqrt{21}; y=\sqrt{16}; y=\sqrt{9}; y=\sqrt{0}$; albo $y=3; y=4; y=4,5; y=4,9; y=5; y=4,9; y=4,5; y=4; y=3; y=0$. A tak jeżeli takowe wartości głoski *y*, po-wznowimy koléyno na prostopadłych, odpo-wiadających wartościóm 1, 2, 3, i. t. d. głoski *x*,

x , punkta m, m , i. t. d. powytykane tym sposobem, wszystkie należyć będą do takiej linii, któraby miała tę własność, że w niej każda prostopadła pm , byłaby średnią proporcjonalną, między dwiema częściami ap i pB linii prostej AB ; zobaczmy zaraz więcej, że takowa linia krzywa nieinż jest tylko okrąg koła.

Widzieliśmy indziej, że każdy pierwiastek parzysty ma dwie wartości, jedną twierdzącą, drugą przeczącą. A zatem oprócz wyżey wymienionych wartościów głoski y , i jeszcze mieć będziemy te następujące, $y = -3$; $y = -4$; $y = -4,5$; $y = -4,5$; $y = -5$; $y = -4,9$; $y = -4,5$; $y = -4$; $y = -3$; $y = -0$.

Zeby mieć punkta linii krzywey odpowiadające tym drugim wartościom głoski y , trzeba podług tego, co już kilkokrotnie powtórzyło się względem ilościów przeczących, przedłużyć prostopadłe pm, pm , i. t. d. i powytykać na przeciwną stronę, to jest, od p do m' ilości pm' pm' , i. t. d. równe swoim odpowiadającym ilościom pm , każda każdéy.

Gdyby kto chciał mieć większą liczbę punktów wznaczonych linii krzywey, nie-trzebaby więcej, tylko linią AB zmyslić sobie na większą liczbę części podzieloną ap na 100; to jest, zrobić $a = 100$; albo zastawiawszy ilości a tę samą wartość co wyżey, to jest 10, ilości x naznaczyć wartości pośrednie, między głównemi; tym sposobem będzie także można wyrachować wartości po-

pośrednie odpowiadające głosce y , któreby wskazały nowe punkta linii krzywey.

Wartość $y = 0$, wyżey wynaleziona, daie znać że linia krzywa schodzi się z linią AB w punkcie B , gdzie jest $x = a = 10$; bo ponieważ w takim razie, wartością linii pm jest zero, więc odległość od punktu m do linii prostej AB , musi być także zerem, to jest musi niebydź żadnéy. Niemniéy łatwo widzieć się także daie, że taż linia krzywa, schodzi się i w punkcie A z linią AB : bo ponieważ w takowych zéysciach się pomienionych dwóch linii, wartością głoski y musi być 0, więc zeby znaleźć w których miéyscach przypadają takowe zéyscia, nietrzeba więcej tylko zrobić y równe zerowi, w równaniu $yy = ax - xx$; co go przemieni na $0 = ax - xx$; lecz że $ax - xx = x(a - x)$, takowa zaś mnogość staie się zerem w dwóch przypadkach, to jest kiedy $x = 0$, i kiedy $x = a$; więc także i y w tych obu przypadkach musi być zerem; lecz x , oczywiście jest $= 0$ w punkcie A , a zaś $= a$ w punkcie B ; więc linia krzywa wrzeczy saméy schodzi się z linią AB , w punktach A i B . Z

Z tego przykładu już można poymować, w jaki sposób zrównanie, służy do wynalezienia różnych punktów linii krzywéy. Zobaczymy to jeszcze lepiéy w dalszych przykładach; ale wprzód wytłómaczyć nam trzeba pewne słowa, których niżej używać mamy.

220. Kiedy natura albo własności linii krzywéy mają być wyrażone w zrównaniu, to natenczas każdy punkt m , m , i. t. d. stófuie się, albo przynajmniéy rozumié się być przystósowany do dwóch linii stałych AB , i OAO , (fig. 27.) czyniących między sobą kat wiadomy, bądźto ostry, prosty albo rozwarty; zmyśliwszy sobie tedy, z każdego punktu m poprowadzone linie mp , mp' równoległe liniom OAO , i AB , iawna jest, że można dóysdź położenia takowego punktu, mając wartości linii $p'm$, albo Ap i pm , albo (co naiedno wychodzi), mając wartość iednéy z wymienionych linii, i stófunek iéy z drugą. A zatém kiedy mówi się, że zrównanie wyraża naturę linii krzywéy, przez to nierozumié się co innego, tylko że to

to zrównanie daie stófunek zachodzący między każdym punktem m i między linią Ap , albo linią pm , tak że mając wiadomą iedną, zrównanie pokaże mi drugą; a podług tego, iak takowy stófunek będzie więcéy lub mniéy poskładany, linia krzywa będzie także porządku czyli stopnia więcéy lub mniéy wyniesionego.

Linie Ap albo $p'm$, wymiérzające odległość każdego punktu m od iednéy OAO z dwóch linii stófunkowych, nazywają się *odcinkami* (abscissæ); linie zaś mp albo $p'A$ wymiérzające odległość tegóż punktu m od drugiéy linii stófunkowéy AB , nazywają się *rzędniemi* (ordinatæ); linia AB nazywa się *osią odcinków* (axis abscissarum), a linia OAO jest *osią rzędnych*. Punkt A od którego poczynają się rachować odcinki, nazywa się *początkiem odcinków* (origo abscissarum), tak, iako nazywa się *początkiem rzędnych* punkt od którego poczynają się rachować rzędne Ap' albo pm ; takowe dwa punkta są w tymże samym i iednymże punkcie A ; niéma wprawdzie do tego żadnego osobliwego powodu, że by

by odcinki rachować od tegoż samego punktu od którego rachują się rzędne; ale też kiedy żadna szczególna okoliczność inaczej czynić niekaże, to zawsze najprościej i najzręczniey będzie, rachować je od tegoż samego punktu.

Linie Ap, pm , nazywają się imieniem wzajemnym *spółrzednymi linii krzywéy*, a uważając je jako należące obojętnie do któregośkolwiek punktu linii krzywéy, nazywają się *nieokreślone* (indeterminate); toż nazwisko daje się także i głoskóm albo znakóm Algebraicznym x i y , oznaczającym takowe linie Ap i pm .

221. Powróćmy teraz do naszego równania, i zobaczmy jakim sposobem możemy z niego wyciągnąć własności linii krzywéy.

1^od Ze środka C linii AB , poprowadźmy do któregośkolwiek punktu M linii krzywéy, linią CM ; to w którymkolwiek bądź miejscu będzie wykonano, trójkąt MPC zawsze będzie prostokątny, a zatem da $(MP)^2 + (PC)^2 = (MC)^2$; to jest, (ponieważ $PC = AC - AP = (\frac{1}{2}a - x)$, da $yy + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; a że linia PM albo y , jest wszędzie średnią proporcjonalną między AP i PB , więc wszędzie będzie $yy = ax - xx$, a przeto też wszędzie będzie $ax - xx + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; to jest,

jest, $\frac{1}{4}aa = (MC)^2$; skąd wyciąga się $MC = \frac{1}{2}a$, więc każdy punkt M albo m , jest równo oddalony od punktu C ; więc ta linia krzywá, jest okręgiem kołowym.

2^oe Z któregośkolwiek punktu M albo m linii krzywéy, poprowadźmy do dwóch końców A i B , linie MA i MB ; trójkąty prostokątne MPA , MPB dadzą nam $(AP)^2 + (PM)^2 = (AM)^2$; i $(PM)^2 + (PB)^2 = (MB)^2$; albo położywszy zamiast linii ich wartości Algebraiczne, $xx + yy = (AM)^2$; i $aa - 2ax + xx + yy = (MB)^2$; więc dodawszy te dwa równania jedno z drugim, i położywszy zamiast yy , wartość onego $aa - xx$, będzie $aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = (AM)^2 + (MB)^2$; to jest, $(AM)^2 + (MB)^2 = aa = (AB)^2$; co nam wyraża własność trójkąta prostokątnego; i daje znać, że kąt AMB przytykający do któregośkolwiek punktu M linii krzywéy, jest zawsze prosty, (Zob. Jeom. I. 65).

3^oe Jeżeli w równaniu $xx + yy = (AM)^2$, położymy zamiast yy onego wartość $ax - xx$, mieć będziemy $(AM)^2 = ax$, skąd wynika następująca proporcya, $a : AM :: AM : x$, albo $AB : AM :: AM : AP$, to jest, że cięciwa AM jest średnią proporcjonalną między średnicą AB , i odcinkiem AP . (Zob. Jeom. 112). Tymże sposobem można by wynaléśdź wszystkie inne własności koła, które okazaliśmy w Jeometrii, a to zawsze na fundamencie tego przypuszczenia, iż rzędna PM albo pm , jest średnią proporcjonalną między AP i PB , albo między Ap i pB .

Rachując odcinki od punktu A w którym poczyną się średnica, mieliśmy równanie $yy = ax - xx$. Gdybyśmy się zaś chcieli byli rachować od środka, to jest

wziąć za odcinki linii CP , Cp , i. t. d. natenczas każdą z takowych linii oznaczmy przez z , mielibyśmy $CP = AC - AP$, to jest $z = \frac{1}{2}a - x$, a zatem $x = \frac{1}{2}a - z$. Położymy tedy zamiast x takową wartość w równaniu $y = ax - xx$, mieć będziemy $yy = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$; co wychodzi na $yy = \frac{1}{4}aa - az$; i takieto byłoby równanie należące do koła, rozumiejąc spórzędne wzajemnie sobie prostopadłe, a początek ich w środku.

Wreszcie, każda własność istotnie należąca do każdego punktu linii krzywej, wyraziwszy ją Algebraicznie, dałaby zawsze toż samo równanie; zwłaszcza wzięwszy też same linii za odcinki i rzędne; ale odmieniwszy początek albo kierunek spórzędnych, albo też oboje, można będzie wpasować na równanie odmiennie, ale zawsze tegoż samego stopnia. Sprawdzenie drugiej części tego podania, już widzieliśmy odmieniwszy położenie początku odcinków, gdzie zamiast równania $yy = ax - xx$, mieliśmy $yy = \frac{1}{4}aa - az$, które iako wynikające z pierwszego, ma za fundament też samą własność; lecz gdybyśmy chcieli założyć się, na tę drugą własność, że każda odległość MC jest wszędzie też sama i $= \frac{1}{2}a$; natenczas oznaczmy CP przez z , a PM przez y ; mielibyśmy z przyczyny trójkąta prostokątnego MPC , $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, skąd wynika $yy = \frac{1}{4}aa - zz$; równanie toż samo co poprzedzające, lubo wynikające z inszej własności.

O Ellipsie.

222. **Z**astanówmy się teraz nad tem, iakaby teżto była taka linia krzywa, któraby miała tę własność, aże-

ażeby summa dwóch odległościów $MF + Mf$ (fig. 28) od któregokolwiek punktu M linii krzywéy do dwóch punktów stałych F i f , zawsze była jednakowa i równała się linii danej a .

Zeby wynależdź własności téy linii krzywéy, która nazywa się *Ellipsą*, trzeba szukać takiego równania, któreby wyrażało stosunek, iaki zachodzi mocą téy własności znaiméy, między prostopadłemi PM spuszczonemi z każdego punktu M , na iaką wiadomą linią *np.* na Ff , i między odległościami ich FP albo AP od któregokolwiek punktu F albo A obranego podług upodobania.

Tym umyślem, obieram sobie na początek odcinków punkt A , taki, ażeby biorąc od środka C linii Ff , linią CA była $= \frac{1}{2}a$; a zrobiwszy $CB = CA$, oznaczam sobie AP przez x ; PM przez y ; linią zaś AF , która rozumie się bydź wiadoma, przez c ; a linią FM przez z ; natenczas będzie $FP = AP - AF = x - c$; $Mf = FMf - MF = a - z$; a $fP = PB - Bf = AB - AP - Bf = a - x - c$.

Tom II.

W

To

* Gdyby punkt M był obrany taki, iżby prostopadła MP przypadła między A i F , natenczas FP byłoby wyrażone przez $c - x$; ale to w główném równaniu nieuczyniłoby żadnéj odmiany; bo w układaniu tego równania

To założywszy na przód, trójkąty prostokątne FPM , fPM , daia $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$, tudzież $(Mf)^2 = (PM)^2 + (fP)^2$, to jest, $xx = yy + xx - 2cx + cc$, i $aa - 2az + zz = yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + cc$. Z tych dwóch zównań odiawszy drugie od pierwszego, i wyrugowawszy aa znajdujące się w obu częściach, będzie $2az = 2ax + 2ac - 4cx$, a zatem $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$; tę wartość

głoski z dopiero wynalezioną, położywszy w zównaniu $xx = yy + xx - 2cx + cc$, będzie $aaxx + 2aaxx + aacc - 4acx^2 - 4a^2cx + 4ccxx$

$= yy + xx - 2cx + cc$, a po wyrugowaniu mianownika, po przedstawieniu, i po zebraniu, będzie $aayy = 4aacx - 4accx - 4acx^2 + 4ccx^2$, albo $aayy = (4ac - 4cc)ax + (4cc - 4ac)x^2$, albo ponieważ $4cc - 4ac$ jest jedno co $-(4ac - 4cc)$, i jeszcze będzie $aayy = (4ac - 4cc)ax - (4ac - 4cc)x^2$, albo naostatek $aayy = (4ac - 4cc)(ax - xx)$; skąd wyciąga się $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)$.

Takie tedy jest zównanie, należące do linii krzywéy, któryby każdy punkt miał własność wyżej wymiensioną.

223. To zównanie może służyć do opisanja linii krzywéy przez punkta, naznaczywszy kolejno głosce x różne wymiary, i wyrachowawszy odpowiadające im wartości

nie używa się tylko kwadratu linii FP , na który w oboim razie zarównno wypada, $xx - 2cx + cc$, czyto powstać będzie z ilości $x - c$, albo też z ilości $c - x$.

wartości głoski y , iak uczyniliśmy wyżej względem okręgu koła. Ponieważ sposób obęyscia się w téy mierze, jest iednakowy z tamtym, dla tego tu go pomiiamy.

224. Można także ieszcze opisać *Ellipsę* przez punkta, w następujący obyczaj; zrobiwszy $CB = CA = \frac{1}{2}a$, bierze się iakokolwiek upodobanana odległość Br , i kryśli się powyżej i poniżej linii AB , z punktu f iako ze środka, promieniem Br , łuk, który w punktach M i M' przecina się innym łukiem, nakryślonym z punktu F iako ze środka, promieniem Ar . Tym sposobem wynalezione wszystkie punkta M , M' , należące będą do *Ellipsy*.

225. Własność fundamentalna z której wyniknęło zównanie, podaje także sposób bardzo prosty, opisanja *Ellipsy* iednym ciągiem. Jakóż, obrawszy sobie dwa punkta F , f , podług upodobania, i utwierdziwszy w nich dwa kołeczki, dwa gwoździe, albo dwie szpilki, nie trzeba tylko przywiązać do nich dwa końce nitki, któraby była dłuższa od linii Ff ; natenczas przy pomocy ołówka M wyciągnawszy nitę, i trzymając ją tak zawsze wyciągniętą, ołówek M prostopadle postawiony wkoło oprowadziwszy, takowy w ruchu swoim nakryśli żadaną linią krzywą; bo summa dwóch odległościów ołówka od dwóch punktów F i f , w tém nakryśleniu, zawsze wypadać będzie równa długości całej nici.

226. Stąd iawnie pokazuje się, iako linia krzywa musi przechodzić przez dwa punkta A i B ; z przyczyny że FMf zrobiło się równe

W 2

wne

wne linii AB . Bo ponieważ $Cf = CF$, więc będzie $AF = Bf$, a zatem $AF + Af = Af + Bf = a$, iako też $BF + Bf = BF + AF = a$. Co też i samo zrównanie wskazuje; albowiem, chcąc dóyśdź w którym miejscu linia krzywa schodzi się z linią prostą Ff przedłużoną, trzeba zrobić $y = 0$; z tego zaś przypuszczenia wynika,

$$\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx) = 0,$$

a ponieważ $\frac{4ac - 4cc}{aa}$ niemoże być zerem, więc żeby to zrównanie miało miejsce, musi być $ax - xx$, albo $x \times (a - x) = 0$; co w dwóch przypadkach trafić się może: iakoto kiedy będzie $x = 0$, to jest w punkcie A , albo też kiedy będzie $x = a$, to jest w punkcie B .

227. Z tegoż zrównania także pokazuje się, że linia krzywa rościąga się zarówno i powyżej i poniżej linii AB , i że z obu stron osi AB jest wcale iednakowa. Albowiem, wzmiarkowane zrównanie daie $y = \pm \sqrt{\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)}$, skąd daie się widzieć, że każdéj wartości głoski x albo każdéj linii AP , odpo-

wia-

wiadaia dwie wartości głoski y albo linii PM , doskonale sobie równe, ale które będąc poprzedzone znakami przeciwnemi, powinny być z przeciwnych stron położone.

I to ieszcze iawna jest, że poprowadziwszy prostopadłą DD' przez szrodek C linii AB , linia krzywa zostanie przez nią podzielona na dwie części doskonale równe i sobie podobne; iestto wniosek wynikający tak z wykryślenia Ellipsy, iako też należącego do niéy zrównania; ale takowy lepiéy ieszcze potém pokaże się, gdy uczynimy nad tém zrównaniem dalsze uwagi które nastąpić maia.

228. Linia AB , nazywa się *wielką osią* (axis major) a linia DD' jest *małą osią* (axis minor); dwa punkta F i f nazywaią się *śródpalami* (focus). Punkta A, B, D, D' są wiérzchołkami osiów, punkt C jest *środkiem*.

229. Zeby mieć wartość rzędnéy Fm , przechodzącéj przez *śródpal*, trzeba rozumieć AP albo $x = AF = c$; natenczas będzie $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \times (ac - cc) = \frac{4 \cdot (ac - cc)^2}{aa}$;

W 3

skąd

skąd po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego, wypada $y = \frac{4}{a} \cdot \frac{(ac - cc)}{2}$, więc $mm' = \frac{4 \cdot (ac - cc)}{a}$, takowa linia mm' dla tego że przechodzi przez śródpół nazywa się *palirzedną* Ellipsy (parameter). *Palirzedna teły, jest mnieysza aniżeli odległość od wieriszchołka do śródpółu czterzy razy powtórzona*; bo iey wartość $\frac{4 \cdot (ac - cc)}{a}$, która na iedno wychodzi co $4c - \frac{4cc}{a}$, jest oczywiście mnieysza aniżeli $4c$. Takową wartość palirzedną, oznaczywszy przez p , mieć będziemy $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, a zatem będzie $\frac{p}{a} = \frac{4ac - 4cc}{aa}$; można więc poprzedzając zrównanie należące do Ellipsy, przemienić na to prościęysze, $yy = \frac{p}{a} \cdot (aa - xx)$.

230. Zeby dóysdz wartości linii CD , nietrzeba więcę tylko w zrównaniu $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)$ rozumieć, że AP albo $x = AC = \frac{1}{2}a$; natenczas będzie $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (\frac{1}{2}aa$

$(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa)$, co wychodzi na $yy = ac - cc$; to jest że $(CD)^2 = ac - cc = c \cdot (a - c) = AF \times BF$; skąd wynika ta proporcya $AF : CD :: CD : BF$, a z nię pokazuje się, że *połowa małej osi, jest średnią proporcjonalną, między dwiema odległościami, wziętymi od iednego z dwóch śródpółów do dwóch wieriszchołków A i B.*

Ponieważ linia DD' jest iedna z najszczęśliwszych linii w Ellipsie, przeto też, raczēy wprowadza się w zrównanie zamiast linii AF albo c . Tym końcem oznaczmy sobie przez b takową linię DD' ; zatem mieć będziemy $CD = \frac{b}{2}$, a ponieważ znaleźliśmy $(CD)^2 = ac - cc$, więc będzie $\frac{bb}{4} = ac - cc$, albo $bb = 4ac - 4cc$; zrównanie tedy należące do Ellipsy, może bydź odmienione na to, $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$.

Ponieważ mamy $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$ albo $pa = 4ac - 4cc$ i $bb = 4ac - 4cc$, więc z tych dwóch zrównań, możemy wnieść $pa = bb$, skąd wynika następująca proporcya, $a : b :: b : p$; to jest że *palirzedna, jest trzecią proporcjonalną wielkiej osi i małej osi.*

231. Jeżeli w zrównaniu $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$, wyruguiemy mianownika, mieć będziemy $aayy = bb \cdot (ax - xx)$, a zatem będzie $yy : ax - xx :: bb : aa$;

W 4

gdzie

gdzie uważwszy że $ax - xx$ jest toż samo co $x \times (a - x)$, i położywszy zamiast ilościów Algebraicznych, same linie, będzie znowu, $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$; co oznacza, że kwadrat którykolwiek rzędny, przytykający do wielkiej osi Ellipsy, ma się do mnogości z dwóch odcinków AP i PB , iak się ma kwadrat małej osi, do kwadratu wielkiej osi. A że ta własność służy ogółem wszystkim punktóm Ellipsy, więc idzie zatém: że kwadraty rzędnych, mają się między sobą, iak mnogości z odcinków odpowiadających.

232. Zrównanie $yy = \frac{bb}{aa} (ax - xx)$, nieróżni się (221) od zrównania, któreby należało do koła opisanego na linii AB iako na średnicy fig. 29. (fig. 29), tylko w tém, że tu ilość $ax - xx$, znajduje się byźż rozmnożona przez $\frac{bb}{aa}$, to jest przez stosunek zachodzący między kwadratami małej i wielkiej osi; tak iż oznaczywszy przez z którąkolwiek z rzędnych kołowych PN , mielibyśmy $zz = ax - xx$; położywszy tedy w zrównaniu należącym do Ellipsy takową wár-

wartość zz , zamiast $ax - xx$, będzie $yy = \frac{bb}{aa} zz$; po wyciągnięciu zaś pierwiastka kwadratowego, będzie $y = \frac{b}{a} z$, albo $ay = bz$; skąd wnosi się $y : z :: b : a$, albo $PM : PN :: DD' : AB$ albo $CD : AC$. Co iawnie znać daie, iż rzędne należące do Ellipsy, nie są co innego, tylko rzędne koła opisanego na wielkiej osi, pozmniejszane proporcjonalnie, to jest w stosunku wielkiej osi do małej osi.

Na tym fundamencie, łatwo będzie opisać Ellipsę przy pomocy koła. Stąd także pokazuje się, że koło nie jest co innego, tylko Ellipsa, którejby dwie osi a i b były sobie równe, w którejby odległość wierzchołka od środka, równała się wielkiej osi, albo też jeszcze w którejby palirzędna równała się średnicy. Albowiem, w zrównaniach poprzedzających, rozumiejąc $b = a$, albo $c = \frac{1}{2}a$, albo $p = a$, wypadnie zawsze $yy = ax - xx$, to jest, zrównanie należące do koła.

233. Z tych wszystkich zrównań które dotąd uważaliśmy, pokazuje się, że linia krzywa nazwana ellipsa, jest odmienna od okręgu koła: do narysowania którego nie trzeba więcej, tylko mieć jedną linię, to jest średnicę; żeby zaś narysować ellipsę, nie dosyć jest na samej wielkiej osi AB (fig. 28), ale trzeba jeszcze nadto mieć wiadomą albo małą os b , albo palirzędną p , albo też odległość c od wierzchołka do środka. Mając znaną wielką os i odległość c , łatwo będzie

dzie można odkryć sobie ellipsę, iak wi-
dzieliśmy wyżej. Ale gdyby była zadana
wielka oś i mała oś, chcąc narysować eli-
psę iednym ciągiem, trzebaby wprzód wy-
naléśdź punkta śródpółów, co niepodlega za-
dnej trudności; albowiem wzięszy za pro-
mień pół wielkiéy osi, i z końca D małej
fig. 28. osi (fig. 28.) iako ze śróodka, zrobiwszy dwa
małe łuczki, takowe, w których miejscach
przecinać będą wielką oś, iakoto w F, f , tam
przypadać będą punkta śródpółów. Bo ponie-
waż summa dwóch odległościów $FD + Df$,
powinna równać się ilości a , więc kiedy te
dwie linie będą iednakowéy długości, każda
z nich musi równać się ilości $\frac{1}{2}a$.

Gdyby zadana była wielka oś i pali-
rzedna, małą oś możnaby wynaléśdź, wzię-
wszy średnią proporcjonalną między temi
dwoma liniami, a to na fundamencie propor-
cyi $a : b :: b : p$ wyżej wynalezionéy (230).
Wynalázłszy zaś małą oś tym sposobem, re-
szty dokóńczyłoby się, iak się dopiero rzekło.

234. Jeżeli przez którykolwiek
fig. 28. punkt M ellipsy (fig. 28), linia po-
prowadzona fM od iednego z dwóch
śródpółów, przedłuży się w takiéy od-
ległości, aż przedłużenie MG zrówna
się z drugą odległością MF ; a potem
wyciągnąwszy linią GF , jeżeli z pun-
ktu M spuści się na tęż linią GF pro-
stopadła MOT , takowa linia MOT
będzie styczną ellipsy.

Jakóż, z przyczyny równości
linii MF i MG , linia MT jest pro-
sto-

stopadła na śródek linii GF ; więc
jeżeli z innego iakiegokolwiek pun-
ktu N teyże linii, poprowadzą się
dwie linie proste NG i NF , tako-
kowe linie będą sobie równe. Day-
my tedy iżby linia MT , mogła do-
tknąć ellipsy w innym iakimkolwiek
punkcie N ; w takim razie, popro-
wadziwszy Nf , trzeba aby $FN +$
 Nf , mogło zrównać się z $MF +$
 Mf , albo z $MG + Mf$, to jest z Gf ;
lecz linia Gf jest mnieysza od GN
 $+ Nf$, a zatém mnieysza od $FN +$
 Nf , więc punkt N iuż jest położony
zewnątrz ellipsy.

235. Kąty FMO , OMG są so-
bie równe, podług wykryślenia do-
piéro opisanego; lecz OMG jest
znowu równy swemu przeciwnému
w wiérzchołku fMN ; więc także
 FMO musi być równy kątowi
 fMN . Więc dwie linie poprowa-
dzone z iednegóż punktu ellipsy do
dwóch śródpółów, czynią z styczną
kąty sobie równe.

Doświadczenie naucza, iż promień
światła padający na iaką powierzchnię,
odbijając się od niéy, czyni kąt odbicia (re-
flexion) równy kątowi padniénia (incidence);
więc gdyby punkt F był punktem świa-
tłym,

tłym, wszystkie promienie z niego wynikające, padałyby na wklękość MAN , a odbiwszy się od niej, zgromadziłyby się w punkcie f ; i odwrotnie.

Jeżeli z punktu M linii MT , spuści się prostopadła MI , (która oraz będzie prostopadłą linii krzywej), takowa linia podzieli kąty FMI , na dwie części równe; albowiem od kątów prostych IMT , IMN , odiawszy kąty równe FMT , fMN , pozostałe kąty FMI , IMf , muszą także być sobie równe.

236. Na tym fundamencie można wyrachować wartość odległości PI , wziętej od rzędnej PM aż do tego miejsca, w którym prostopadła MI schodzi się z osią. Ta linia PI nazywa się *międzyległą* (subnormalis) a linia MI jest *przytyczną* (normalis).

Zeby wyrachować PI , trzeba wprzód wyrachować FI . Z przyczyny że kąt FMI jest podzielony na dwie równe części, będzie $Mf:MF::fI:FI$ (Jeom. 104); a zatem (Jeom. 98), $Mf+MF:Mf-MF::fI+FI:fI-FI$. Lecz $Mf+MF=a$, więc oznaczwszy MF przez x , iak wyżej (222), będzie $Mf=a-x$, a zatem $Mf-MF=a-2x$; nadto mamy $fI+FI=Ef=AB-2AF=a-2c$, a $fI-FI=Ef-2FI=a-2c-2FI$; więc $a:a-2x::a-2c:a-2c-2FI$; więc $aa-2ac-2ax \times FI=aa-$

2ac

$2ac-2ax+4x$; skąd wyciąga się $FI=\frac{ax-2cx}{a}$, albo położywszy zamiast x wartość jego $\frac{aa}{ax+ac-2cx}$, wyżej wynalezioną

(222), będzie $FI=\frac{aa}{aac-2acc+aa-4acx+4ccx}$; lecz $FI=$

$FP+PI=AP-AF+PI=x-c+PI$; więc $PI=FI-x+c=\frac{aa}{aac-2acc+aa-4acx+4ccx}-x+c=$

$\frac{aa}{2aac-2acc-4acx+4ccx}=$

$\frac{2a \cdot (ac-cc)-4x \cdot (ac-cc)}{aa}=\frac{2a-4x}{aa} \times$

$(ac-cc)$; albo położywszy zamiast ilości $ac-cc$, ięj wartość $\frac{bb}{4}$ (230), będzie naostatek $PI=bb \frac{(a-2x)}{2aa}$, albo $PI=\frac{bb}{aa} (\frac{1}{2}a-x)$.

237. To mając, łatwo także będzie mieć można wartość, odległości PT , wziętej od rzędnej PM aż do zniścia się z styczną MT . Takowa linia PT nazywa się *podtyczną* (subtangens). Chcąc tedy wyrachować ięj wartość, trzeba uważać, że ponieważ trójkąt IMT jest prostokątny, a linia PM jest prostopadłą spuszczone z kąta prostego, więc będzie (Jeom. 112) $PI:PM::PM:PT$; to jest $\frac{bb}{aa} \times (\frac{1}{2}a-x)$:

$y : y :: y : PT$; więc $PT = \frac{aayy}{bb(\frac{1}{2}a - x)}$
 albo położywszy zamiast kwadratu
 yy wartość onego $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, PT
 $= \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$.

Wyrażenia Algebraiczne dwóch linii
 PI i PT , mogą służyć do postawienia na
 Ellipsie prostopadłej, i stycznej w którym-
 kolwiek punkcie M . Albowiem, mając za-
 dany punkt M , spuściwszy prostopadłą PM ,
 pokaże się wartość odległości x albo AP . A że
 ilości a i b rozumieją się być wiadome, więc
 będzie wiadomo wszystko, co tylko wcho-
 dzi w wyrażenie wartościów linii PI i PT .

238. Z wyrażenia linii PT można so-
 bie wnieść, że jeżeli poprowadzi się styczna
 fig. 28. kołu opisanemu na wielkiej osi AB (fig. 29),
 przez punkt N , w którym to koło przecina się
 z rzędną Ellipsy PM , to obie styczne NT i
 MT trafiać będą w tenże sam punkt osi T .
 Bo ponieważ druga os b niewchodzi w wy-
 rażenie linii PT , więc ta linia PT musi za-
 wsze być ta sama, póki wartości a i x bę-
 dą też same. A zatem wszystkie styczne po-
 prowadzone z punktów odpowiadających
 wszelkim ellipsom opisanym na linii AB , ja-
 ko na wielkiej osi, muszą się schodzić w ie-
 dnymże punkcie T .

fig. 28. 239. Jeżeli do PT (fig. 28) do-
 da się linia CP , która warta $\frac{1}{2}a - x$,
 będzie $CT = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$, co
 (po obróceniu wszystkiego w wła-
 mek),

mek), wychodzi na $\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x}$; to jest,
 że $CT = \frac{(AC)^2}{CP}$, skąd wnosi się ta pro-
 porcja $CP : AC :: AC : CT$.

240. Chcąc także mieć wyrażenie
 linii TM , niebędzie w tem żadney tru-
 dności; bo trójkąt prostokątny TMP ,
 daie $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2$
 $= \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx) = [ax$
 $- xx + \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)^2] \times \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}$.

241. Jeżeli z któregośkolwiek
 punktu M Ellipsy, spuści się na małą
 os DD' prostopadła czyli rzędna
 MP , oznaczywszy DP przez x' , a
 MP przez y' ; będzie $DP = CD -$
 $CP = CD - PM$, to jest, $x' = \frac{1}{2}b - y'$;
 a zatem $y = \frac{1}{2}b - x'$. Będzie także
 $MP = CP = CA - AP$; to jest, $y' =$
 $\frac{1}{2}a - x$, a zatem $x = \frac{1}{2}a - y'$. Takowe
 wartości zamiast x i y , położywszy
 w równaniu $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, albo
 $aayy = bb(ax - xx)$, będzie $\frac{1}{4}aabb$
 $- aabx' + aax'x' = \frac{1}{2}aabb - abby'$
 $- \frac{1}{4}aabb + abby' - bby'y'$; co wycho-
 dzi na $bby'y' = aabx' - aax'x'$; skąd
 wyciąga się $y'y' = \frac{aa}{bb}(ax' - x'x')$;
 zró-

zrównanie, podobne tamtemu co było do wielkiej osi, a zatem z którego można też sobie uczynić podobne wnioski, iakoto: że kwadrat rzędny $P'M$ należący do małej osi, ma się do mnogości z dwóch odcinków DP $X P' D'$ iak się ma kwadrat wielkiej osi, do kwadratu małej osi; iakóż, z tego zrównania wnosi się proporcję $y'y' : ax' - x'x' :: aa : bb$, w której ilość $ax' - x'x'$, nieco innego jest, tylko $x'(a - x')$ albo $DP X P' D'$. Dalsze wnioski są: że kwadraty rzędnych należących do małej osi, mają się między sobą iak mnogości z odcinków odpowiadających; i że Ellipsa może być nakryślona przy pomocy koła opisanego na małej osi, przedłużając rzędne tego koła, w stosunku małej osi do wielkiej osi.

242. Stąd co poprzedziło, pokazuje się, że własności względem drugiej osi, są podobne tamtym które wynaleźliśmy względem pierwszej osi, przynajmniej w tem co niezawisło od środków. Gdyby kto chciał mieć linię względem tej drugiej osi, odpowiadającą liniom wyrachowanym względem pierwszej osi, to jest $P'I$, $P'T$, CT , i MT (fig. 28), to ie sobie łatwo wynaydzie przy pomocy liniom odpowiadających, i trójkątów sobie podobnych, które w figurze łatwo można rozeznąć. Jeżelibyśmy do wyrachowania

fig. 28.

takowych linii, użyli odcinków DP albo x' , tobyśmy na nie znaleźli wyrażenia wcale podobne tamtym, które mieliśmy wyrażone w x . na też linie odpowiadające pierwszej osi.

Naznaczą także palirzędną i drugiey osi; ale w tym razie przez takową linią, nie rozumie się linia przechodząca przez środek tej drugiej osi (którego niema), ale rozumie się trzecia proporcjonalna tej drugiej osi i pierwszej osi.

243. Dotąd niebraliśmy odcinków inaczej tylko od wierzchołka; gdybyśmy ie zaś chcieli rachować od środka C , to oznaczmy odcinek CP przez z , mielibyśmy AP albo $x = \frac{1}{2}a - z$; takową wartość połowy zamiast x , w zrównaniu $yy = \frac{bb}{a}$.

$(ax - xx)$, iako też w wartościach linii PI , PT , CT , i $(TM)^2$, byłoby $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}aa - zz)$; $PI = \frac{bbz}{aa}$; $PT = \frac{\frac{1}{2}aa - zz}{z}$; $CT = \frac{\frac{1}{2}aa}{z}$; $(TM)^2 = (\frac{1}{2}aa - zz + \frac{bbz}{aa}) \cdot \frac{\frac{1}{2}aa - zz}{zz}$.

244. Jeżeli z któregokolwiek punktu M Ellipsy (fig. 30), poprowadzi się przez środek C osi AB , linia prosta MCM , kończąca się na drugiej stronie Ellipsy, to takowa linia nazywać się będzie *średnicą*. A jeżeli przez wierzchołek M poprowadzi się styczna MT , i przez środek C średnica NV równoległa stycznej MT , takowa średnica nazywa

Tom II.

X

wać

fig. 30.

wać się będzie średnica doślawna (diameter conjugata), pierwszy średnicy. Linia mO poprowadzona z punktu m Ellipsy, równolegle styczney MT , a kończąca się na średnicy MM , nazywa się rzędną należącą do téj średnicy, a zaś MO nazywa się odcinkiem. Palirzędna odpowiadająca średnicy MM , jest trzecia proporcjonalna liniom MM i NN .

245. Teraz mamy okazać, iż rzędne mO należące do iakićkolwiek średnicy, mają własności, podobne własnościom rzędnych, należących do osiów.

Tym końcem spuścimy z punktów m i O prostopadłe mp , OQ na oś AB , i poprowadzimy linią mS równoległą téjże osi. Oznaczmy AB przez a ; MP przez y ; CP przez z ; Qp przez g ; CQ przez k ; mieć będziemy $AP = \frac{1}{2}a - z$; $PB = \frac{1}{2}a + z$; $Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \frac{1}{2}a - k - g$; $pB = CB + Cp = \frac{1}{2}a + k + g$.

Trójkąty sobie podobne TPM , mSO , dadzą $TP : PM :: mS$ albo $pQ : SO$; to jest, $\frac{\frac{1}{2}aa - zz}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{2}aa - zz}$. Trójkąty

sobie podobne CMP , COQ dadzą, $CP : PM :: CQ : QO$; to jest, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$;

więc $pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{2}aa - zz}$.

A ponieważ punkt m , jest punktem należącym do Ellipsy, podług (231), więc musi być $(pm)^2$

$(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$, to jest,

$$\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{2}aa - zz}\right)^2 : yy :: (\frac{1}{2}a - k - g) \times (\frac{1}{2}a + k + g) : (\frac{1}{2}a - z) \times (\frac{1}{2}a + z),$$

albo $\frac{kky}{zz} - \frac{2gkzy}{\frac{1}{2}aa - zz} + \frac{ggzz}{(\frac{1}{2}aa - zz)^2} : yy :: \frac{1}{2}aa - kk$

— $2kg - gg : \frac{1}{2}aa - zz$, albo rozmnożywszy wyrazy średnie i skrajne, a przytém dawszy baczenie na te ilości, które znajdować się będą oraz rozmnożone i rozdzielone przez $\frac{1}{2}aa - zz$, iako téż przez z , będzie $\frac{kky}{zz}$

$$(\frac{1}{2}aa - zz) - 2gky + \frac{ggzz}{\frac{1}{2}aa - zz} = \frac{1}{2}aay - kky - 2gky - ggy, \text{ albo odprawiwszy wskazane działania z wyrazem } \frac{kky}{zz} \cdot (\frac{1}{2}aa - zz) \text{ i}$$

wyrugowawszy wyrazy — kky , — $2gky$ iako znajdujące się w obu częściach zrównania, nadto rozdzieliwszy przez yy , będzie $\frac{1}{2}aakk$

+ $\frac{ggzz}{\frac{1}{2}aa - zz} = \frac{1}{2}aa - gg$; zrównanie, które nam jest potrzebne do naszego przedsięwzięcia; ale nim go użyjemy, wyciągniemy wprzód z niego niektóre wiadomości.

Jeżeli punkt O , który tu uważaliśmy bytż iakikolwiek, rozumieć będziemy położony w punkcie C , to jest że linia mO przechodzić będzie przez środek, albo zamieni się w linią CN ; natenczas CQ albo k staie się zerem, a linia Qp albo g zamienia się w linią CR . Takowe przypuszczenie wprowadziwszy w zrównanie wyżej wynalezionę, to jest zrobiwszy $k=0$, po wyrugowa-

niu mianownika, po przestawieniu, po zebraniu, i po rozdzielaniu przez $\frac{1}{4}aa$, będzie $gg = \frac{1}{4}aa - zz$; to jest $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz = (\frac{1}{2}a - z) \times (\frac{1}{2}a + z) = AP \times PB$.

To założywszy, powróćmy do naszej rzeczy, i oznaczmy CM przez $\frac{1}{2}a$; CN przez $\frac{1}{2}b$; MO przez y ; CO przez z . Trójkąty sobie podobne CPM , CQO , dadzą nam $CM : CO :: CP : CQ$, albo $\frac{1}{2}a : z :: z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a}$. Trójkąty zno-

wu CNR , mSO , podobne sobie z przyczyny równoległych, dają $MO : mS :: CN : CR$, albo $y : g :: \frac{1}{2}b : CR = \frac{\frac{1}{2}gb}{y}$; więc $(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}$; lecz mieliśmy $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$;

więc będzie $\frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'} = \frac{1}{4}aa - zz$; skąd wyciąga się $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$. Powróćmy teraz

do zrównania $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, i połączmy w niem zamiast gg i kk wartości dopiero wynalezione, a mieć będziemy: $\frac{\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'(\frac{1}{4}aa - zz)}}{\frac{1}{4}b'b'} + \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}$, albo po zebraniu i po roz-

dzieleniu przez $\frac{1}{4}aa$, $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$; albo po wyrugowaniu mianowników $\frac{1}{4}a'a'$ i $\frac{1}{4}b'b'$ będzie, $\frac{1}{4}b'b'z'z' = \frac{1}{4}a'a'b'b' - \frac{1}{4}a'a'y'y'$, albo naostatek $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (\frac{1}{4}a'a' - z'z')$; skąd wnosi się ta proporcya $y'y' : \frac{1}{4}a'a' - z'z' ::$
 $b'b'$

$b'b' : a'a'$; to jest $(mO)^2 : MO \times OM :: (NN)^2 : (MM)^2$. A zatem zrównanie należące do dwóch średnic dostawnych jakichkolwiek, jest wcale podobne zrównaniu należącemu do dwóch ośiów.

246. Jeżeli zrobi się $y' = 0$, będzie $\frac{1}{4}a'a' - z'z' = 0$; a zatem będzie $z' = \pm \frac{1}{2}a'$. Co znać daie, że linia MM' spotyka się z Ellipsą w dwóch punktach M i M' równo oddalonych od środka C ; i że wszystkie średnice Ellipsy, przecinają się w środku iey, na dwie części równe.

247. Zrównanie znowu $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (\frac{1}{4}a'a' - z'z')$, z którego wyciąga się $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$, daie znać, że przedłużywszy linią mO , tak aby było $Om' = Om$, punkt m' należyć będzie do Ellipsy; więc każda średnica Ellipsy, przecina na dwie części równe, linie równoległe styczney, która przechodzi przez początek M téżże średnicy.

248. Stąd można sobie wnieść ród Ze styczną poprowadzoną przez koniec N średnicy NN' , jest równoległa średnicy MM' . 2re Stąd zaś że $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$, można wnieść, że rzędne Om , należące
 X_3 $z'z'$

żące do średnicy MM' , nie są co innego tylko rzędne należące do koła, mającego za średnicę MM' , ale zmniejszone albo pomnożone w stosunku ilości a' do b' i nachylone pod kątem równaiącym się nachyleniu średnic dostawnych. Jeżeli będzie $a' = b'$, to takowe rzędne, będą zgoła równe rzędnym koła wzmiankowanego. Naostatek żeby wiedzieć, w którym miejscu Ellipsy dwie średnice dostawne mogą być sobie równe, nie trzeba tylko znaleźć w którym miejscu wypada $CP = CR$; albo $(CP)^2 = (CR)^2$; to jest $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; z tego równania wyciąga się $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$; co można wykryć w następujący sposób. Opisawszy na wielkości osi AB iako na średnicy (fig. 29) pół koła $ANEB$, przeciętego w punkcie E przez małą oś CD , dzieli się łuk AE na dwie równe części w punkcie N' , z którego spuściwszy prostopadłą $N'p$ przecinającą Ellipsę w punktach M'' , M' ; linie CM'' i CM' będą dwie średnice dostawne sobie równe. Albowiem oznaczywszy CP przez z , ponieważ trójkąt CPN' jest prostokątny i równoramienny, z przyczyny kąta ACN' mającego 45° , będzie $zz + zz = (CN')^2 = \frac{1}{4}aa$; więc $zz = \frac{1}{8}aa$, a $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

fig. 30. 249. Jeżeli ze środka C , (fig. 30) spuści się prostopadłą CF na styczną TM , trójkąty sobie podobne TPM , TCF , dadzą $TM : PM :: CT : CF$; skąd wnosi się $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Podobnie trójkąty TPM i CNR sobie podobne z przyczyny boków równole-

głych, dadzą $TM :: PT :: CN : CR$;

więc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; azatem będzie

$$CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} =$$

$$\frac{PM \times CT \times CR}{PT}, \text{ albo skwadrówawszy}$$

$$(CN)^2 \times (CF)^2 = \dots$$

$$\frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}; \text{ widzieliśmy}$$

$$\text{zaś wyżej, że } yy \text{ albo } (PM)^2 = \frac{bb}{aa}$$

$$(\frac{1}{4}aa - zz); (CT)^2 = \frac{\frac{1}{8}aa}{zz}; (PT)^2 =$$

$$\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz}, \text{ a } (CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$$

$$(245); \text{ więc położywszy takowe}$$

$$\text{wartości w poprzedzającym równa-}$$

$$\text{niu, i uczyniwszy zebranie, będzie}$$

$$(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{1}{16}aabb, \text{ azatem}$$

$$CN \times CF = \frac{1}{4}ab. \text{ Lecz, poprowa-}$$

$$\text{dziwszy styczną } NT', \text{ któraby z linią}$$

$$TM \text{ stykała się w } I, CM \times CF$$

$$\text{wyrażać będzie powierzchnią ró-}$$

$$\text{wnoległoboku } CMIN, \text{ a } \frac{1}{4}ab \text{ albo}$$

$$\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b \text{ powierzchnią prostokąta}$$

$$\text{zrobionego z dwóch pół osiów; więc}$$

$$\text{równoległoboki zamknięte stycznymi,}$$

$$\text{postawionemi na końcach średnic}$$

$$\text{dostawnych, są równe między sobą, i}$$

$$\text{równe prostokątowi, zrobionemu z}$$

$$\text{dwóch osiów.}$$

250. Też trójkąty sobie podobne TPM i CRN dają $PT:PM::CR:RN$; więc $RN = \frac{CR \times PM}{PT}$, albo $(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{(PT)^2} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{bbzz}{(\frac{1}{4}aa - zz) \times zz} = \frac{bbzz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}$; trójkąty zaś prostokątne CRN i CPM dają, $(CR)^2 + (RN)^2 = (CN)^2$; i $(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$; więc $(CR)^2 + (RN)^2 + (CP)^2 + (PM)^2 = (CN)^2 + (CM)^2$; położywszy w pierwszej części równania, zamiast linii ich wartości Algebraiczne, po uczynioném zebraniu, będzie $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = (CN)^2 + (CM)^2$; więc suma kwadratów z dwóch pół-śrzednic dostawnych ellipsy, iakichkolwiek, równa się summie kwadratów z dwóch osiów.

251. Jeżeli w równaniu $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$, położymy zamiast CR i RN ich wartości, mieć będziemy $(CN)^2 = \frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}$; widzieliśmy zaś wyżej, że

$$(TM)^2 = \left(\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa} \right) \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz},$$

$$\text{zatem będzie } (TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz};$$

trójkąty znowu TPM , MPT sobie podobne, dają skwadrówawszy, $(PT)^2 : (TM)^2 ::$

$$:: (PM)^2 : (MT)^2, \text{ albo } \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} :$$

$$(CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} :: zz : (MT)^2; \text{ więc}$$

$$(MT)^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{\frac{1}{4}aa - zz}; \text{ więc } (TM)^2 \times$$

$(MT)^2 = (CN)^4$, albo $TM \times MT = (CN)^2$; jeżeli zaś oznaczymy palirzedną należącą do średnicy MM przez p , to będzie $2CM : 2CN :: 2CN : p$ (244); a zatem $2p \times CM = 4(CN)^2$, albo $(CN)^2 = \frac{1}{2}p \times CM$; więc będzie $TM \times MT = \frac{1}{2}p \times CM$, ikąd wynika proporcya $CM : TM :: MT : \frac{1}{2}p$.

Jeżeli na linii TT' iako na średnicy (fig. 31), opiszemy koło, takowe będzie przechodzić przez punkt C ; bo kąt TCT' jest prosty; a jeżeli przedłuży się linia CM tak daleko, aż spotka się z okręgiem w punkcie V ; to z natury koła (leom. 120) wypadnie ta proporcya, $CM : TM :: MT : MV$; więc $MV = \frac{1}{2}p$.

252. Stąd można sobie wnieść sposób bardzo prosty, służący do wynalezienia osiów Ellipsy, a zatem i do wykryślenia iey, nie mając nic więcej wiadomego, tylko dwie średnice dostawne MM i NN i kąt który między sobą czynią.

W takim razie, trzeba przedłużyć CM , o ilość MV równą połowie palirzednej, potem ze środka X linii CV podnieść prostopadłą XZ , która spotka się w punkcie Z z linią nieokręśloną TT' , przeprowadzoną przez punkt M równoległą do NN . Dalej z punktu Z iako ze środka, odległością ZC iako promieniem, rysuje się koło, które spotka się z linią TT' w dwóch punktach T i T' , przez takowe punkta i przez punkt C poprowadzone linie TC , $T'C$, pokazą

każą kierónki-dwóch ośiów. Zeby zaś mieć i wielkość onychże, trzeba, spuściwszy prostopadłe MP i MP' wzięść CA równą średnię proporcjonalną między CT i CP ; zaś CD , równą średnię proporcjonalną między CT' i CP' ; albowiem, widzieliśmy wyżej (239), że $CP : CA :: CA : CT$; a znowu łatwo jest dowieść (przy pomocy trójkątów sobie podobnych TPM , TCT , iako też znaiomych wartościów linii TP , PM , i CT), że $CT = \frac{(CD)^2}{CP}$, to jest że $CP : CD :: CD : CT$.

O Hiperboli.

fig. 32. 253. **Z**astanówmy się teraz nad tą, którą linią krzywą (fig. 32), któraby w każdym swoim punkcie M miała tę własność, iżby różnica $Mf - MF$ dwóch odległościów Mf i MF od dwóch punktów stałych f i F była zawsze iednakowa, i równa linii daney a .

Tym końcem (tak iak uczyniliśmy względem Ellipsy), trzeba nam znaleźć zrównanie, wyrażające stosunek między prostopadłemi PM spuszczonemi na linią Ff , i ich odległościami FP albo AP od iakiego stałego punktu F albo A , obranemi podług upodobania na linii Ff .

Obie-

Obiérám sobie tedy na początek odcinków punkt A , taki ażeby linią CA wzięta od śródką C linii Ff , była $= \frac{1}{2}a$; i robię $CB = CA$. To założywszy, oznaczam sobie AP przez x ; PM przez y ; linią AF , która rozumić się bydz wiadoma, przez c ; a linią FM , przez z ; natenczas będzie $FP = AF - AP = c - x$; $fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x$; a ponieważ $Mf - MF = a$, więc będzie $Mf = a + MF = a + z$.

Trójkąty prostokątne FPM , fPM dają $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, tudzież $(fP)^2 + (PM)^2 = (fM)^2$, to jest, $cc - 2cx + xx + yy = zz$, tudzież $cc + 2ac + aa + 2cx + 2ax + xx + yy = aa + 2az + zz$. Z tych dwóch zrównań odiawszy pierwsze od drugiego, po wyrugowaniu wyrazu aa , znajduiącego się w obu częściach, będzie $4cx + 2ac + 2ax = 2az$; skąd wyciąga się $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; położywszy

* Gdyby punkt P znajdował się bydz położony poniżej F względem punktu A , to linia FP byłaby wyrażona przez $x - c$; ale to niuczyniłoby w ostatecznem zrównaniu żadney odmiany.

wſzy tedy tę wartość zamiast z w
pierwſzém zrównaniu, mieć będziemy

$$cc \mp 2cx \mp xx \mp yy =$$

$$\frac{4ccxx \mp 4accx \mp aacc \mp 4acxx \mp 2aacc \mp aaxx}{aa}$$

albo po wyrugowaniu mianownika,
po przeſtawieniu i po zebraniu, ayy
 $= 4aaccx \mp 4accx \mp 4acxx \mp 4ccxx$,
albo $ayy = (4ac - 4cc)(ax \mp xx)$,
ſkąd wyciąga ſię $yy =$
 $\frac{4ac \mp 4cc}{aa} (ax \mp xx)$.

254. To zrównanie, może ſłużyć do
nakryſlenia Hiperboli przez punkta, kołey,
no powynaydowane, naznaczając głoſce x
różne wartości.

Można takżę nakryſlić przez punkta
tęż Hiperbolę, wziąwszy podług upodobania
część Br , więkſzą od linii BF , i nary-
ſowawſzy z punktu f iako ze ſrzedka, pro-
mieniem Br , łuk któryby zoſtał przecię-
ty w iakimkolwiek punkcie M , przez inny
łuk, naryſowany z punktu F iako ze ſrzed-
ka, promieniem Ar .

Naofiatek można téż ieſzcze nakry-
ſlić tęż Hiperbolę iednym ciągiem, w ſpo-
ſób naſępujący:

W punkcie f utwierdza ſię liniał nie-
okreſlonęj długoſci, tak żeby ſię mógł ko-
ło tego punktu obracać. W punkcie F , i w
iednym z punktów Q tego liniału, przy-
wiązują ſię końce nitki FMQ , kró-
tſzey od linii fQ , w takim ſtoſunku, aże-
by różnica między linią fQ a długoſcią ni-
tki, równała ſię linii AB ; natenczas przy-

pomocy pióra albo ołówka M , część nitki MQ
przytyka ſię do liniału, a powodząc ołów-
kiem od M do A , i utrzymując nitkę za-
wſze wyteżoną, liniał będzie ſię zniżać,
część FM będzie ſię ukracać, i pióro albo
ołówek M nakryſli żadaną linią krzywą
 AM , to ieſt hiperbolę. Jakóż iawna ieſt,
że ponieważ cała długoſć fQ , albo $fM \mp$
 MQ , ieſt zawſze taż ſama, i długoſć FM
 $\mp MQ$ ieſt takżę zawſze taż ſama, więc i
różnica ich $fM \mp MQ - FM - MQ$, albo
 $fM - FM$, muſi takżę bydź zawſze taż ſama.

255. Zrównanie $yy = \frac{4ac \mp 4cc}{aa}$
 $(ax \mp xx)$, z którego wyciąga ſię y
 $= \pm \sqrt{\frac{4ac \mp 4cc}{aa} (ax \mp xx)}$, daie
znać, że każdemu odcinkowi AP al-
bo x , odpowiadają zawſze dwie rzę-
dne równé PM i PM ; padające z
obu ſtrón przedłużonęj linii AB ,
która nazywa ſię *główną oſią* (axis
principalis); a zatém ta linia krzy-
wa ma drugie ramię AM ; pierwſze-
mu doſkonale równé, oba zaś ro-
ſciągają ſię mogą bez końca; albo-
wiem oczywiſta ieſt, że im bardziéj
pomnażać ſię będzie wartość odcin-
ka x , tém téż bardziéj roſnąć będą
dwie wartości $\pm \sqrt{\frac{4ac \mp 4cc}{aa} (ax \mp xx)}$.

256. Jeżeli w téjże wartości zrobi-
my x ilością przeczącą, to ieſt ieżeli byſ-
my

my sobie zmyślili punkt P padający powyżej punktu A , natenczas wyżej położona wartość, odmieniłaby się w tę, $\pm \sqrt{\frac{4ac + 4c^2}{aa}}$ ($x^2 - ax$); lecz ponieważ ilość $x^2 - ax$, albo $x \cdot (x - a)$, póty póki x jest mniejsze aniżeli a , wypada zawsze ilością przeczącą, więc w takim razie, ilość $\pm \sqrt{\frac{4ac + 4c^2}{aa}}$ ($x^2 - ax$) jest ilością zmyśloną; a zatem głoska y nie ma żadnej rzetelnej wartości od punktu A aż do B ; kiedy zaś x stanie się większe nad a , natenczas ilość $x^2 - ax$ odmienia się nazad w twierdzącą, i wartości głoski y stać się znowu rzetelnymi. A stąd pokazuje się, że od punktu B poczyna się nowa część linii krzywej mBm' , rościągająca się tak jak pierwsza bez końca, na obie strony przedłużenia AB , i doskonale równa téżże pierwszemu części. Bo jeżeli zrobimy $Bp = AP$, to ilość $xx - ax$ albo $Ap \times pB$ zrówna się ilości $AP \times PB$, a zatem i rzędna pm musi równać się rzędnej PM .

257. Jeżeli w zrównaniu $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} X (ax - xx)$ zrobimy $y = 0$, to znajdziemy bądź $ax + xx$ albo $x(a + x) = 0$, skąd wynika $x = 0$ i $x + a = 0$ albo $x = -a$; więc linia krzywa spotyka się z osią AB w dwóch punktach A i B .

258. Jeżeli rozumieć będziemy $AP = AF$, to jest $x = c$, żeby mieć wartość rzędnej Fm' , przechodzącej

cę przez punkt F , (który nazywa się środkiem iako też i punkt f), to w takim przypuszczeniu, wypadnie $y = \pm \sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa}} (ac + cc) = \pm \sqrt{\frac{(4ac + 4cc)^2}{aa}} = \pm \frac{2(ac + cc)}{a}$; więc będzie podwójna rzędna $m''m''' = \frac{4(ac + cc)}{a}$; takowa linia nazywa się *palirzédną* hiperboli; którą oznaczysz przez p , będzie $p = \frac{4(ac + cc)}{a}$, a zatem $\frac{p}{a} = \frac{4(ac + cc)}{aa}$. Używszy tego wyrażenia, zrównanie wyżej wynalezione należące do hiperboli, odmieni się w to zrównanie prościęzkie, $yy = \frac{p}{a} (ax + xx)$.

Z wartości linii p , można sobie wnieść, że *palirzédna* główny osi hiperboli, jest większa aniżeli odległość od wierzchołka A do środka F cztery razy powtórzona; bo takowa wartość to jest $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$ wychodzi na $p = 4c + \frac{4cc}{a}$, ilość oczywiście większa nad $4c$.

259. Jeżeli na środku C linii AB , postawi się prostopadła DD , którejby połowa, była średnią proporcjonalną między c i $a + c$, to jest między AF i fA , to takowa prostopadła nazywać się będzie drugą osią hiperboli, którą oznaczmy sobie przez b , będzie $\frac{bb}{4} = c \cdot (a + c)$, albo $bb = 4ac + 4cc$; używszy tej ilości bb , zamiast $4ac + 4cc$ w równaniu $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx)$, będzie $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$. Skąd pokazuje się, że te trzy równania należące do hiperboli, nieróżnią się od trzech równań odpowiadających, należących do Ellipsy, tylko znakami poprzedzającymi kwadraty cc i xx .

Toż samo równanie $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$ wskazuje nam także własność podobną tamtej, którą uważaliśmy względem Ellipsy. Jakóż, wyrugowawszy mianownika aa , będzie $ayy = bb (ax + xx)$, skąd wnosi się ta proporcya, $ab : ax + xx :: bb : aa$, albo $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD)^2 : (AB)^2$ albo $:: (CD)^2 : (AC)^2$; to jest, że kwadrat rzędnej należący do głównej osi hiperboli, ma się do mnogości $AP \times PB$, z dwóch odcinków, tak się ma kwadrat drugiej osi, do kwadratu gło-

główny; a zatem kwadraty rzędnych mają się między sobą jak mnogości z odcinków odpowiadających.

Kiedy dwie osi a i b będą sobie równe, to zrównanie należące do hiperboli, będzie $yy = ax + xx$, które nieróżni się od zrównania należącego do koła, tylko znakiem poprzedzającym kwadrat xx . Hiperbola naczas nazywa się hiperbolą równoramienną (hiperbola æquilatera).

Z równania $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, wyciąga się $4ac + 4cc = ap$; a ponieważ mieliśmy $4ac + 4cc = bb$, więc będzie $ap = bb$; skąd wnosi się ta proporcya, $a : b :: b : p$; więc palirzędna należąca do głównej osi, jest trzecią proporcjonalną téżże głównej osi i drugiej osi.

260. Jeżeli z punktu D (fig. 32) poprowadzi się do punktu A linia DA , trójkąt prostokątny DCA , da $DA = \sqrt{(CD)^2 + (AC)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa}$, albo położywszy zamiast bb wartość onego $4ac + 4cc$, $DA = \sqrt{cc + ac + \frac{1}{4}aa} = c + \frac{1}{2}a = AF + CA = CF$.

Więc mając wiadome osi, żeby mieć śródpały, trzeba wznaczyć DA od C do F , a odwrotnie, żeby mieć drugą oś, kiedy jest zadana główna oś i śródpały, trzeba z punktu A iako ze środka, promieniem CF , nakryślić łuk przecinający prostopadłą DD , w iakowym punkcie D .

261. Jawną jest, że wykryślenie hiperboli zawisło od dwóch ilościów, to jest od głównej osi i drugiej osi, albo od głównej osi i od śródpalów, albo téż od głównej osi

i od palirzędny. Podług tego co się rzekło, wykryślenie hiperboli, zawsze łatwo będzie naprowadzić do iednego z sposobów wyżej przepisanych. Albowiem gdyby np. zadana była główna oś i palirzędna, to wzięwszy średnią proporcjonalną między temi dwiema liniami, mielibyśmy mnieyszą oś, przy pomocy której znaleźlibyśmy szródpały.

262. Jeżeli weźmie się na linii MF część $MG = MF$ i poprowadzimy linię FG , jeżeli z punktu M spuści się na nią prostopadła MOT , to takowa prostopadła będzie styczną hiperboli.

Albowiem, z innego iakiegokolwiek punktu N obranego na linii TM , poprowadźmy do dwóch szródpałów linii Nf i NF , iako też do punktu G linię NG ; natenczas iakwna jest z samego wykryślenia, że linii Nf i NG są sobie równe; lecz linia Nf jest mnieysza od $NG + Gf$, a zatem mnieysza od $NF + Gf$; więc linia $Nf - NF$ jest mnieysza od Gf , to jest mnieysza od $Mf - MF$; więc punkt N jest położony zewnątrz hiperboli. Toż samo możnaby okazać względem wszelkiego innego punktu wziętego na linii TM oprócz punktu M .

Kąty FMO , i OMG są sobie równe, mocą poprzedzającego wykryślenia; lecz kąt OMG

OMG równa się swemu przeciwnemu w wierzchołku NMQ ; więc kąt FMO , jest równy kątowi NMQ ; więc linia MF idąca do szródpału, czyni z styczną tenże kąt, który czyni z tąż styczną przedłużenie MQ linii fM , idącej do drugiego szródpału.

Więc jeżeli punkt F jest punktem światłym, to wszystkie promienie wychodzące z punktu F , i padające na wklękość MAM , tak odbić się będą, iak gdyby wychodziły z punktu f .

263. Wynaydziemy teraz podtyczną (subtangens) PT .

Ponieważ styczną MT , dzieli kąt Fmf na dwie równe części, więc podług (Jeom. 104) będzie $fM : MF :: fT : FT$; a oznaczywszy, iak wyżej, MF przez z , będzie $fM = z + a$; nadto ponieważ Ff albo $Bf + AB + Af = a + 2c$, więc będzie linia fT albo $Ff - FT = a + 2c - FT$, a zatem poprzedzająca proporcya odmieni się w to wyrażenie, $z + a : z :: a + 2c - FT : FT$; z którego po rozmnożeniu skrajnych i szródków, wnosi się zrównanie $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$; z niego zaś przy pomocy zwyczajnych działań wyciąga się $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a)z}{2z + a}$; lecz wyżej (253),

Y 2

zna-

znaleźliśmy $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; więc $2x$
 $+ a = \frac{4cx + 2ac + 2ax + aa}{a} =$
 $\frac{(2c + a) \cdot 2x + (2c + a)a}{a} = \frac{(2c + a) \cdot (2x + a)}{a}$,
 takową wartość położywszy w war-
 tości linii FT , będzie $FT =$
 $(2c + a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}$
 $2c + a \times \frac{2x + a}{a}$; albo wyrugó-

wawszy spólnego czynnika $\frac{2c + a}{a}$,
 $FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}$. Tym sposobem
 wynalazłszy linią FT , łatwo mieć
 będzie można podtyczną PT ; albo-
 wiem $PT = FT - FP = FT - AF$
 $+ AP = FP - c + x = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}$
 $- c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; więc
 $PT = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; skąd pokazuje się, że
 wyrażenie podtyczny należący do
 hiperboli, nieróżni się od wyrażenia
 podtyczny należący do Ellipsy, tyl-
 ko znakami.

264. Jeżeli od PT odéymie się
 AP , zostanie AT , to jest odległość
 wzię-

wzięta od więrszchołka, aż do tego
 miéysca gdzie styczna spotyka się z
 osią. Takowa tedy odległość AT
 będzie wyrażona przez $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$,
 a po zebraniu będzie $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

265. To wyrażenie linii AT , daie nam
 okazywać do uczynienia tu niektórych uwag
 nad krzywością hiperboli. Widzieliśmy wy-
 żej że każde z dwóch ramion AM i AM'
 rościąga się bez końca. Ażoli jednak krzy-
 wość jest taka, że wszystkie styczne, które-
 by tylko przytknąć można do każdego pun-
 ktu tych ramion nieskończonych, niespoty-
 kają się nigdy z osią tylko w długości za-
 wartéj między punktami A i C . Jakóż ie-
 żeli w wartości linii AT położymy koléy-
 no zamiast x , wszelkie ilości iakie tylko
 pomyśleć można, począwszy od zera aż nie-
 skończenie, to iednakże wartość linii AT
 rosnąć niebędzie tylko od zera aż do $\frac{1}{2}a$. Al-
 bowiem kiedy x będzie ilością nieskończoną,
 to mianownik $\frac{1}{2}a + x$, powinién być rozu-
 miany, iak gdyby był tylko x ; bo przyda-
 wszy mu $\frac{1}{2}a$, byłoby to rozumieć, że x ieszcze
 może być pomnożone, a zatem byłoby zno-
 sić to przypuszczenie, że x jest ilością nie-
 skończoną; lecz w takowym przypadku, wár-
 tość linii AT , wychodzi na $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$, to jest na

$\frac{1}{2}a$; więc styczna poprowadzona z końca nie-
 skończonego każdego ramienia hiperboli AM ,
 AM' przechodzi przez środek C . A że
 ramiona Bm , Bm' położone naprzeciw pier-
 wszym, są im doskonale równe, i że punkta

A i *B*, oba są równo oddalone od środka *C*, więc idzie zatém, że też same styczne, są także stycznymi końcom nieskończonym ramion hiperboli *Bm*, *Bm*. W figurze 33 fig. 33. takowe linie są oznaczone przez *XCx* i *TCy*.

266. Takowe styczne nazywają się *końcotypcznemi* hiperboli (asymptoty); łatwo iak widzieć można linie poczynające się od środka, i bez ustanku coraż bardziéj przybliżające się do hiperboli, a iednakże z nią niémogące się zniysdź, aż w odległości nieskończonéj.

Jeżeli przez wierszchołek *A* poprowadzi się linia *At*, równoległa linii *PM*, to trójkąty sobie podobne *TAt*, *TPM*, dadzą tę proporcya, *PT* : *PM* :: *TA* : *At*, to jest, $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y ::$

$$\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} : At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a + x} \times \frac{\frac{1}{2}a + x}{ax + xx} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a + x}$$

albo położywszy zamiast *y* iego wartość $\frac{b}{a} \sqrt{(ax + xx)}$, będzie *At* = $\frac{\frac{1}{2}b \sqrt{(ax + xx)}}{\frac{1}{2}a + x}$, wartość, która (kiedy *x* będzie ilością nieskończoną) przemienia się na $\frac{1}{2}b$ albo na *CD*; bo natenczas *ax* powinno być za nic poczytane względem *xx*, iako téż *a* względem *x*. Zeby tedy wynalésdź po-

położenie końcotypcznych, trzeba sobie postąpić w następujący sposób. Z punktu *A* (fig. 33), podnosi się prostopadła *AL*, przedłużona z obu stron punktu *A* na iednakową ilość, równającą się linii *CD*; natenczas poprowadziwszy przez środek *C* i przez dwa końce *LL'* dwie linie, takowe będą żądanemi końcotypcznymi.

267. Zeby mieć wyrażenie linii *CT* (fig. 32), trzeba od *CA* odjąć *AT*; a tak będzie $CT = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$
 $= \frac{\frac{1}{2}aa}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{(CA)^2}{CP}$, skąd wnosi się ta proporcya, *CP* : *CA* :: *CA* : *CT*.

268. Chcąc mieć wyrażenie linii *TM*, trójkąt prostokątny *TPM*, daie $(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax + xx) + \frac{(ax + xx)^2}{(\frac{1}{2}a + x)^2} = \left[\frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a + x)^2 + ax + xx \right] \cdot \frac{(ax + xx)}{(\frac{1}{2}a + x)^2}$.

269. Zeby mieć wyrażenie linii *PI* to jest międzyległéj; trójkąty *TPM*, *MPI* sobie podobne, (z przyczyny iż kąt *TM* i jest prosty, a *PM* jest prostopadła spuszczone z kąta prostego), dadzą *TP* : *PM* :: *PM* : *PI*, albo

$\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y :: y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a + x)}{ax + xx}$, albo
 téż z przyczyny że $y^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax + xx)$, będzie $PI = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a + x)$.

270. Poszukamy teraz zrównania względem drugiey osi DD' ; tym umyślem poprowadźmy prostopadłą MP' na tę drugą os, a oznaczwszy MP' przez y' , i DP' przez x' , mieć będziemy $CP' = PM = y = \frac{1}{2}b - x'$; $PM = CP = \frac{1}{2}a + x = y'$; a zatem $x = y' - \frac{1}{2}a$; położywszy tedy zamiast x i y takowe wartości w zrównaniu $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$, albo $aayy = bb(ax + xx)$, po uczynionych zebraniach, będzie $y'y' = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$; skąd pokaznie się, że z hiperbolą nie tak ma się rzecz jak z Ellipsą; bo w nięć zrównanie należące do drugiey osi, niejest podobne zrównaniu należącemu do pierwszey czyli do główneý osi.

271. Naostatek żeby mieć zrównanie względem osi AB , rachuiąc odcinki od środka C ; oznaczmy CP przez z , a mieć będziemy $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$; a zatem $x = z - \frac{1}{2}a$; położywszy tę wartość w zrównaniu $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$, będzie $yy = \frac{bb}{aa} (zz - \frac{1}{4}aa)$, to jest zrównanie należące do główneý osi, ale odcinki biorąc od środka. A zaś względem osi, jeżeli oznaczmy CP przez z' , mieć będziemy $z' = CD - DP = \frac{1}{2}b - x'$; a zatem $x' = \frac{1}{2}b - z'$; położywszy tę wartość w zrównaniu $y'y' = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$,

wy.

wyżey wynalezioném względem drugiey osi (270), będzie $y'y' = \frac{aa}{bb} (z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

272. Gdybyśmy chcieli wyrazić stóśownie do środka C , wartości linii PT , CT , PI , i PM , wyżey wynalezione, nieatrzebaby więcę, tylko położyć w takowych wartościach zamiast x ilość $z - \frac{1}{2}a$, a natenczas będzie $PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}$, $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, $PI = \frac{bbz}{aa} (TM)^2 = (\frac{bbz}{aa} + zz - \frac{1}{2}aa) \cdot \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$.

A jeżeli przedłużymy linią MT , tak daleko aż się spotka z drugą osią w punkcie T' ; trójkąty sobie podobne TPM , TCT' , dadzą $TP : PM :: CT : CT'$; albo $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT'$, $= \frac{\frac{1}{4}aay}{zz - \frac{1}{4}aa}$; lecz $zz - \frac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}$; więc $CT' = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{(CD)^2}{MP} = \frac{(CD)^2}{CP}$; więc $CP' : CD :: CD : CT'$.

273. Jeżeli przez środek C hiperboli (fig. 33), poprowadzi się linią prosta iakakolwiek MCM' , kończąca się z obu końców na hiperboli, to takowa linią nazywać się będzie

dzie średnicą (diameter). Każda linia mO , poprowadzona z punktu m hiperboli, równoleglegle styczney MT , a kończąca się na średnicy przedłużonéy MM , nazywa się rzędną, należącą do téy średnicy (ordynata); téy zaś odpowiadającymi odcinkami będą linie MO , i OM . Teraz mamy okazać, że własności rzędnych mO należących do średnic hiperboli, są też same co własności rzędnych MP należących do głównéy ośi.

Poprowadźmy z punktów m i O , linie mp i OQ prostopadłe na oś AB ; z punktu m wyciągniemy linią mS równoległą linii AP ; natenczas oznaczwszy MP przez y ; CP przez z ; Qp przez g ; CQ przez k ; mieć będziemy $AP = CP - CA = z - \frac{1}{2}a$; $BP = CP + BC = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = Cp - CA = CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$; $Bp = Cp + BC = k - g + \frac{1}{2}a$.

Trójkąty sobie podobne CPM , CQO , daia $CP : PM :: CQ : QO$, to jest, $z : y :: k$; $QO = \frac{ky}{z}$. Trójkąty znowu TPM , mSO , także sobie podobne, daia $PT : PM :: mS$ albo $Qp : SO$; to jest (272), $\frac{z - \frac{1}{2}a}{z} : y :: g$; $SO = \frac{gyz}{z - \frac{1}{2}a}$; więc $mp = SQ = QO - SO$

$SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{z - \frac{1}{2}a}$; a że punkt m należy do hiperboli, więc podług (259) musi być $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$; to jest $(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{z - \frac{1}{2}a})^2 : yy :: (k - g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a) \times (z + \frac{1}{2}a)$, albo $\frac{kky}{z} - \frac{2gkzy}{z(z - \frac{1}{2}a)} + \frac{ggzzy}{(z - \frac{1}{2}a)^2} : yy :: kk - 2kg + gg - \frac{1}{4}aa : zz - \frac{1}{4}aa$; więc rozmnożywszy wyrazy średnie i skrajne, a oraz dawszy baczenie na ilości rozmnożone i rozdzielone przez $zz - \frac{1}{4}aa$, iako też i na te co znajdować się będą rozmnożone i rozdzielone przez z , będzie $\frac{kky}{z} (zz - \frac{1}{4}aa) - 2gkyy + \frac{ggzzy}{z - \frac{1}{2}a} = kky - 2gkyy + ggy - \frac{1}{4}aay$, albo odprawiwszy wskazane działania w wyrazie $\frac{kky}{z} (zz - \frac{1}{4}aa)$, i wyrzuciwszy wyrazy kky i $-2gkyy$ iako znajdujące się w obu częściach, zrównania, nadto rozdzieliwszy przez yy , będzie $-\frac{1}{4} \frac{aakk}{z} + \frac{ggz}{z - \frac{1}{2}a} = gg - \frac{1}{4}aa$; zrównanie maie nam służyć do okazania własności o którą rzecz idzie: ale wprzód uważmy, że jeżeli po obu stronach środka C , weźmie się na oś AB część CR , któraby była średnią proporcjonalną między BP i AP , to jest taką, ażeby było $(CR)^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$, i jeżeli podniószy prostopadłą RN , kończącą się w N przez linią NN' poprowadzoną przez środek C , równoległą linii TM , jeżeli mówię zrobi się $CN = CN'$, to natenczas linia NN' nazywać się będzie średnicą dostawną (diameter conjugata), średnicy MM ; nazywa się zaś

palirzedną średnicy MM' trzecia proporcjonalna liniom MM' i NN' .

Powróćmy teraz do naszej rzeczy; oznaczmy sobie CM przez $\frac{1}{2}a$; CN albo CN' przez $\frac{1}{2}b$; CO przez z ; a zaś Om przez y . Trójkąty sobie podobne CPM , CQO , dają $CM:CP::CO:CQ$; to jest $\frac{1}{2}a:z::z:\frac{1}{2}a$, więc $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$.

Trójkąty mSO i $CN'O$ także podobne sobie z przyczyny boków równoległych, dają $CN':CR::mO:mS$, albo $\frac{1}{2}b:CR::y:g$; więc $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2}b}$, a zatem $gg = \frac{CR^2 \times y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$, albo ponieważ zrobiło się $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$, będzie $gg = \frac{y'y'(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Położmy teraz w równaniu wyżej wynalezioném — $\frac{1}{4}aakk + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, zamiast gg i kk wartości ich dopiero wynalezione, a mieć będziemy, — $\frac{1}{4}aa + \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'(zz - \frac{1}{4}aa)} = \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{1}{4}aay'y' - \frac{1}{4}aa$, albo (po zebraniu a potem po rozdzieleniu przez $\frac{1}{4}aa$), $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - 1$, albo po odprawieniu zwyczajnych działań, $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; równanie podobne do owego króre mieliśmy względem głównego.

274. Jeżeli zrobimy $y' = 0$, znajdziemy byż $z'z' - \frac{1}{4}a'a' = 0$, skąd

skąd wyciąga się $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; więc hiperbola spotyka się z linią MM' w dwóch punktach M i M' naprzeciw sobie położonych, każdy z nich oddalony będąc od środka na ilość $\frac{1}{2}a$, albo o CM ; co znać daie, że wszystkie średnice przecinaia się w środku na dwie równe części.

275. Równanie $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}$.

$(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, dające $y' = \pm \frac{b'}{a'}$. $\sqrt{z'z' - \frac{1}{4}a'a'}$, to jest dwie wartości równe, tylko poprzedzone znakami przeciwnymi, okazuię, że przedłużywszy linią mO , tak ażeby $Om' = Om$ punkt m' należyć będzie do hiperboli; więc każda średnica MM' przecina linie równoległe styczney, przechodzący przez początek M téżże średnicy, na dwie części równe.

276. Toż równanie daie iefzcze $a'a'y'y' = b'b'(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; skąd wnosi się $y'y':z'z' - \frac{1}{4}a'a':::b'b':a'a'$, albo $(mO)^2:MO \times OM':::(NN')^2:(MM')^2$; to jest że: kwadrat rzędnej którejkolwiek mO , należący do średnicy kończącej się na

hiperboli, ma się do mnogości z dwóch odpowiadających odcinków $MO \times OM$, iak się ma kwadrat średnicy do kwadratu pierwiastka średnicy.

277. Jeżeli ze środka C spuści się na linię TM prostopadłą CF , to trójkąty CFT TPM sobie podobne, dadzą $TM : PM :: CT : CF$, a zatem będzie $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$.

Trójkąty zaś znowu CRN , TPM także sobie podobne, dadzą $PT : TM :: CR : CN$ albo $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; więc $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, albo skwadrówawszy, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; a że mamy

$$(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa);$$

$$(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa \quad (273); \text{ i } (272)$$

$$(CT)^2 = \frac{\frac{1}{4}aa^2}{zz}; \quad (PT)^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz};$$

więc położywszy te wartości zamiast linii, i po uczynioném zebraniu, będzie $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, albo $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. A jeżeli prze-

duży się MT aż do końcowej w I , linia MI będzie równa linii CN , iak zobaczymy niżej, a zatem $CIMN$ będzie równoległobok, mający powierzchnią swoją $= CF \times MI = CF \times CN$; więc punkt M niechay będzie położony gdzie chce, to równoległobok $CIMN$, zawsze równać się będzie w powierzchni, równoległobokowi zrobionemu z dwóch półosiów; to jest będzie $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$.

278. Trójkąty sobie podobne TPM i CRN , dają $TP : PM :: CR : RN$, więc $RN = \frac{PM \times CR}{TP}$, a zaś $(RN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2}$

$= \frac{bbzz}{aa}$, położywszy zamiast linii ich wartości Algebraiczne i uczyniwszy zebranie. Iecz znowu trójkąty prostokątne CPM i CRN , dają $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$, a zaś $(CN)^2$ albo $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$; więc $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN)^2$; położywszy w drugiey części tego zrównania zamiast linii, ich wartości Algebraiczne wyżej wynalezione, i uczyniwszy zebranie, będzie $(CM)^2 - (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; to jest, że różnica między kwadratami dwóch pół średnic dostawnych, którekolwiek, jest zawsze też suma, i równa różnicy między kwadratami dwóch półosiów.

Stąd wynika, że w hiperboli równoramiennéy, każda średnica jest równa swojej

hiperboli, ma się do mnogości z dwóch odpowiadających odcinków $MO \times OM$, iak się ma kwadrat średnicy dostawnej, do kwadratu pierwszej średnicy.

277. Jeżeli ze środka C spuści się na linię TM prostopadłą CF , to trójkąty CFT TPM sobie podobne, dadzą $TM : PM :: CT : CF$, a zatem będzie $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$.

Trójkąty zaś znowu CRN TPM także sobie podobne, dadzą $PT : TM :: CR : CN$ albo CN ; więc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; więc $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, albo skwadrówawszy, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; a że mamy

$$(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa);$$

$$(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa \quad (273); \text{ i } (272)$$

$$(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}; \quad (PT)^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz};$$

więc położywszy te wartości zamiast linii, i po uczynioném zebraniu, będzie $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, albo $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. A jeżeli prze-

dku.

duży się MT aż do końcotypcznej w I , linia MI będzie równa linii CN , iak zobaczymy niżej, a zatem $CIMN$ będzie równoległobok, mający powierzchnią swoją $= CF \times MI = CF \times CN$; więc punkt M niechay będzie położony gdzie chce, to równoległobok $CIMN$, zawsze równać się będzie w powierzchni, równoległobokowi zrobionemu z dwóch półosiów; to jest będzie $= \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$.

278. Trójkąty sobie podobne TPM i CRN , daią $TP : PM :: CR : RN$; więc $RN = \frac{PM \times CR}{TP}$, a zaś $(RN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2} = \frac{bbzz}{aa}$, położywszy zamiast linii ich wár-

tości Algebraiczne i uczyniwszy zebranie. Iecz znowu trójkąty prostopadłe CPM i CRN , daią $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$, a zaś $(CN)^2$ albo $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$; więc $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN)^2$; położywszy w drugięj części tego zrównania zamiast linii, ich wártości Algebraiczne wyżej wynalezione, i uczyniwszy zebranie, będzie $(CM)^2 - (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; to jest, że różnica między kwadratami dwóch pół średnic dostawnych którychkolwiek, jest zawsze też suma, i równa różnicy między kwadratami dwóch półosiów.

Stąd wynika, że w hiperboli równoramiennęj, każda średnica jest równa swo-

ięj

ięy dostawny; bo jeżeli $a = b$, to będzie $(CM)^2 - (CN)^2 = 0$, a zatem $CM = CN$.

279. Jeżeli w równaniu $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$ położą się zamiast linii CR i RN ich wartości Algebraiczne, to będzie $(CN)^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbxz}{aa}$; lecz znaleźliśmy

wyżej (272), $(TM)^2 = \left(\frac{bbxz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right)$.

$zz - \frac{1}{4}aa$; więc będzie $(TM)^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$

$\times (CN)^2$; lecz znowu trójkąty sobie podobne MPT i $MP'T$ po skwadrówaniu daią, $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (T'M)^2$, albo $(zz - \frac{1}{4}aa)^2 : (CN)^2 \times (zz - \frac{1}{4}aa) :: zz :$

$(T'M)^2$; więc $(T'M)^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4}aa}$; więc

$(TM)^2 \times (T'M)^2 = (CN)^4$, albo $TM \times T'M = (CN)^2$; jeżeli zaś oznaczmy przez p , poprzednią średnicę MM , to mieć będziemy $2CM : 2CN :: 2CN : p$, a zatem będzie $2p \times CM = 4(CN)^2$, albo $(CN)^2 = \frac{1}{2}p \times CM$; więc $TM \times T'M = \frac{1}{2}p \times CM$, skąd wnosi się ta proporcja, $CM : TM :: TM : \frac{1}{2}p$.

280. Stąd można sobie wnieść sposób następujący, do znalezienia osiów hiperboli, a zatem i do wykryślenia ięy, niemając więcej nic wiadomego tylko dwie średnice dostawne, i kąt iaki czyni jedna z drugą.

fig. 34.

Trzeba wziąć na linii MC (fig. 34), linią $MH = \frac{1}{2}p$, i ze środka I odległości CH spuścić prostopadłą IR , która w iakowym punkcie R przetnie linią MT , prowadzoną przez punkt M równolegle średnicy dostawnej NN . Z tego punktu R iako ze środka, promieniem równym odle-

głości wziętej od R do C , rysuje się koło, które spotka się z linią MT w dwóch punktach T i T' ; przez nie tedy i przez środek C poprowadziwszy dwie linie TC i CT' , takowe, dadzą kierunki osiów. Albowiem iawna jest iad że kąt TCT' będzie prosty, bo okrąg przechodzi przez punkt C i ma za średnicę linią TT' . Zreż na ury koła, podług (Jeom. 120), wynika ta proporcja, $CM : TM :: TM : MH$; więc kiedy zrobilo się $MH = \frac{1}{2}p$, musi byc $CM : TM :: TM : p$.

Wynalazłszy tym sposobem kierunki osiów, wynaydzie się także ich wielkość, spuściwszy z punktu M , prostopadłą MP , MP' , i zrobiwszy linią CA , równą średnicy proporcjonalnej między CP i CT , a linią CD równą średnicy proporcjonalnej między CP' i CT' ; wynika to z samych wyrażen linii CT i CT' wyżej wynalezionych (272.)

Kiedy dwie średnice dostawne wiadome, są sobie równe, to natenczas palirzedna wypada im równa, przez co stale się $MH = MC$; w takim razie, ponieważ dwa punkta przecięciów H i C , przyodają w iednymże punkcie, więc linia MC jest styczną koła; a zatem żeby mieć szrodek R , nietrzeba więcej, tylko na linii CM postawić prostopadłą w punkcie C .

O Hiperboli między Kóńcotycznymi.

281. **H**iperbola uważana stósównie do swoich kóńcotycznych, ma pewne własności, których wiadomość może byc pożyteczna; dla tego tu zastanowimy się nad nie-

Tom II.

Z

mi.

mi. (Zob. l. 266. iak wynayduią się końcotyczne).

Naprzód uważać będziemy każdy punkt E hiperboli (fig. 35), względem dwóch końcotycznych CLO , CLo , poprowadziwszy linią EQ równoległą jedney z nich; a dopiero szukać będziemy stosunku między liniami EQ i CQ .

Zeby wynaléśdź takowy stosunek, poprowadźmy przez którykolwiek punkt E linią OEO , równoległą drugiey osi DD' i linią ES , równoległą linii CLO ; przez wierzchołek zaś A poprowadźmy linią AG równoległą linii CLo . Oznaczmy CA przez $\frac{1}{2}a$, CD albo AL albo AL przez $\frac{1}{2}b$; CP przez z ; PE przez y ; AG przez m ; GL przez n ; CQ przez t ; a QE przez u .

Natenczas, trójkąty sobie podobne CPO , CAL , dadzą $CA:AL::CP:PO$, albo $\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}b$ albo $a:b::z:PO = Po = \frac{bz}{a}$; więc $Eo = \frac{bz}{a} - y$,
a $Eo = \frac{bz}{a} + y$, a zatem $EO \times Eo = \frac{b^2 z^2}{a^2} - yy = \frac{1}{4}bb$, (położywszy zamiast yy wartość onego $\frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$ i uczy-

uczyniwszy zebranie); to jest, że $EO \times Eo = (CD)^2 = (AL)^2$; własność należąca do każdego punktu hiperboli; ponieważ punkt E był obrany podług upodobania.

282. Trójkąty QEO , ESo i AGL sobie podobne; dają $AL:AG::EO:EQ$, i $AL:GL::Eo:ES$, więc rozmnożywszy porządkiem te dwie proporcye, żeby w nie wprowadzić to wyrażenie $EO \times Eo$, którego mamy wartość, będzie $(AL)^2:AG \times GL::EO \times Eo:EQ \times ES$; to jest, $\frac{1}{4}bb:mn::\frac{1}{4}bb:ut$; więc $ut = mn$; zrównanie należące do hiperboli, uważanę między swemi końcotycznymi. A tak w każdym którymkolwiek punkcie E hiperboli, zawsze jest $EQ \times ES$ albo raczey $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Teraz przypuściwszy że punkt E przypada na punkt A , to CQ odmiéni się w CG , a QE w AG ; będzie tedy $CG \times AG = AG \times GL$; więc $CG = GL$. Lecz ponieważ tym sposobem punkt G staie się środkiem linii CL , więc musi być $CG = AG = GL$; bo koło opisane na linii CL iako na średnicy, a zatem mające za promień linią CG , przechodziłoby przez punkt A , z przyczyny kąta prostego A ; jest tedy $m = n$, a zatem $ut = m^2 = (CG)^2$.

Takowy nieodmienny kwadrat m^2 albo $(CG)^2$, któremu zawsze równa się mnogość ut albo $CQ \times QS$, nazywa się stopniem hiperboli (potentia).

283. Z własności dopiero okazanę, można można sobie wnieść tę drugą: Ze z któregokolwiek bądź punktu E hiperboli, poprowadziwszy linią

Z 2. niq

nią prostą REr , opierającą się na końcowych, części RE , mr , zachwycone między hiperbolą i końcowymi są sobie równe.

Albowiem jeżeli przez punkt m poprowadzi się linia hm H , równoległa linii OEO , trójkąty sobie podobne REO , i RmH , daia $ER:Rm::EO:HM$; a znowu trójkąty rh i roE także sobie podobne, daia $Er:mr::Eo:mh$; rozmnożywszy porządkiem te dwie proporcye, będzie $ER \times Er:Rm \times mr::EO \times Eo:hm \times mh$; lecz każda z tych dwóch mnogości $EO \times Eo$ i $hm \times mh$, równa się kwadratowi $(CD)^2$ (282); więc musi być $ER \times Er = Rm \times mr$, albo $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; odprawiwszy wskazane mnożenia, i wyrzuciwszy z obu części zrównania, ilość $ER \times mr$, będzie $ER \times Em = Em \times mr$; więc $ER = mr$.

284. A stąd należy sobie wnieść, że każda styczna Tt hiperboli, opierająca się na końcowych, dzieli się na dwie równe części w punkcie dotknięcia M .

285. Jeżeli przez punkt M poprowadzi się linia IMI równoległa linii ED , tudzież jeżeli znowu przez którykolwiek punkt E poprowadzi się inna linia REr równoległa stycznej Tt , to trójkąty TMI , REO sobie podobne, dadzą $TM:MI::REEO$; a trójkąty

trójkąty znowu Mit , Eor , także podobne sobie, dadzą Mt albo $TM:Mi::Er:Eo$; rozmnożywszy zaś porządkiem te dwie proporcye, będzie $(TM)^2:MI \times Mi::RE \times Er:EO \times Eo$; lecz każda z dwóch mnogości $MI \times Mi$ i $EO \times Eo$, równa się kwadratowi $(CD)^2$; więc $(TM)^2 = RE \times Er$.

286. Jeżeli ze środka C poprowadzi się średnica CMV , takowa rozdzieli na dwie równe części linią Rr , równoległą linii Tt ; z przyczyny (284) że przechodzi przez środek M linii Tt ; więc oznaczywszy CM przez $\frac{1}{2}a'$; TM przez $\frac{1}{2}q$; CV przez z' ; rzędną VE przez y' ; trójkąty CMT , CVR podobne sobie, dadzą $CM:MT::CV:VR$; to jest, $\frac{1}{2}a':\frac{1}{2}q$, albo $a':q::z':VR = VR = \frac{qz'}{a'}$; więc $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, a $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; a ponieważ $RE \times Er = (TM)^2 = \frac{1}{4}qq$; więc będzie $\frac{qz'x'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; lecz znowu (273) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; więc używszy téj wartości, będzie $\frac{qqz'x'}{a'a'} - \frac{b'b'z'x'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$, albo $(qq - b'b') = \frac{z'x'}{a'a'} \cdot \frac{1}{4}(qq - b'b')$, albo $(qq - b'b') \frac{z'x'}{a'a'} - \frac{1}{4}(qq - b'b') = 0$.

$=0$; albo $(qq - b'b')(\frac{x'x'}{a'a'} - \frac{1}{4}) = 0$;

a rozdzieliwszy przez $\frac{x'x'}{a'a'} - \frac{1}{4}$, będzie

$qq - b'b' = 0$; skąd wyciąga się $q =$

b' , albo $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, to jest $MT = CN$,

gdzie przez CN rozumiemy połowę

średnicy dostawnej do średnicy

CM , i to jest, co obiecaliśmy oka-

fig. 33. zać (277). Będzie tedy w fig. 33.

$MI = CN$.

287. A zatem każdej linii prostej

fig. 35. REr , równoległej średnicy dostawnej CN (fig. 35) służyć będzie to

zrównanie $RE \times Er = (CN)^2$.

288. Stąd pokazuje się, że mając wi-

fig. 36. dome dwie półśrednice dostawne CM , CN (fig. 36), i kąt jaki między sobą czynią, bar-

dzo łatwo będzie można nakryć hiperbolę,

przez punkta kolejno wynalezione. Jakóż

z tego co się powiedziało (284 i 286), jawna

jest, że poprowadziwszy przez początek M

średnicy CM linią TMt , równoległą linii

CN , i wytknąwszy na obie strony punktu M ,

części MT , Mt , każdą równą linii CN ; ieże-

li przez środek C poprowadzą się linie CT

i Ct , takowe będą końcowymi hiperboli.

Stąd zaś co się dowiodło (283), pokazuje się,

że jeżeli przez punkt M poprowadzi się do

woli, tak wiele, linii prostych PMQ , PMQ ,

ile się spodoba, i jeżeli na każdej zrobi się

$PO = MQ$, to punkta O tym sposobem, wy-

nalezione, wszystkie należyć będą do hiper-

boli szukanej. Tych wynalezionych pun-

któw

któw O można też potem użyć, do wynalezienia znowu innych, takich jak są V , V' i. t. d. poprowadziwszy linie proste ROS , ROS i. t. d. i zrobiwszy $SV = RO$.

289. Stąd także pokazuje się, iako między dwiema liniami danymi na końcowych, można wykryć hiperbolę, któraby przechodziła przez punkt zadany między temiż liniami.

290. Naostatek, przedzieliwszy kąt końcowych, i onego spełnienie, każdy na dwie równe części, wypadną kierónki dwóch ośiów, których wielkość wynadzie się, podług tego co się rzekło (280); a to jest drugi sposób rozwiązywania tego zagadnienia, o którym rzecz była na tamtym miejscu.

O Paraboli.

291. Teraz mamy zastanowić się nad własnościami takiej linii krzywéj, któraby każdy punkt, był równo oddalony tak od punktu fig. 37. stałego F (fig. 37), iako też od linii prostej XZ , wiadoméj z położenia; to jest takiéj, ażeby z każdego i iakiegokolwiek punktu M spuściwszy prostopadłą MH , zawsze było $FM = MH$.

Z punktu F , poprowadźmy linię FV prostopadłą na XZ , i przedzielimy FV na dwie równe części w A ; to A będzie punktem linii krzywéj, z przyczyny że $AV = AF$; ta-

Z4 . kowy

kowy punkt A nazywa się *wierszchołkiem*.

Zeby tedy wynaleść właściwości tej linii, którą nazywają *Parabolą*, trzeba nam poszukać równania, wyrażającego stosunek między prostopadłami MP spuszczonej na linię FV , i ich odległościami AP od punktu A . Tym umyślem oznaczywszy AV albo AF przez c ; AP przez x ; PM przez y ; mieć będziemy $VP = AV + AP = c + x = MH$; a ponieważ $MF = MH$, więc także $MF = c + x$; nadto będzie $FP = AP - AF = x - c$; trójkąt zaś prostokątny FPM , daie $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$; więc $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; więc po przekształceniu i pozebraniu, będzie $yy = 4cx$; takie tedy jest równanie należące do Paraboli, zobaczmy czego nas uczy.

¹o^d Z tego równania wyciąga się $y = \pm \sqrt{4cx}$; więc każdej ilości x albo AP , odpowiadaia dwie wartości równe, ilości y albo PM ; ale że jedna z nich jest twierdząca a druga przecząca, więc te linie przypadają z przeciwnych stron linii nieokręślonej APV , która nazywa się *osią* (axis)

(axis); to jest, że takowemi liniami są PM i PM' . Parabola tedy ma dwa ramiona AM i AM' doskonale sobie równe i rościągające się bez końca; albowiem jawna jest, że im bardziéy x pomnażać się będzie, tém téż bardziéy wartość $\sqrt{4cx}$ a zatem i y rość będzie.

²o^e Jeżeli x zrobimy ilością przeczącą, to mieć będziemy $y = \pm \sqrt{-4cx}$, to jest wartość zmyśloną; co znać daie, że linia krzywa nierościąga się nad punkt A .

³o^e Jeżeli zrobimy $x = c$, żeby mieć rzędną przechodzącą przez punkt F , nazywający się *śróżdpółem* (focus), to mieć będziemy $y = \pm \sqrt{4cc} = \pm 2c$; to jest że $Fm'' = 2c$; więc $m''m'' = 4c$. Takowa linia $m''m''$ przechodząca przez *śróżdpół*, nazywa się *palirzedną* osi parabolicznę C (parameter). A tak *palirzedna osi parabolicznę*, jest cztery razy tak wielka, iak odległość AF od *wierszchołka* do *śróżdpółu*.

⁴o^e A zatem oznaczywszy przez p takową palirzedną, będzie $4c = p$, i równanie należące do paraboli odmiéni się w to, $yy = px$.

292. Mając zrównanie odpowiadające paraboli, nietrudno ją będzie sobie wykryć przez punkta kolejno powynajdowane, naznaczając głosce x różne wartości, i rachując odpowiadające każdej z nich, wartości głoski y .

293. Można też jeszcze wykryć Parabolę w ten drugi sposób następujący: Obróć sobie punkt A na wierzchołek, i linią TVI na kieronek osi, wznacząc się na niej części AV , AF każda $= \frac{1}{2}p$; punkt F będzie środkiem; dopiero z wszystkich punktów osi stawiając się prostopadłe nieokreślone MM , i narysowawszy z punktu F jako środka, odległością VP jako promieniem, dwa łuczki przecinające każdą prostopadłą w dwóch punktach M i M' , te punkta należy być do paraboli; ponieważ linia FM , która tym sposobem robi się równa linii VP będzie równa linii MH , zmyśliwszy sobie linią VH prostopadłą osi. Ta linia XVH nazywa się kierowną (directrix).

294. Naostatek można jeszcze wykryć parabolę jednym ciągiem, używszy do tego węgielnicy VH ; to jest do któregośkolwiek punktu f jednego z ramion téj węgielnicy, przywiesznie się jeden koniec nici tak długiej jak jest linia fH ; a drugi koniec przywiązawszy do punktu F , przy pomocy ołówka M przyciska się część nici do ramienia fH , i trzymając nic zawsze wytężoną, drugie ramię węgielnicy suwa się wzdłuż linii ZX ; w takowym ruchu ołówek M wykrył parabolę MA .

295. Zrównanie $yy = px$, znać daie, że względem każdego i iakiegokolwiek punktu M , kwadrat rzędnej MP

MP , równa się mnogości, powstającej z odpowiadającego odcinka, rozmnożonego przez palirzedną.

Z tegoż zrównania pokaznie się, że kwadraty yy rzędnych, są między sobą jak odcinki x , to jest, że $(PM)^2 : (pm)^2 :: AP : Ap$; albowiem $(PM)^2 = p \times AP$, a $(pm)^2 = p \times \forall p$; więc $(PM)^2 : (pm)^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : \forall p$, rozdzieliwszy przez p .

Zrównanie należące do Ellipsy, wyżej wynalezione, jest $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} (ax -$

$xx)$; w którym jeżeli zmyślimy sobie oś a bydź nieskończoną, to trzeba z niego wyrzucić xx , jako ilość niemogącą zmniejszyć ilości ax ; toż rozumie się o ilości $4cc$ względem $4ac$, a w takim razie zrównanie poprzedzające, przemieni się na to, $yy = \frac{4a \times ax}{aa} = \frac{4a^2cx}{aa}$, to jest $yy = 4cx$; takie zaś wyrażenie

nie należy do paraboli; więc parabola nie jest to innego, tylko Ellipsa mająca oś nieskończoną.

296. Jeżeli złączywszy punkta F i H przez linią FH , poprowadzi się na tę linią prostopadłą MOT z punktu M , to takowa prostopadła będzie styczną paraboli.

Jakóż, z innego punktu iakiegokolwiek N téżé linii, poprowadzmy linię NF , NH i NZ prostopadłą

długość na XZ ; żeby takowy inny iakikolwiek punkt N mógł należeć do paraboli, trzeba by aby było $NF = NZ$, lecz linia NZ jest mniejsza od NH , która podług wykryślenia równa się linii NF , więc t. d.

297. Ponieważ podług tegoż poprzedzającego wykryślenia, kąt FMO jest równy kątowi OMH , a ten znowu równy swemu przeciwnemu w wierzchołku FMN , przeto wynika stąd, że kąt FMO jest równy kątowi FMN .

Więc promienie światła wynikające z punktu F , i padające na wklęsłość MAM obiegają się wszystkie w kierunku równoległym osi; i odwrotnie, promienie wpadające w parabolę w kierunku równoległym osi, wszystkie zbiegają się z sobą w szródpale F .

298. Ponieważ linia MH jest równoległa linii VP , przeto trójkąty HOM , TOF są sobie podobne, a nadto równe; bo $HO = OF$; więc $FT = MH = PV = x + c$; a zatem $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; więc podtyczna PT paraboli, jest dwójnasób tak wielka iak odcinek AP .

299. Jeżeli w punkcie M , postawi się prostopadła MI na styczną MT , to trójkąty TPM , PMI podobne

borne sobie, dadzą $TP : PM :: PM :$

PI , to jest $2x : y :: y : PI = \frac{y^2}{2x}$, albo (z przyczyny że $y^2 = px$), $PI = \frac{px}{2x}$

$= \frac{1}{2}p$. Więc międzyległa, jest w paraboli względem wszystkich punktów, zawsze taż sama, i równa połowie palirzędnej.

300. Jawną tedy jest, że mając znany odcinek i rzędną, odpowiadające iakiegomukolwiek punktowi M paraboli, można zawsze bardzo łatwo wynaleść palirzędną. Albowiem zrobiwszy $PT = 2AP$, linia TM będzie styczną (298); a na nię w punkcie M postawiwszy prostopadłą MI , takowa na linii AP przedłużonej, odznaczy (299) część PI , równającą się połowie palirzędnej.

301. Każda linia MX (fig. 38) fig. 38. poprowadzona z punktu M paraboli, równoległa z osią AQ , nazywa się *średnicą*; każda średnica ma swoje *palirzędną*, (która powiedziawszy w powszechności) jest cztery razy tak wielka, iak odległość ME , wzięta od początku średnicy do szródpala. Każda linia mO poprowadzona z punktu m paraboli, równoległa styczney TM , przechodzący przez wierzchołek M czyli przez początek téj średnicy, nazywa się *rzędną* téżże *śred-*

średnicy. Zobaczymy zaraz, iż rzędne należące do iakiękolwiek średnicy, mają też samą własność, co rzędne należące do osi.

Wyciągniemy rzędną PM , należącą do osi, i przez punkta m i O poprowadzmy równoległe ię mp , OQ , naostatek z punktu m poprowadzmy mS równoległą osi. Oznaczmy AP przez x ; PM przez y ; Qp przez g ; AQ przez k . Mieć będziemy naprzód, $Ap = k - g$; a potem trójkąty TPM , mSO , podobne sobie, daia $TP : PM :: mS : SO$, to jest $2x : y :: g : SO = \frac{gy}{2x}$, więc $pm = QS$

$= QO - SO = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$; a że punkt m należy do paraboli, więc według (295) musi być $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap : AP$, to jest, $(y - \frac{gy}{2x})^2 : yy :: k - g : x$, albo $yy - \frac{2gyy}{2x} + \frac{ggyy}{4xx} : yy :: k - g : x$; więc roz-

mnożywszy wyrazy skrajne i średnie, będzie $xyy - gyy + \frac{ggyy}{4x} = kyy - gyy$, co (po rozdzieleniu przez yy , i po wyrzuceniu wyrazów jednakowych z obu części zrównania)

wychodzi na $x + \frac{gg}{4x} = k$, albo $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Teraz oznaczmy sobie odcinek MO przez x' ; a rzędną mO przez y' ; mieć będziemy $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; więc $x' = k - x$; a zatem $\frac{gg}{4x} = x'$; albo $gg = 4xx'$; trójkąt zaś prostokątny mSO , daie $(mS)^2 + (SO)^2$

$= (mO)^2$; to jest, $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$. Poło-

żywszy tedy zamiast gg , wartość onego $4xx'$, i zamiast yy , wartość iego px , po uczynionem zebraniu, będzie $4xx' + px' = y'y'$ albo $(4x + p)x' = y'y'$. Ale jeżeli oznaczmy przez p' palirzędną należącą do średnicy MX , to będzie $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$; więc naostatek będzie $p'x' = y'y'$. Zrównanie tedy należące do iakiękolwiek średnicy, jest toż same, co zrównanie należące do osi. Więc, kwadrat rzędnej mO należący do iakiękolwiek średnicy MX , równa się mnogości, wynikającej z odcinka, rozmnożonego przez palirzędną téżże średnicy; i kwadraty rzędnych, należących do iakiękolwiek średnicy paraboli, mają się między sobą, iak odcinki odpowiadające.

302. Z tego wszystkiego co poprzedziło, wynika, że chcąc wykryślić parabolę, któraby miała za średnicę linią nieokręśloną MX , a liniąadaną p' za palirzędną téżże średnicy, i którey rzędne czyniłyby z średnicą pewny kąt zadany: trzeba przez początek M wyciągnąć linią NMT , czyniącą z linią MX kąt NMX , równy kątowi zadanemu. Potem przez tenże punkt M poprowadzi się linią ME , czyniącą z drugiey strony z linią MT kąt EMT , równy kątowi NMX ; natenczas zrobiwszy $ME = \frac{1}{2}p'$, punkt E , będzie środkiem paraboli (297, 301); a zatem poprowadziwszy przez punkt E linią nieokręśloną TEQ , równoległą średnicy MX , i któraby spotkała się z linią TM w T , takowa, pokaże kierunek osi; wierzchołek zaś A téy osi, wyнайdzie się, postawiwszy prostopadłą MP , i rozdzieliwszy PT na dwie równe części

w punkcie A (298). A tak mając środek i wierzchołek, łatwo będzie wykryć daną parabolę (293, i 294).

303. Trzy linie krzywe, nad którymi dotąd zastanawialiśmy się z kolei, nazwane są *Przecięciami* albo *Przecinkami stożkowemi* (sectiones conicæ), bo powstają z przecięcia stożka. Np. wypadnie Ellipsa fig. 39. $AMmB$ (fig. 39), jeżeli przetnie się stożek CHI przez płaszczyznę AMm , tak, ażeby ta płaszczyzna spotykała się z dwoma bokami CH , CI poniżej wierzchołka C ; trzeba tu tylko wyłączyć jeden przypadek, to jest, kiedyby ta płaszczyzna czyniła z boki CI tenże sam kąt, który czyni drugi bok CH z podstawą; bo z takowego przecięcia powstałoby koło.

Przeciwnym sposobem, jeżeli płaszczyzna przecinająca, nie spotka się z jednym z boków CH , tylko aż dopiero w przedłużeniu onego, to natenczas wypada hiperbola AMm fig. 40. (fig. 40).

Naoftatek, jeżeli płaszczyzna przecinająca, jest równoległa jednemu z boków stożka CH , to przecię-

cie.

cie da parabolę (fig. 41); co tak fig. 41. się dowodzi.

Zmyślmy sobie stożek CHI (fig. 39 i 40), fig. 39: przecięty przez płaszczyznę, któraby przechodziła przez linią prostą, łączącą wierzchołek C i środek koła stożkowego za podstawę; to jest, przez płaszczyznę, przechodzącą przez oś stożka; takowe przecięcie uczyni trójkąt. Przetnijmy teraz stożek przez trzy płaszczyzny AMm , FMG , HmI , prostopadle temu trójkątowi, i z którychby dwie ostatnie były równoległe podstawie stożka: Dwa przecięcia FMG , HmI , będą kołami (Jeom. 199); które spotykać się będą z przecięciem AMm w punktach M i m . Przecięcia FG , HI płaszczyzn tych kół, z trójkątem przechodzącym przez oś, będą średnicami tychże kół. Przecięcia PM , pm tych kół z płaszczyzną AMm , podług (Jeom. 190) będą prostopadle płaszczyźnie trójkąta, przechodzącego przez oś, i będą oraz rzędnymi należącymi do tychże kół, i do przecięcia AMm .

To założywszy, trójkąty APG , ApI podobne sobie, daią $AP : Ap :: PG : pI$; iako też trójkąty BFP , BHp także podobne sobie, daią $PB : pB :: FP : Hp$; rozmnożywszy porządkiem te dwie proporcje, będzie $AP \times PB : Ap \times pB :: FP \times PG : Hp \times pI$; lecz znówu z natury koła, mamy $FP \times PG = (PM)^2$ i $Hp \times pI = (pm)^2$; więc $AP \times PB : Ap \times pB :: (PM)^2 : (pm)^2$; więc kwadraty rzędnych należących do przecięcia AMm , mają się między sobą, iak mnogości z odcinków; że zaś takowe odcinki przypadają z dwóch stron rzędnej w fig. 39, a w fig. 40 fig. 40: przypadają tylko z jednej strony; więc lini-

Tom II.

Aa

ia

fig. 39. ia AMm (fig. 39) jest ellipsa, a linia AMm
fig. 40. w fig. 40 jest hiperbola.

Co się tycze fig. 41, przypuściwszy też
samo zasady co wyżej, z natury koła mieć
będziem $(PM)^2 = FP \times PG$, i $(pm)^2 = Hp$
 $\times pI$, albo (z przyczyny równoległych Pp ,
 FH , i FP , Hp , które dają $FP = Hp$), będzie
 $(pm)^2 = FP \times pI$; więc $(PM)^2 : (pm)^2 ::$
 $FP \times PG : FP \times pI :: PG : pI :: AP : Ap$,
z przyczyny trójkątów APG , ApI , sobie
podobnych; więc kwadraty rzędnych, mają się
między sobą jak odcinki; więc linia krzywa,
jest parabola.

*Uwagi nad Zrównaniami należącemi
do Przecinków stożkowych.*

304. **S**tać, co się dowiodło wyżej
(245), następuje, że jeżeli
w Ellipsie, oznaczmy przez x , od-
fig. 30. cinek CO (fig. 30) wzięty od środ-
ka na średnicy MM' , a przez y rze-
dną mO równoległą średnicy dosta-
wnéy CN , to mieć będziemy $yy =$
 $\frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$, na zrównanie należą-
ce do téj średnicy, niechayby bądź
jakie chce czyniły między sobą kąty,
te średnice dostawne. A jeżeli przez
punkt m , poprowadzi się linia mO'
równoległą linii MM' która w takim
razie będzie rzędną należącą do śred-
nicy NN' to oznaczywszy CO' przez
 x' , a zaś mO' przez y' , mieć będziemy
 y

$y = x'$ i $x = y'$; przez co poprzedza-
jące zrównanie, odmieni się w to,
 $x'x' = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - y'y')$, a z niego wy-
ciąga się $y'y' = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{4}bb - x'x')$. To
jest, że rachuiąc odcinki od środka,
zrównanie należące do iakiéykol-
wiek średnicy, jest zawsze iedna-
kowéy postaci, byłoby rzędne bra-
ły się równoległe średnicy dosta-
wnéy.

Jeżeli b równa się ilości a , to
zrównanie przemienni się w takie, yy
 $= \frac{1}{4}aa - xx$, które należy do koła,
jak widzieliśmy wyżej (221). Ale
trzeba dobrze uważać, że to rozumie
się w tenczas, kiedy rzędne są pro-
stopadłe średnicy. Bo jeżeliby czy-
niły iakikolwiek inny kąt a nie prosty,
to zrównanie $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, nale-
żałoby do ellipsy, uważonéy wzgłę-
dém średnic dostawnych, kiedy są
sobie równe.

Co się tycze hiperboli, jeżeli oznaczy-
my przez x , odcinek CO (fig. 33) wzięty
od środka średnicy MM' kończący się na
krzywości téjże hiperboli, a przez y , rzędną
 mO' równoległą średnicy dostawnéy NN' ,
mieć będziemy (273), $yy = \frac{bb}{aa} \times (xx - \frac{1}{4}aa)$

na zrównanie należące do téj średnicy, niechby był kąt iaki chce, który czynią między sobą dwie średnice dostawne. Ale, jeżeli poprowadziwszy przez punkt m' linią $m'O'$ równoległą średnicy CM , oznaczmy linią $lm'O'$ przez y' , która w tym razie jest rzędną należącą do średnicy NN' a odcinek CO' jeżeli oznaczmy przez x' , mieć będziemy $x' = y$ i $y' = x$; przez co poprzedzające zrównanie odmienni się w to,

$$x'x' = \frac{bb}{aa} (y'y' + \frac{1}{4}aa), \text{ skąd wyciąga się } y'y' = \frac{aa}{bb} (x'x' + \frac{1}{4}bb), \text{ i pokazuje się, że zrówna-}$$

nie należące do średnicy dostawnej NN' nie jest podobne tamtemu, które wynalezliśmy względem średnicy MM' kończący się na hiperboli.

Co zaś do paraboli, widzieliśmy wyżey (301), że biorąc odcinki na iakiękolwiek średnicy, od ięj początku, a rzędne, równoległe styczney, przystawioney do wierszchołku téjże średnicy, zrównanie zawsze wypada $yy = px$, oznaczywszy rzędną przez y , odcinek przez x , a palirzēdną téj średnicy przez p .

Naostatek, co do hiperboli uważonęj względem swoich końcotycznych, rachując odcinki od środka, na iednę z końcotycznych, a rzędne biorąc równoległe drugiey końcotycznę, oznaczywszy pierwsze przez x , drugie przez y , a stopień hiperboli uważonęj między końcotycznymi przez aa , będzie $xy = aa$.

305. Ale tu należy dobrze uważać, iż ażeby te zrównania należały do

do tych linii, do których ie dopięro przystósowaliśmy, jest rzeczą istotną, aby iedna z niewiadomych *np.* y , rachowała się od téjże linii, na której rachuje się druga niewiadoma x ; albowiem można mieć zrównanie pod iedną z postaciów wyżey naznaczonych, które iednakże niebędzie stósowne do średnic dostawnych; jeżeli to zrównanie jest należące do Ellipsy albo do hiperboli; albo téż, które jeżeliby należało do paraboli, niebędzie wyrażać stósunku między odcinkami, i między temi liniami które dotąd nazywaliśmy *rzędnymi*. *Np.* jeżeli $CM'CN$ (fig. 42), fig. 42. są dwie średnice dostawne Ellipsy, względem których mamy to zrównanie, $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$, gdzie rozumie się $CM' = \frac{1}{2}a$; $CN = \frac{1}{2}b$; $CQ = x$; a $QM = y$; i jeżeli przez środek C poprowadzi się linia prosta nieokreślona FCE , któraby spotykała się z rzędnymi QM w punkcie E ; tudzież jeżeli oznaczmy linię CE przez z , a naostatek jeżeli przez punkt B obrany w odległości wiadomęj

Aa3

BC

$BC=m$, poprowadzi się linia BF równoległa linii QM , to natenczas oznaczywszy CF przez n , trójkąty CBF , CQE podobne sobie, dadzą $m:n::x:z$, więc $x=\frac{mz}{n}$; tę wartość głoski x , położywszy w równaniu wyżej wynalezioném, będzie $yy=\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa-\frac{mmzz}{m})$, albo $aanny=\frac{1}{4}aabbnn-bbmmzz$, albo (rozdzielwszy drugą część przez $bbmm$, a o-różwikazawszy rozinnozenie przez $bbmm$), będzie $aanny=bbmm(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm}-zz)$; albo naostatek $yy=\frac{bbmm}{aann}(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm}-zz)$; równanie wprowadzie téż postaci, ale którego bez błędu, oczywiście niemożna poczytać za należące do średnic dostawnych; ponieważ odcinki z rachują się na linii CE , a rzędne y albo QM , rachują się od punktu Q , w którym linia EM równoległa linii CN , spotyka się z linią CM .

306. Stąd tedy wnosi się w powszechności, że mając równanie drugiego stopnia, z dwiema niewiadomymi x i y , jeżeli jedna z niewiadomych rachuje się od téj li-

iii, na której mierzy się druga; to takowe zrównanie należyć będzie do Ellipsy, uważonéy względem swoich średnic dostawnych; albo téż należyć będzie do koła, kiedy nie-zawierając w sobie innych stopniów głosek x i y iak tylko kwadraty, kiedy mówię te dwa kwadraty, znaydować się będą w obu częściach zrównania, ale poprzedzone znakami przeciwnemi, i kiedy oraz ilość cała wiadoma, znaydująca się w téż części co kwadrat poprzedzony znakiem $-$, sama mieć będzie znak $+$; i tak gdybyśmy mieli np. $yy=\frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa-xx)$; to zrównanie, niewyrażałoby wcale żadnéj linii; bo z niego wyciąga się $y=\pm\sqrt{[\frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa-xx)]}$, ilość zmyślona, i nic nieznaczająca.

307. 2re Jeżeli dwa kwadraty yy i xx , położone w różnych częściach zrównania, są poprzedzone iednakowym znakiem, i jeżeli niebędzie innych stopniów głosek x i y , iak te kwadraty, to zrównanie zawsze należyć będzie do hiperboli, uważonéy względem średnicy opierającej się na téż hiperboli, albo téż względem średnicy dostawnéj do téj pierwśzey średnicy, a to podług tego, jeżeli wyraż wiadomy, mieć będzie znak przeciwny temu, iaki mają kwadraty xx i yy , albo téż taki, iaki mają te pomienione kwadraty.

308. 3cie Jeżeli zrównanie, niezawiera w sobie tylko ieden z kwadratów, a dwa wyrazy, z których drugi byłby mnogością wynikającą z rozmnożenia drugiey niewiadomey przez ilość wiadomą, to takowe zrównanie należyć będzie do paraboli, uważo-

nę względem iednę z średnic tēże paraboli, a to ieżeli pomienione dwa wyrazy, położone w różnych częściach zrównania, są poprzdzone jednakowym znakiem; ale gdyby te wyrazy miały różne znaki, to zrównanie niewyrażałoby wcale żednę linię.

309. 4te Naostatek ieżeli zrównanie miałoby tylko dwa wyrazy, z których ieden byłby mnogością z dwóch niewiadomych x i y , a drugi byłby ilością cale wiadomą, to takowe zrównanie wyrażałoby hiperbolę, uważoną względem iey końcocy.

310. Takie tedy są zrównania należące do Przecinków stożkowych, uważone względem różnych linii do których ie przyśtośowa-
liśmy. Wkrótce zobaczymy onych użycie, ale nie bez pożytku będzie przodem powiedzieć, że ile razy nadarzy się zrównanie z dwiema niewiadomymi x i y , mające warunki wyżey wymienione, to zawsze łatwo będzie wykryć przecinek stożkowy, do którego należy takowe zrównanie, a to postępując sobie iak w następującym przykładzie.

Daymy tedy że mamy to zrównanie,
 $ncd - qyy = gxx$; napisalbym go tak: $qyy = ncd - gxx$; w którym rozdzieliwszy drugą część przez g , i oraz wskazawszy rozmno-
żenie przez toż g , miałbym, $qyy = g(\frac{ncd}{g} - xx)$,

a naostatek, $yy = \frac{q}{g}(\frac{ncd}{g} - xx)$; lecz pod tą postacią widzę podług (243 i 245), że to zrównanie należy do Ellipsy, w której stośunkiem między kwadratami dwóch średnic dostawnych, iest $\frac{g}{q}$; i w której kwa-

dra

dratēm tēy średnicy. na której rachuią się odcinki x , iest ilość $\frac{4ncd}{g}$. Jakóż, przyrównawszy to zrównanie, do zrównania $yy = \frac{bb}{aa}$

$(\frac{1}{4}aa - xx)$; będzie $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, i $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$.

Z tych dwóch zrównań, wyciąga się $a =$

$\sqrt{(\frac{4ncd}{g})}$, i $b = \sqrt{(\frac{4ncd}{q})}$, ilości, dające wy-

miary dwóch średnic dostawnych. Co się tycze kąta, iaki czynią między sobą te dwie średnice dostawne, takowy nieiest inny, tylko tén, który czynią między sobą linie x i y , i iest zawsze kąt wiadomy z samego zagadnienia, z którego wyniknęło zrównanie $ncd - qyy = gxx$. Widzieliśmy zaś wyżey (252), iak się kryśli Ellipsa, mając te trzy rzeczy znaioime.

Tymże samym sposobem postąpićby sobie potrzeba z zrównaniami należącymi do innych przecinków, kiedy będą stośowne z tamtymi, które wyłożyliśmy wyżey. Okażemy to zaraz, iako w powszechności, każde zrównanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi, albo zawsze wyraża iaki przecinek stożkowy, albo też wcale żadnę linię niewyraża; o czém można przekonać się, zobaczysz, że każde takowe zrównanie, może zawsze

* Trzeba tylko wytęczyć ieden przypadek, to iest kiedyby zrównanie składało się z dwóch czynników drugiego stopnia, np. takich, $ax + by + c$, i $dx + fy + g$; ale też w takim razie zrównanie niemoże się nazwać rzetelnie, byż drugiego stopnia; a iako tén przypadek nie iest nam przydatny, przeto też nad nim bawić się nie będziemy.

wfszebydź naprowadzone, i odmiénioné wi-
dno z tych zrównań, które wynależliśmy wy-
żéy. Podamy zaraz do tego sposób, ale ażé-
byśmy tém lepiej objaśnili i użycie iego, i
wykryślenia stąd następujące, nie od rzeczy
będzie, zařtanowić się wprzód nad uwagami
następującemi.

311. Ponieważ każde zagadnie-
nie co może bydź rozwiązane przez
Algebrę, prowadzi zawsze do iedne-
go albo do więcej zrównań, prze-
to każde zrównanie z dwiema nie-
wiadomými u i t , może zawsze bydź
uważane, iako pochodzące z zaga-
dnieńia, w któremby te dwie ilości
 u i t , wyrażały dwie niewiadome.
Takowe zagadnienie, niechay bę-
dzie iakie chce, to jednakże zrów-
nanie zawsze uważać można, iako-
by wyrażało naturę linii krzy-
wéy; i to daie się łatwo poymować.
Albowiém, naznaczywşy podług
upodobania i następnie, iednéy z
niewiadomych np. ilości u różne
wartości, a przy pomocy zrówna-
nia i reguł Algebraicznych, za ka-
żdym razem wyrachówawşy wár-
tości ilości t , odpowiadające pier-
wszym ilościóm, iawna iest, że nie-
maż nic takiego, coby niepozwała-
ło

to wznaczyć na linii nieokreślónéy
 AR (fig. 42 43 44) wartości AP , fig. 42.
 AP , i. t. d. równoległe między sobą, 43. 44.
a czyniące kąt pewny, i zrobić ie
równými wartościami odpowiadają-
cym wynalezionym na ilości t ; ob-
wód zrobiony z punktów M, M , i.
t. d. tym sposobém wynalezionych,
złoży linią krzywą, któręy natura
zależyć będzie od stósunku między
liniiami AP i PM ; a że takowy stó-
sunek iest wyrażony w zrównaniu,
z którego wyciągnęły się te linie,
więc to zrównanie wyraża naturę
samęże linii krzywéy.

To założywşy, daymy że linia krzy-
wa iest przecinkiem stóżkowym; iawna iest,
że ponieważ w zagadnieńiu z którego wy-
niknęło to zrównanie, niebyło wiadomo,
albo przynaymniéy mogło bydź wcale nie-
wiadomo, ieżeli takie użycie takiego zrów-
nania, miało dać przecinek stóżkowy, prze-
to téż nieszukało się takiego układu linii AP
i PM , ażeby iedna z nich miała swóy kie-
rónék na śrzednicy, a druga była równoległa
stycznéy, poprowadzonéy przez wiérşcho-
łek téżé śrzednicy, czego by iednak potrze-
ba, chcąc ażeby zrównanie miało postać ie-
dnę z wyżéy położonych. A stąd pokazu-
ie się, iakim sposobém zrównanie, chociaż
niebędące iednéy z przerzeczonych posta-
ciów, iednakże należyć może do którego
przecinka stóżkowego.

312. Zobaczmy teraz, iak możemy każde równanie z dwiema niewiadomymi, przyprowadzić do jednej z postaciów, które widzieliśmy że należą do przecinków stożkowych, uważanych względem linii do których je stosowaliśmy (304)

314. Spół sposób który do tego podać mamy, wyciąga aby umiść wprzód wyrugować drugi wyraz z równania drugiego stopnia z jedną niewiadomą. W czém niema żadney trudności; bo nietrzeba tylko zrównać niewiadomą, pomnożoną (albo zmniejszoną, jeżeli drugi wyraz ma znak —) o połowę spółczynnika czyli mnożnika ilości x położonéy w drugim wyrazie, zrównać ją mówię z nową niewiadomą, oswobodziwszy wprzód kwadrat niewiadoméy.

Np. Zeby wyrugować drugi wyraz z tego równania, $4x^2 + 12x = 9$; dzielę przez 4 i mam $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; robię $x + \frac{3}{2} = z$; skąd po skwadrówaniu mieć będę, $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$; a zatem $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; położymy tę wartość w równaniu $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, będzie $zz - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, albo $zz = \frac{18}{4}$; równanie w którym już drugiego wyrazu niema.

Gdybym miał $x^2 - 4x = 7$; zrobiłbym $x - 2 = z$; i miałbym po skwadrówaniu,

$-4x + 4 = zz$, albo $x^2 - 4x = zz - 4$; a położymy tę wartość w poprzedzającym równaniu, będzie $zz - 4 = 7$, albo $zz = 11$; równanie bez drugiego wyrazu.

314. Można także kiedy się spodoba, zrównać niewiadomą pomnożoną o połowę spółczynnika drugiego wyrazu, nie z samą niewiadomą, ale z niewiadomą rozmnożoną albo rozdzieloną przez iakąkolwiek ilość; i ta uwaga będzie nam wkrótce użyteczna.

Np. W równaniu $x^2 - 4x = 7$, zamiast co bym miał zrobić $x - 2 = z$, iak było wyżej, mogę zrobić $x - 2 = \frac{k}{n} z$, skąd po tychże działaniach co pierwéy, wypadnie mi, $x^2 - 4x + 4 = \frac{kk}{nn} zz$, a zatem będzie, $x^2 - 4x = \frac{kk}{nn} zz - 4$; położymy zaś tę wartość w poprzedzającym równaniu, wnosz się $\frac{kk}{nn} zz - 4 = 7$; to jest $\frac{kk}{nn} zz = 11$. W takim razie, wartość ilości x zawsze wypadac będzie jednakowa, bądź iakie chce naznaczyćby się wartości ilościom k i n . Jakóż to równanie, daie $\frac{k}{n} z = \sqrt{11}$, a ponieważ $x - 2 = \frac{k}{n} z$, więc będzie $x - z = \sqrt{11}$, wartość właśnie taż sama, iaka wypadła z pierwszego działania. Słowem, tym sposobem nieodmienna się nic w rzeczy szukanej, ale przez takowe wprowadzenie ilości upo-

dobanę, gotuje się sposobność do wypełnienia różnych zamyśłów, którym niemożnaby czasem zadość uczynić, chyba sposobem dłuższym i mnię prostym, postąpiwszy sobie inaczej.

Sposoby naprowadzenia do Przecinków stożkowych, każdego zrównania drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi, byleby takowe zrównanie wyrażało rzecz podobną.

315. Niechay będzie zrównanie, $dt + cut + euu + fdt + geu + hd^2 = 0$, w którym zawierają się wszystkie zrównania drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi u i t , i gdzie żadnego wyrazu niebrakuie. Zmyśliwszy sobie, że to zrównanie należy do linii krzywéy MM (fig. 42. i 43), w którejby linii AP i PM były *spółrzednemi*; zobaczmy iak się można upewnić, że ta linia krzywa, iest zawsze iednym z przecinków stożkowych, i naznaczmy iakim właśnie iest pzzecinkiem.

Kiedy niebrakuie żadnego z dwóch kwadratów t^2 i u^2 , trzeba z tego zrównania wyrugować koléjno drugi wyraz tak względem t iako téż względem u , w następujący sposób.

Zam.

Zamknawszy między dwoma nawiasami to wszystko, co mnoży pierwszy stopień ilości t , oswobadzam tt , i mam $tt + (f + \frac{cu}{d})t$

$+ \frac{euu}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0$ (A). Robie tedy podobny (313), $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; skąd po skwadrówaniu, mieć będę $tt + (f + \frac{cu}{d})t + \frac{fcu}{2d}$

$\frac{euu}{4dd} = yy$; a zatem, $tt + (f + \frac{cu}{d})t = yy - \frac{fcu}{2d} - \frac{euu}{4dd}$.

Położywszy tę wartość w zrównaniu (A), i przestawiwszy, żeby yy zostało się samo w iedney części, mieć będę $yy = \frac{1}{2}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{euu}{4dd} - \frac{euu}{d} - \frac{geu}{d} - hd$; albo rozmnożywszy wszystko przez $4dd$, a potem pobierawszy wyrazy rozmnożone przez iednakowe stopnie ilości u , będzie $4ddy = ffd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)uu$.

Ponieważ ilości d, c, e, f , i. t. d. wyrażają ilości wiadome, więc dla skrócenia rachunku, można sobie oznaczyć $ffd - 4hd^3$, tylko przez samę iedną głoskę r , ilość $2cfd - 4ged$ przez q , a $cc - 4de$ przez m , przez co poprzedzające zrównanie odmieni się w następujące, $4ddy = r + qu + mu^2$, gdzie ilości m, q, r , mogą być zarówno albo twierdzące albo przeczące.

Wyrugujemy teraz drugi wyraz względem u ; zaczynając naprzód od oswobodzenia kwadratu uu ; co nam da $u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} =$

4dd

$\frac{4dd}{m} yy \cdot (B)$. Ale zamiast zrównania prosto
ilości $u + \frac{q}{2m}$ z nową niewiadomą x , podług
reguły (313), zrobmy raczej $u + \frac{q}{2m} =$
 $\frac{qx}{2mn}$ (314); to jest zrównamy ją z nową
niewiadomą x , rozmnożoną przez połowę
spółczynnika drugiego wyrazu, i rozdzieloną
przez ilość upodobaną u , teraz niewiado-
mą, ale której wartość wkrótce znaydzie-
my *

Mamy tedy $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; a skwadro-
wawszy wypadnie $uu + \frac{qu}{m} + \frac{qq}{4mm} = \frac{qqxx}{4mnn}$
albo $uu + \frac{qu}{m} = \frac{qqxx}{4mnn} - \frac{qq}{4mm}$. Położywszy
tę wartość w zrównaniu (B), mieć będziemy
 $\frac{qqxx}{4mnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m} yy$; zrównanie na-
leżące do Ellipsy albo do hiperboli, jeżeli
żadna z ilościów d, m, q, r i. t. d. nie jest ze-
rém; wyjąwszy tylko ten przypadek, w któ-
rym jak zobaczymy niżej, zrównanie nie-
wyrażałoby wcale żadnej linii. Za-

* Ta ilość n jest tu wprowadzona dla
tego, aby dane zrównanie można było pro-
sto naprowadzić do zrównania uważanego
względem średnic dostawnych. Gdyby po-
mieniona ilość zrównała się prosto z ilością x ,
to zrównanie ostateczne byłoby wprowadzić po-
staci odpowiadający Ellipsie albo hiperboli, ale
należałoby do przypadków nad którym za-
nowilimy się wyżej (305).

Zastanówmy się teraz nad tém
w iakich przypadkach, liniia krzywa
jest Ellipsą, w iakich hiperbolą, a
naostatek w iakich, wcale niema ża-
dnej linii krzywéy.

Tym umyślem oswobodziwszy yy ,
mieć będziemy, $yy = \frac{qqxx}{16mnndd} - \frac{qq}{16mdd} + \frac{r}{4dd}$
albo rozdzieliwszy drugą część zrów-
nania przez współczynnika kwadra-
tu xx , a oraz wskazawszy rozmno-
żenie przez tegoż współczynnika, bę-
dzie $yy = \frac{qq}{16mnndd} (xx - nn + \frac{4mrrm}{qq})$;
zrównanie, w którym ponieważ ilo-
ści $q, n, i d$, są położone w kwa-
dracie, więc znaki w niem niemożę
się odmienić, tylko w ten czas kie-
dyby m albo r , zamiast byż ilości-
mi twierdzącemi, były przeczącemi;
że zaś odmiana znaku przed ilością
 r , niepociąga za sobą żadnej od-
miany w kwadratach yy i xx , więc
liniia krzywa nieodmiénia się przez
odmianę znaku położonego przed
ilością r . Co się znowu tycze ilo-
ści m , jeżeli takowa będzie przeczą-
ca, to natenczas zrównanie odmié-
ni się w to, $yy = \frac{qq}{16mnndd} \times (xx -$

Tom II.
Bb
nn

$nn - \frac{4mrnn}{qq}$), albo odmiéniwszy zna-
ki górą i dolém, będzie $yy = \frac{qq}{16mndd}$

$X(nn \pm \frac{4mrnn}{qq} - xx)$. A stąd poka-
zuie się, podług (306 i 307), że kie-
dy m będzie ilością twierdzącą, to
linia krzywa będzie hiperbolą; a
przeciwnie będzie Ellipsą, kiedy m
będzie ilością przeczącą; lecz przez
 m wyraziliśmy wyżej ilość $cc - 4de$,
w której cc będąc położone w kwa-
dracie, jest zawsze ilością twier-
dzącą, więc m albo $cc - 4de$, nie-
może stać się ilością przeczącą,
tylko w takim razie, kiedyby $4de$
przewyższało kwadrat cc ; ilości d i e
niechayby były czyto obie twier-
dzące, czy też obie przeczące.

316. Więc ażeby wiedzieć w
jakich przypadkach, zrównanie dru-
giego stopnia z dwiema niewiadomé-
mi u i t , np. takie iak to, $dt^2 + cut$
 $+ eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$, należy
do Ellipsy a w iakich do hiperboli, nie-
trzeba więc tylko uważać, jeżeli kwa-
drat cc spółczynnika wyrazu ut , zmniéy-
szony mnogością de , cztery razy powtó-
rzoną, wynikającą z spółczynników
kwa-

kwadratów t^2 i u^2 , czyni ilość twier-
dzącą albo przeczącą: w pierwszym
przypadku linia krzywa będzie hi-
perbolą, a w drugim będzie Ellipsą.
Od téj reguły trzeba wyłączyć tyl-
ko ieden przypadek, to jest kiedyby r
będąc ilością przeczącą, było większe
nad $\frac{qq}{4m}$, co do Ellipsy; bo natenczas

ilość $nn \pm \frac{4mrnn}{qq}$ przemieniająca się na
 $nn - \frac{4mrnn}{qq}$, albo na $nn (1 - \frac{4mr}{qq})$,

staie się przeczącą, jeżeli $\frac{4mr}{qq}$ jest wię-
ksze od 1, albo co iedno wychodzi,
jeżeli $4mr$ jest większe nad qq , albo
naostatek jeżeli r , jest większe nad
 $\frac{qq}{4m}$, przez co wartość głoski y a za-
tém i linia krzywa, staie się tylko
zmyśloną.

Pozostaie nam ieszcze okazać,
iakby można wykryść Ellipsę i Hi-
perbole, które dopiero rozeznaliśmy.
Zastanówmy się nad Ellipsą.

317. Z dwóch równań $t \pm \frac{1}{2}f \pm \frac{cu}{2d} =$

g i $u \pm \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, których użyliśmy do wy-
rugowania drugich wyrazów, drugie zró-
wna-

wnanie, mocą teraznijszego przypuszczenia, że m jest ilością przeczącą, odmiienia się na $u - \frac{q}{2m} = -\frac{qx}{2mn}$; ale że ilość n była obrana podług upodobania, więc można zarówno rozumieć ją twierdzącą albo przeczącą; rozumiejąc ją przeczącą, będzie $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; wykryśliśmy tedy te dwa zrównania, żeby mieć położenie średnic dostawnych.

Pierwsze, to jest $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, pokazuje, iż ażeby mieć y , trzeba pomnożyć ilość t , o $\frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$; a zatem poprowadziwszy przez punkt A iako przez początek współrzędnych u i t (fig. 42) linią $AB = \frac{1}{2}f$, równoległą liniom PM albo t , przez punkt B poprowadzi się znowu linią BKl równoległą linii AR , na której rachują się odcinki n ; a potem wytknąwszy do woli linią BK , poprowadzi się linią KL , równoległą linii AB , i taka ażeby było $KL : BK :: \frac{1}{2}c : d$; natenczas jeżeli przez punkt B i L poprowadzi się linią nieokręsloną BLQ , to linie QM , rachowane od punktu Q gdzie ta linia przecina linię PM , będą wartościami główki y . Jakóż mamy $QM = PM + PQ = PM + Pl + IQ = t + \frac{1}{2}f + IQ$; trójkąty zaś BKL , i BIQ podobne sobie, dają $BK : KL :: BI$ albo $AP : IQ$; to jest $d : \frac{1}{2}c :: u : IQ = \frac{cu}{2d}$, więc $QM = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Ponieważ ilości y rachują się od linii LQ , więc idzie za tem (305), iż ażeby zrównanie należące do Ellipsy wyżey wynalezione, ściągalo się do

średnic dostawnych, to trzeba ażeby ilości x rachowały się na linii BLQ , i żeby punkt skąd się rachują, był środkiem; tak że linia QLB jest kierónkiem iednéy z średnic. Zobaczymy teraz iak wynaydziemy szrodek.

Drugie zrównanie $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, daje znać, że jeżeli na linii AP oznaczony przez u , weźmie się $AG = \frac{q}{2m}$, to ilość GP , która warta $AP - AG$, warta będzie $u - \frac{q}{2m}$; a

zatem także warta będzie $\frac{qx}{2mn}$; będzie tedy

$GP = \frac{qx}{2mn}$; lecz jeżeli przez punkt G poprowadzi się linia NGC , równoległa liniom PM , punkt C w którym takowa linia NGC spotka się z linią LQ , będzie początkiem ilości x , a zatem będzie środkiem. Jakóż widzieliśmy że ilości x powinny być rachowane na linii LQ ; lecz kiedy GP jest zerem, wartość iego $\frac{qx}{2mn}$ powinna być tak-

że zerem, więc i x powinno natenczas także być zerem, co niemoże przytrafić się tylko w takim razie, kiedy ilości x poczynają się w punkcie C ; a zatem kiedy linie QM , są rzędnemi y , to linie CQ muszą być odcinkami x . A stąd łatwo będzie mieć możliwą wartość główki n ; albowiem mamy $GP = \frac{qx}{2mn}$, albo (położywszy zamiast x wartość iego CQ , a zamiast $\frac{q}{2m}$ wartość iego

AG), będzie $GP = \frac{AG \times CQ}{n}$; więc $n =$

Bb 2

AG

$\frac{AG \times CQ}{GP}$; będzie tedy $n = BC$; to jest iż ażeby zrównanie należące do Ellipsy, wyżey wynalezione, stósowało się do średnic dostawnych, którychby kierónki były QB i CN , trzeba położyć zamiast n wartość linii BC , wynalezionę przez poprzedzające wykrylenie.

Niezoftaie nam już tedy więcej do wykrylenia téy Ellipsy, tylko naznaczyć wielkość średnic dostawnych; bo kąt BCN iaki czynią między sobą, już jest znaiomy z poprzedzających działań. Tę zaś wielkość średnic można mieć bardzo łatwo, poślapiwszy sobie tymże sposobem co wyżej (310); to jest nie trzeba więcej, tylko przy-

stósować zrównanie $yy = \frac{qq}{16mddn} (nn + \frac{4mnnr}{qq} - xx)$ do zrównania $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$. To przystósowanie da nam $\frac{bb}{aa} = \frac{qq}{16mddn}$; i $\frac{1}{4}aa = nn + \frac{4mnnr}{qq}$; więc $a =$

$\sqrt{4nn + \frac{16mnnr}{qq}}$; $a b = \sqrt{(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd})}$; a ponieważ n, m, q, r, d są ilości wszystkie znaiome, więc także będą wiadome i wartości średnic dostawnych a i b , przy pomocy których iako téż znaiomego kąta BCN , iaki między sobą czynić powinny, nakryśli się Ellipsa sposobem wyżej przepisany (252).

318. Uważmy, że kiedy wartości glofek a i b , są sobie równe, i kąt BCN prosty, to natenczas linia krzywa jest kołem. Zeby zas naznaczyć w jakim to przypadku zdarza się, nie trzeba więcej tylko xód w na-

szém zrównaniu należącym do Ellipsy, ro-

zumieć $\frac{qq}{16mddn} = 1$, to jest że $qq = 16mddn$, skąd wyciąga się $n = \frac{qq}{16mdd}$.

2re Jeżeli kąt BCD jest prosty, to będzie $(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2 = (AG)^2$; lecz $BC = n$; a troykaty sobie podobne BCD , BLK dają, $BK : KL :: BD$ albo $AG : CD$;

to jest, $d : \frac{1}{2}c :: \frac{q}{2m} : CD$, skąd wyciąga się $CD =$

$\frac{qc}{4md}$; więc $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mdd} = \frac{qq}{4mm}$, albo $m + cc = 4dd$; ale że m jest ilością przeczącą, przeto wypada $cc = 4de = m$, albo $m = 4de - cc$; więc musi być $4de = 4dd$, albo $d = e$.

319. A stąd pokazuje się, iż chcąc wiedzieć jeżeli linia krzywa jest kołem, Ellipsą, albo Hiperbolą, nie trzeba mieć względu na ostatnie trzy wyrazy $fdt, geu, i hd^2$ zrównania $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$; bo to zawisło iedynie od trzech pierwszych wyrazów, tak że jeżeli $d, c, i e$ są takie, że ilość $cc = 4de$, wypada twierdzącą, to linia krzywa będzie hiperbolą; jeżeli zaś ilość $cc = 4de$ wypada przeczącą, to linia krzywa będzie Ellipsą, wyjąwszy tylko ten przypadek, kiedyby było $d = e$, to jest kiedyby dwa kwadraty u^2 i t^2 miały iednakowego współczynnika; a

Bb 4

w

w takim razie linia krzywa będzie kołem, jeżeli nadto kąt BCD wy-
nikaący z poprzedzającego wykry-
slenia, jest prosty.

320. To wszystko co się dotąd
mówiło, wyjąwszy tylko to co było
pod l. (318), służy oraz do hiper-
boli, to jest, do równania $yy =$
 $\frac{qq}{16mddnn} (xx - nn \pm \frac{4mrnn}{qq})$, oprócz
znaków. A zatem przeczytawszy so-
bie co poprzedziło, i przystosowa-
wszy to do figury 43, nie trzeba bę-
dzie żadnej innej odmiany zrobić,
tylko przenieść AG , na przeciwną
stronę linii AP , iak wskazuje zrów-
nanie $u \pm \frac{q}{2m} \pm \frac{qx}{2mn}$, wyżej wyna-
lezione (317). Wreszcie wszystko
jest iedno, przemieniwszy tylko slo-
wo *Ellipsa* na słowo *Hiperbola*.

W różnych szczególnych przypadkach,
trafić się może, że ilości AG, BK, AB, KL
(fig. 42 i 43), zdadzą się być rozporządzone
wcale przeciwnym sposobem, iak się tu znay-
dują; ale takowe odmiany zawsze bywają
wskazane, znakami poprzedzającemi ilości d ,

c, f, m, q i. t. d. w równaniach $t \pm \frac{1}{2}f \pm \frac{cu}{2d} =$
 $y, i u \pm \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, które wypadają po wy-
rugowaniu drugich wyrazów.

321. Jeszcze nad dwóma przy-
padkami zastanowić się mamy, to
jest 1^o d Nad tym, kiedyby było cc
 $- 4de = 0$; 2^o kiedyby było razem
 $d = 0$ i $e = 0$.

W pierwszym przypadku, to
jest kiedy będzie $cc - 4de = 0$, albo
 $cc = 4de$, linia krzywa jest parabolą.
Ponieważ w takim razie ilość m ró-
wna się zerowi, przeto poprzedza-
jące wykryślenie nie jest tu potrze-
bne, albowiem po wyrugowaniu dru-
giego wyrazu względem t , wyrazu
 u^2 już w równaniu nieznayduie się.
Ten przypadek można łatwo roze-
znać, uważając jeżeli w równaniu
wypada $cc = 4de$, to jest jeżeli trzy
wyrazy t^2, ut i u^2 czynią kwadrat;
bo kiedy jest $cc = 4de$, to stąd wy-
ciaga się $c = 2\sqrt{de}$, przez co trzy
pierwsze wyrazy równania, prze-
mienią się na $dt^2 \pm 2ut\sqrt{de} \pm eu^2$,
to jest na ilość, która jest kwadratem
powstającym z pierwiastka $t\sqrt{d} \pm$
 $u\sqrt{e}$.

W tym przypadku, trzeba iak
pierwéy, wyrugować drugi wyraz
względem t , przez co równanie
(postąpiwszy sobie z niem słowo w
sło-

flowo tak iak było wyżéy), przemieni się na $4ddyy = r + qu$; a natenczas, żeby temu równaniu dać postać taką iak jest $yy = px$, to jest taką iaką ma równanie należące do paraboli, przystósowane do średnicy, któryby rzędne były równoległe styczney, przytykaiący do wierzchołka téżże średnicy, żeby mówić daćmu taką postać, trzeba oswobodzić yy , skąd wypadnie $yy = \frac{r+qu}{4dd}$; dopiero ta druga część, robi się równa nowéy niewiadoméy x , rozmnożonéy przez ilość n , której wartość znajduie się iak zobaczymy niżej; to jest że trzeba zrobić $\frac{r+qu}{4dd} = nx$, a zatem będzie także $yy = nx$. Niezostanie tedy potém więcéy, tylko wykryślić równanie $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, które służyło do wyrugowania drugiego wyrazu względem t , i równanie $\frac{r+qu}{4dd} = nx$, które służyło do drugiéy przemiany. Piérwsze z tych dwóch równań, ponieważ właśnie jest toż samo, co go już wyżéy wykryśliśmy (317), przeto i

tu wykryśli się tymże samym sposobém; a zatem nie trzeba więcéy, tylko przystósować do fig. 44, to wszystko co się powiedziało tamże (317) względem fig. 42 o wykryśleniu ilości $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, gdzie przez y są oznaczone linie QM (fig. 44), a linia BLQ pokazuje kieronek średnicy, na którój powinny rachować się x .

Żeby naznaczyć początek odcinków x , zatem i wierzchołek téy średnicy, trzeba do tego użyć równania $\frac{r+qu}{4dd} = nx$, które dając $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$, pokazuje, że jeżeli wezmie się z przeciwnéy strony linii AP , ilość $AG = \frac{r}{q}$ będzie $GP = \frac{4ddnx}{q}$; bo $GP = AP + AG = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$; więc jeżeli przez punkt G , poprowadzi się linia GCD równoległa liniom PM , która by spotykała się z linią QLB w punkcie C , to punkt C , będzie początkiem odcinków x ; albowiem równanie $GP = \frac{4ddnx}{q}$, znać daie, że kiedy GP jest zerém, to i x powinno być zerém, i że nadto ponieważ odcinki x powinny rachować się na téy linii, od której poczynają się rzędne y , więc powinny rachować się na linii BQ . Już tedy nieidzie więcéy tylko o naznaczenie palirzędnej n . Lecz widzieliśmy do-

dopiero że $GP = \frac{4ddnx}{q}$; a równoległe CD ,
 QI daią $BC:BD$ albo $AG::CQ:DI$ al-
 bo GP , to jest $BC:\frac{r}{q}::x:\frac{4ddnx}{q}$; więc

$BC = \frac{r}{4ddn}$; więc $n = \frac{r}{4BC \times dd}$; że zaś ilo-
 ści r i d są wiadome w równaniu, a linia
 BC jest wynaleziona przez wykryślenie;
 więc także jest wiadoma i ilość n oznacz-
 ająca paraboliczną; nadto, toż samo wykryślenie
 naznacza oraz kąt, jaki czynią między sobą
 spółrzedne CQ i QM albo x i y ; a zatem
 łatwo będzie wykryślić sobie parabolę, po-
 dług tego iak wyżej przepisało się (302).

322. Ponieważ równanie po-
 wszechne należy do paraboli, kiedy
 będzie $cc = 4de$, przeto idzie zatem,
 że kiedy niebędzie w równaniu
 mnogości ut wynikający z dwóch
 niewiadomych, to w takim razie
 ażeby to równanie należało do pa-
 raboli, trzeba ażeby wniem niedosta-
 wało także iednego z dwóch kwa-
 dratów t^2 albo u^2 ; bo natenczas c
 będąc zerem, równanie $cc = 4de$,
 albo $0 = 4de$, znać daie, że musi być
 albo d albo $e = 0$.

323. Jeżeli oba kwadraty znaj-
 dują się w równaniu, a niebędzie
 w niem mnogości ut , to natenczas
 wykryślenie wyżej przepisane (317)

stosujące się do figur 42 i 43, wypa-
 dne próścięysze; bo w takim razie
 c będąc zerem, linia KL jest także
 zerem, a linia BL przemięnia się w
 BK , która natenczas staie się śrze-
 dnicą; więc linie x i y , są równoległe
 liniom u i t . W tymże przypad-
 ku wyrugowanie drugiego wyrazu
 względem u , odbywa się bez uży-
 wania niewiadomey n ; bo że w ta-
 kim razie linia BC to jest n (317),
 równa się linii BD albo AG , więc
 będzie $n = \frac{q}{2m}$, co odmięnia równa-

nie $u \mp \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, którego użyliśmy
 byli do wyrugowania drugiego wy-
 razu względem u , na $u \mp \frac{q}{2m} = x$.

A stąd pokazuje się, że ażeby li-
 nia krzywa była kołem, oprócz wa-
 runków wyżej wymienionych (318),
 trzeba nadto aby kąt, który czynią
 między sobą spółrzedne u i t , był kąt
 prosty.

324. Kiedy mnogość ut znaj-
 duie się w równaniu, jeżeli po wy-
 rugowaniu drugiego wyrazu wzglę-
 dem iednéy z dwóch niewiadomych
 np. względem t , nieznaydowałoby się
 in-

innego stopnia niewiadomey u , tylko kwadrat, to natenczas chociaż już niebędzie drugiego wyrazu do wyrugowania, iednakże trzeba przedsięwziąć przemianę, zależącą na tém, aby zrobić $u = \frac{lx}{n}$, gdzie $\frac{l}{n}$ rozumié się byđz ułamkiem niewiadomym, ale którego wartość pokazuje się z wykryślenia, podobnego temu iakie opisało się wyżej (321). Zobaczymy to niżej w przykładzie.

325. Jeżeli spomiedzy trzech wyrazów t^2 , ut , i u^2 niebrakuie tylko iednego z dwóch kwadratów, to zrównanie zawżse należy do hiperboli, albo niewyraża wcale żadney linii krzywéy; bo jeżeli d albo e iest zérém, to ilość $cc - 4de$, wychodząca na cc , wypada koniecznie trwierdząca.

326. Naostatek jeżeli razém brakuie obu kwadratów t^2 i u^2 , w którymto przypadku zrównanie miaoby tę postać, $gut + ht - ku - l = 0$, gdzie g, h, k , i l mogą byđz zarówno albo twierdzące albo przeczące; to także niemożnaby użyć wykryślenia danego wyżej (317). Zrównanie

W

w tym razie, należyć będzie do hiperboli uważonéy względém końcotycznych; ale że natenczas odcinki i rzędne nie są rachowane od środka, przeto można ie do tego stanu przywieśdź w następuiący sposób.

Trzeba oswobodzić mnogość ut , co da $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = 0$. Potém summa ilościów mnożących głoskę u , równa się niewiadomey y , to iest robi się $t - \frac{k}{g} = y$; skąd wypada $t = y + \frac{k}{g}$; położywszy tę wartość

w zrównaniu $ut + \frac{ht}{g}$ i. t. d. $= 0$, będzie $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$. Po takowém przekształceniu, summa wszystkich ilościów mnożących głoskę y , równa się nowéy niewiadomey x , to iest robi się $u + \frac{h}{g} = x$, przez co zrównanie odmiénia się na to, $xy + \frac{hh}{gg} - \frac{l}{g} = 0$, albo $xy = \frac{l}{g} - \frac{hh}{gg}$, które należy do hiperboli uważonéy między końcotycznými, gdzie odcinki x rachuią się od środka na iedney z końcotycznych, a rzędne rachuią się od téyże końcotycznéy, i są równoległe drugiéy; stopniém zaś hiperboli iest ilość $\frac{l}{g} - \frac{hh}{gg}$ (282).

Zeby wykryślic tę hiperbole, trzeba wykryślic następuiące dwa zrównania, $t - \frac{k}{g} = y$, i $u + \frac{h}{g} = x$, które służyły do prze-

mia-

miany. Pierwsze pokazuje, że chcąc mieć y , trzeba zmniejszyć każde t o ilość $\frac{k}{g}$.

fig. 45. Prowadzi się tedy przez punkt A (fig. 45), to jest przez początek ilościów u i t , linia AB , równoległa liniom PM , albo t , i równa ilości $\frac{k}{g}$; potem przez punkt B poprowadziwszy linię CBQ równoległą linii AP , linii QM , wyrażać będą ilości y ; bo $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

Zeby zaś mieć odcinki x ; zrównanie $u + \frac{h}{g} = x$, pokazuje, że trzeba pomnożyć ilości u , to jest linie AP , o ilość $\frac{h}{g}$. Wnosi się tedy

na przeciwną stronę linii AP , linia $AG = \frac{h}{g}$, a poprowadziwszy linię GS , równoległą liniom PM , któraby spotykała się z linią BQ w punkcie C , linii CQ wyrażać będą ilości x , a C będzie środkiem hiperboli, której końcowymi będą linie CQ , CS . Mając tedy końcowe, i zrównanie $xy = \frac{hk}{g}$, wykryli się hiperbola sposobem wyżej przepisany (289).

Gdyby w zrównaniu brakowało pierwszych trzech wyrazów t^2 , ut i u^2 , to natenczas takowe, niewyrażałoby tylko linią prostą, której wykrylenie zawsze jest łatwe, na fundamencie tego, co się powiedziało o wykryleniu zrównań służących do przemian poprzedzających.

327. A zatem i o każde zrównanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi, wyraża zawsze albo iaki przecinek stożkowy, albo też niewyraża wcale żadnej linii krzywéy. 2^{re} Takowa linia krzywa, jest albo Ellipsą, albo Hiperbolą albo Parabолą, podług tego, kiedy kwadrat z współczynnika mnogości ut , wynikający z dwóch niewiadomych, zmniejszony mnogością, wynikającą z współczynników kwadratów t^2 , i u^2 cztery razy powtórzoną, jest albo przeczący, albo twierdzący albo zerem; a w szczególności takowa linia krzywa może być kołem, kiedy pomieniony wypadek będąc przeczący, współczynniki kwadratów t^2 i u^2 będą równe jeden drugiemu. 3^{cie} Zeby zaś każde zrównanie należące do iakiego przecinka stożkowego, naprowadzić do postaci tych zrównań, które podały się wyżej mówiąc o tych liniach, trzeba w tém stołować się do przepisów położonych pod liczbami (315, 317, 320, 321, i 326),

Przystósowanie tego co poprzedziło,
do rozwiązania niektórych Zaga-
dnień nieokręślonych.

328. **Z**ebyśmy dali do wyrozumienia uży-
cie przemian, dopiero opisanych,
obierzmy sobie na pierwszy przykład to za-
gadnienie: Znalédsz iakiego rodzaju byłaby li-
nia krzywa (fig. 46), którejby odległości od
fig. 46. każdego punktu M do dwóch punktów stałych
 A i B znajdowały się zawsze w jednakowym
stosunku, oznaczonym przez g do h .

Zmyślny sobie z każdego punktu M ,
spuszczoną linią MP prostopadłą na AB ,
i szukamy stosunku między temi prostopa-
dłami i odległościami onych AP od punktu
 A ; tym końcem oznaczmy sobie AP przez
 u ; PM przez t ; a linią wiadomą AB przez c .

To na przód założymy, trójkąt prosto-
kątny APM , daie $AM = \sqrt{(AP)^2 + (PM)^2}$
 $= \sqrt{(u + t)^2}$, a trójkąt prostopadły BPM , da-
ie $BM = \sqrt{(BP)^2 + (PM)^2}$; lecz $BP =$
 $AP - AB = u - c$; więc $BM = \sqrt{(u - c)^2 + t^2}$
 $= \sqrt{u^2 - 2cu + c^2 + t^2}$; a że ma być $AM : BM :: g : h$,
więc będzie $\sqrt{(u + t)^2} : \sqrt{(u^2 - 2cu + c^2 + t^2)} :: g : h$;
więc $h \sqrt{(u + t)^2} = g \sqrt{(u^2 - 2cu + c^2 + t^2)}$
 $+$ tt , albo skwadrówawszy, $hhu + hht = ggu$
 $- 2ggcu + ggcc + gggt$, albo $(gg - hh)u + (gg$
 $- hh)tt - 2ggcu + ggcc = 0$; równanie, po-
dług (318) należące do koła; ponieważ dwa
kwadraty u i tt , w téjże części równania
mają jednakowe znaki i jednakowego współ-
czynnika.

Zeby to równanie naprowadzić do po-
staci $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (317); uważam, że ponie-
waż w niem nieznayduie się drugiego wyra-
zu względem t , przeto dosyć jest względem
téj niewiadomej zrobić $t = y$, skąd wypada,

MATEMATYKI.

$(gg - hh)u + (gg - hh)y - 2ggcu + ggcc$
 $= 0$; teraz zaś trzeba wyrugować drugi wyraz
względem u ; że zaś mnogość u nieznayduie
się w równaniu, dlatego dosyć będzie (323),
przebrać na użyciu reguły wyżej podanej
(313). Ośwobodziwszy tedy u , mam $u =$

$$\frac{2ggcu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy; \text{ robię } u = \frac{ggc}{gg - hh}$$

$= x$; a skwadrówawszy i położywszy zamiast
pierwszej części równania, onę wartość

$$xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2}, \text{ z poprzedzającego działania}$$

wynikającą, będzie $xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2} =$

$$\frac{-ggcc}{gg - hh} - yy, \text{ albo } yy = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2} - xx;$$

równanie które będąc przystósowane do zrów-

wnania $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, da mi $\frac{1}{4}aa = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2}$

a zatem będzie promień, czyli $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{gg - hh}$

Teraz nieidzie, tylko o wynalezienie środka,
który powinien znajdować się na linii APB ,

bo mamy $t = y$. Lecz równanie $u = \frac{ggc}{gg - hh}$

$= x$, które służyło do przemiany, pokazuje, iż
ażeby mieć x , trzeba zmniejszyć u o ilość

$\frac{ggc}{gg - hh}$; przeto wzięwszy $AC = \frac{ggc}{gg - hh}$,
linia CP wyrażać będzie ilość x ; bo takowa

jest wartość $AP - AC$, to jest $u - \frac{ggc}{gg - hh}$.
A zatem z punktu C iako ze środka, promie-
niem $\frac{hgc}{g^2 - h^2}$ opisałwszy koło, każdy punkt
 M iego okręgu, mieć będzie tę własność o
której mowa.

Wreszcie śrządek i promień, mogą być wynalezione dosyć prostym sposobem, przy pomocy pierwszego zrównania $uu - \frac{2g^2cu}{gg - hh}$

$= \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$; albowiem, ponieważ śrządek znaydować się musi na linii AP , iak dopiero wyżej uważyliśmy, przeto zrobimy $y = 0$, po rozwiązaniu zrównania, mieć będziemy dwie wartości głoski u , wyrażające odległości AD i AE , w których koło DME spotyka się z linią prostą AB ; a zatem przedzieliwszy na połowę linią DE , mieć będziemy śrządek C i promień koła CE .

I tak rozwiązawszy zrównanie $u^2 - \frac{2g^2cu}{gg - hh}$
 $= \frac{-ggcc}{gg - hh}$, będzie $u = \frac{g^2c}{gg - hh} \pm \sqrt{\frac{gg^2c^2}{(gg - hh)^2}}$
 $= \frac{g^2c \pm ghc}{gg - hh} = \frac{gc(g \pm h)}{(g - h)(g + h)}$, skąd wypada-
 ią na u te dwie wartości, $u = \frac{gc}{g + h} = AD$, i $u = \frac{gc}{g - h} = AE$.

329. Obierzmy sobie znowu na drugi przykład to zagadnienie: *Zewnątrz linii danej AR (fig. 47) wynaléść wszystkie i różne punkta M takie, ażeby poprowadziwszy do dwóch punktów A i R linie MA , MR , kąt AMR znaydował się zawsze być równy zadanemu kątowi.*

Oznaczmy sobie przez r promień Tablic, a przez m styczną kąta zadanego, któremu kąt AMR ma się równać; spuśćmy prostopadłą MP , oznaczmy AP przez u ; PM przez t ; AR przez b ; a natenczas będzie $PR = b - u$.

Przy-

Przypomniemy sobie owe trzy podania wywiedzione w Tomie I. (Jeom. 282, 286 i 287), to jest, że jeżeli A i B są dwa kąty, to będzie

$$1^{\text{od}} Wst. (A \pm B) = \frac{Wst. A Dost. B \pm Wst. B Dost. A}{r}$$

$$2^{\text{re}} Dost. (A \pm B) = \frac{Dost. A Dost. B - Wst. A Wst. B}{r}$$

$$3^{\text{cie}} Stycz. (A \pm B) = \frac{r Wst. (A \pm B)}{Dost. (A \pm B)}$$

To założywszy, trójkąty prostokątne APM , RPM , daia (Jeom. 299), $AM : AP :: r :$
 $Wst. AMP$; $AM : PM :: r : Wst. MAP$ albo
 $Dost. AMP$; $RM : RP :: r : Wst. RMP$;
 $RM : PM :: r : Wst. MRP$ albo $Dost. RMP$;

skąd wyciąga się $Wst. AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; $Dost.$

$$AMP = \frac{r \times PM}{AM}; Wst. RMP = \frac{r \times RP}{RM};$$

$$Dost. RMP = \frac{r \times PM}{RM}; \text{ więc ponieważ}$$

$AMR = AMP \pm RMP$, będzie podług formuł dopiero wzmiankowanych, $Wst.$

$$AMR = \frac{r \times AP \times PM \pm r \times RP \times PM}{AM \times RM}$$

$$= \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM}; \text{ a } Dost. AMR =$$

$$\frac{r \times (PM)^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM}; \text{ więc } \frac{r Wst. AMR}{Dost. AMR}$$

$$\text{albo } Stycz. AMR = \frac{r \times AR \times PM}{(PM)^2 - AP \times RP};$$

albo położywszy zamiast linii ich wartości Algebraiczne i uczyniwszy zebranie, będzie m

$$= \frac{rbt}{tt - bu + uu}, \text{ albo } mtt + muu - mbu - rbt$$

$= 0$; zrównanie, należące do koła, iak się można było spodziewać.

Cc 3

Zc-

Zeby wynaléśdź śrzodek i promień, trzeba to zrównanie przywieśdź do postaci $yy = \frac{1}{4}aa - xx$. Tym umyślem oswołodziwszy tt , co mi da $tt - \frac{rb}{m}t - bu + uu = 0$, robię podług (313), $t = \frac{rb}{2m} + y$; i działając tymże sposobem, iak w miéyscu wzwiankowanym, moje zrównanie przemieniam, na to: $yy - \frac{rb}{4mm} - bu + uu = 0$. Zostaie tedy iészcz, wyrugować z niego drugi wyraz względem u ; a że mnogość uu niewchodzi w to zrównanie, przeto podług (323), robię prosto $u - \frac{b}{2} = x$; a działając daléy podobnymże sposobem, zrównanie przemienia się na $yy - \frac{rb}{4mm} + xx - \frac{bb}{4} = 0$, albo na $yy = \frac{rb}{4} + \frac{bb}{4} - xx$, które przytósówawszy do zrównania $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, mam $\frac{1}{4}aa = \frac{rb}{4} + \frac{bb}{4}$, a zatém promień albo $\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{rb}{4} + \frac{bb}{4}\right)}$.

Teraz tedy zeby znaleźć śrzodek i oraz naznaczyć promień, zrównanie $t - \frac{rb}{2m} = y$, daie mi znać, że jeżeli poprowadzę linią AB , równoległą linii PM , to iest jeżeli z punktu A postawię prostopadłą $AB = \frac{rb}{2m}$, a oraz jeżeli poprowadzę linią BCQ

równoległą linii AR , to linii QM , będą mi wyrażać ilości y ; bo $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$. Zrównanie zno-

wu $u - \frac{b}{2} = x$, daie mi znać, że jeżeli we-

zmę na linii AR część $AG = \frac{b}{2}$, to linii

GP wyrażać będą ilości x ; bo $GP = AP - AG = u - \frac{b}{2} = x$; więc jeżeli przez punkt

G , poprowadzę linią GC równoległą linii PM , to punkt C będzie śródkiem. Nadto jeżeli poprowadzi się linią AC , to z przyczyny kąta prostego G , będzie $AC =$

$\sqrt{[(AC)^2 + (GC)^2]} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$; więc linią AC będzie promieniem.

Cała tedy rzecz tego wykryślenia, zależy na tém: Ażeby na śródku linii AR postawić prostopadłą $GC = \frac{rb}{2m}$, i z punktu

C iako ze śródka, promieniem CA , opisać koło; każdy kąt MAR , który będzie miał swój wierzchołek przy okręgu koła, a oraz przechodzić będzie przez punkta A i R , będzie się równał kątowi zadanemu. Zeby zaś wykryślić

ilość $\frac{rb}{2m}$, nie trzeba więcéy, tylko poprowadzić

linią AO , któraby z linią AB , czyniła kąt BAO równy kątowi zadanemu; takowa linia przetnie linią GC w punkcie szukanym C ; albowiem w trójkacie prostokątnym ABC , mamy $r : Sftyecz. BAC :: AB : BC$ albo AG

Cc 4

AG , to jest, $r : m :: AB : \frac{1}{2}b$; więc AB albo $GC = \frac{rb}{2m}$.

Jeszcze łatwo dać się widzieć, że całe wykryślenie kończy się na tem, ażeby przez punkt A poprowadzić linią AO , która z linią AR czyniła kąt RAO równy dopełnieniu kąta zadanego; takowa linia przetnie w punkcie C , prostopadłą postawioną na środku linii AR , tak że punkt C będzie środkiem, a linia CA będzie promieniem.

330. Stąd łatwo będzie można rozwiązać zagadnienie następujące: Mając wiadome położenie trzech punktów R, A, R' (fig. 48), i kąty pod którymi uglądają się linie RA, AR' z pewnego punktu M , żeby wyznaczyć ten punkt M .

Na środkach G i G' linii RA i AR' trzeba postawić prostopadłe GC i $G'C$; przez punkt A prowadzą się linie AC i AC' czyniące z liniami AR i AR' każdą z każdej, kąty $RAC, R'AC$ każdy z nich równy dopełnieniu kąta $RMA, R'MA$, pod którym jest widziana linia odpowiadająca. Z punktów C i C' jako ze środków, promieniami CA i $C'A$, opisują się dwa koła, które się wzajemnie przetną w punktach M i M' ; a natenczas punkt M będzie szukany punktem. Jestto oczywisty wniosek z rozwiązania poprzedzającego.

To zagadnienie, może służyć do oznaczenia na Mappie kraju iakiego, położenia punktu, z którego były uglądane trzy przedmioty znajome.

Gdyby kąty uważone $RMA, R'MA$ były równe kątom $RR'A, R'RA$, to w takim

kim razie zagadnienie byłoby nieokreślone, dwa koła zetknięby się w jedno, i każdy punkt ich wspólnego okręgu, czyniłby dosyć zagadnieniu.

331. Na trzeci przykład, niechay będzie to zagadnienie; Znaleśdź iedną linią krzywą albo więcej, któreby miały następującą własność, to jest: Dajmy że dwie linie AT, AZ , (fig. 49) nakryśione, czynią między sobą kąt zadany iakikolwiek, rzecz idzie o wyznaczenie takich linii krzywych, w którychby odległość od każdego punktu M do innego punktu stałego F , wzięta na linii AZ , była zawsze w jednakowym stosunku, z drugą odległością MT , wziętą od tegoż punktu M do linii prostej AT , biorąc takową odległość równoległą z linią AZ .

Z iakiegokolwiek punktu M téj linii krzywej, zmyślimy sobie linią MP , równoległą linii AT , i prostopadłą MS na linią AZ ; kąt MPS rozumie się zadany; a zatem jego wstawia i dostawa rozumieją się także wiadome; oznaczmy je sobie przez p i q , a przez r promień Tablic. * Oznaczmy także linią AP przez u ; PM przez t ; i wiadomą AF przez c .

To założywszy, w trójkącie prostokątnym MSP , mieć będziemy podług (Jeom. 299)

* Można rozumieć, iak tu w rzeczy samej rozumiemy że ilości p, q, r są zadane podług Tablic Trygonometrycznych, ale też można je także mieć przez wykryślenie bardzo łatwe, zrobiwszy trójkąt prostokątny, w którymby ieden z ostrych kątów, równał się kątowi wiadomemu MPS , i dawszy przeciwprostokątnej wymiar, iaki się spodoba. Takową przeciwprostokątną wzięwszy za r , pozostanie dwa boki, dadzą p i q .

299), $r : Wst. MPS :: MP : MS, i r : WA$
 PMS albo $Dof. MPS :: PM : PS$; to jest,

$$r : p :: t : MS = \frac{pt}{r}; i r : q :: t : PS = \frac{qt}{r}$$

Więc $FS = PS - PF = PS - AP + AF =$
 $\frac{qt}{r} - u + c$; trójkąt zaś prostokątny MSE ,

daie $MF = \sqrt{[(MS)^2 + (ES)^2]}$, więc MF
 $= \sqrt{(\frac{p^2 t^2}{r^2} + \frac{q^2 t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu$

$$+ cc);$$
 albo (z przyczyny że podług (Jeom. 283), $p^2 + q^2 = r^2$), będzie $MF = \sqrt{(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)}$; a że linia MF

ma się mieć do linii MT albo AP w stosun-

ku danym, więc oznaczywszy takowy sto-

sunek przez g do h , będzie $\sqrt{(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2$

$$+ \frac{2qct}{r} - 2cu + cc) : u :: g : h$$
; a zatem będzie

$$gu = h \sqrt{(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)},$$

albo po skwadrówaniu i przedstawieniu, $h^2 t^2$
 $= \frac{2qh^2 ut}{r} + (h^2 - g^2)u^2 + \frac{2ch^2 qt}{r} - 2ch^2 u +$

$$h^2 c^2 = 0$$
; zrównanie, wyrażające przecinek

stożkowy (315 i dalej), i które (316) nale-

żyć będzie do Ellipsy, jeżeli kwadrat z ilo-

ści $-\frac{2qh^2}{r}$ zmniejszony o ilość h^2 cztery

razy wziętą, i rozmnożony przez $h^2 - g^2$,
 będzie ilością przeczącą; to jest, jeżeli $\frac{4q^2 h^4}{r^2}$

$$- 4h^4 + 4h^2 g^2, \text{ albo } \frac{4q^2 h^4 - 4r^2 h^4 + 4r^2 h^2 g^2}{r^2},$$

jest ilością przeczącą; albo (z przyczyny że
 $r^2 - g^2 = p^2$), jeżeli $\frac{4r^2 h^2 g^2 - 4p^2 h^4}{r^2}$ jest

ilością przeczącą; przeciwnie należyć będzie

do hiperboli, jeżeli $\frac{4r^2 h^2 g^2 - 4p^2 h^4}{r^2}$ jest ilo-

ścią twierdzącą. A zaś będzie należyć do

Paraboli, jeżeli $\frac{4r^2 h^2 g^2 - 4p^2 h^4}{r^2}$ będzie ze-

rém, to jest jeżeli $4r^2 h^2 g^2 = 4p^2 h^4$, albo ie-

żeli $rg = ph$; naostatek wynaleziona linia

krzywa będzie kołem, jeżeli $h^2 = h^2 - g^2$;

co byż nigdy nie może tylko w ten czas, kie-

dyby g było zerem, albo h wyrażało ilość

niekończoną; albowiem w tym ostatnim przy-

padku, g^2 powinno być zaniedbane wzglę-

dém h^2 .

Téraż żeby wykryść linią krzywą

w każdym z wymienionych przypadków,

nietrzeba więcej, tylko postąpić sobie w ten-

że sposób co wyżej (317 i dalej); ponie-

waż tam zabawiliśmy się około Ellipsy, prze-

to żeby tém lépiéj okazało się podobieństwo

działań i wykryść względem różnych li-

nii krzywych, przystósujemy tu do Hiperboli

to, co tam było przedsięwzięto względem

Ellipsy, to jest starać się będziemy przypro-

wadzić nasze zrównanie do téj postaci, yy

$$= \frac{bb}{aa} (xx - \frac{1}{4}aa).$$

Oswobadzam tedy naprzód t^2 w zrów-

nananiu wyżej wynalezioném, co mi daie t^2

$$+ (\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r})t + (1 - \frac{g^2}{h^2})u^2 - 2cu + c^2 =$$

= 0. Zeby z tego zrównania wyrugować drugi wyraz względem t , robię $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$; skąd po skwadrówaniu i przedstawieniu mam, $t^2 + (\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r})t = yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2}$, a zatem położywszy w zrównaniu tę wynalezioną wartość, będzie $yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2} + (1 - \frac{g^2}{h^2})u^2 - 2cu + c^2 = 0$.

Teraz tedy trzeba znowu wyrugować drugi wyraz względem u ; ale wprzód uwzględnam, że wyrazy $-\frac{q^2u^2}{r^2} + (1 - \frac{g^2}{h^2})u^2$, albo $-\frac{q^2u^2}{r^2} + u^2 - \frac{g^2u^2}{h^2}$, albo $\frac{r^2u^2 - q^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2}$, daią przemienić się na $\frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{r^2}$; i że dwa wyrazy $\frac{2cq^2u}{r^2} - 2cu$, albo $\frac{2cq^2u - 2cr^2u}{r^2}$, przemieniają się na $-\frac{2cp^2u}{r^2}$; iako też, że dwa wyrazy $-\frac{c^2q^2}{r^2} + c^2$, przemieniają się na $+\frac{c^2p^2}{r^2}$; bo $r^2 - q^2 = p^2$. Zrównanie tedy poprzedzające przemienia się w to, $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} + \frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2} = 0$, albo wyrugowawszy mianownik

ków, (i dla łatwiejszego rachunku), zrobimy, $p^2h^2 - r^2g^2 = r^2kk$, będzie $r^2h^2y^2 + c^2h^2p^2 - 2ch^2p^2u + r^2k^2u^2 = 0$.

Oswobodźmy tedy u^2 skąd wypadnie $u^2 - \frac{2ch^2p^2}{r^2k^2}u + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$; teraz zrobmy $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, wprowadziwszy niewiadomą n ; bo w początkowym zrównaniu znajduje się mnogość ut (315). Natenczas działając jak wyżej, i wprowadziwszy w zrównanie tę nową wartość, będzie $\frac{c^2h^4p^4x^2}{r^4k^4n^2}$

$$- \frac{c^2h^4p^4}{r^4k^4} + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0, \text{ albo wyrugowawszy spólnego mianownika } \frac{h^2}{k^2}, \text{ i zofstawiwszy } y^2 \text{ samo jedno w iedney części, będzie } y^2 = - \frac{c^2h^2p^4x^2}{r^4k^2n^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} + \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2},$$

albo rozmnożywszy drugą część zrównania przez mnożnika ilości x^2 , a oraz wskazawszy rozmnożenie przez tegoż mnożnika, będzie $y^2 = - \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2} (x^2 + \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - n)$; ale że tu rzecz idzie o hiper-

bolę, przeto należy uważać, że ilość r^2k^2 , która nieco innego jest, tylko $p^2h^2 - r^2g^2$, wyraża ilość przeczącą; albowiem podług uwagi wyżej położony, ilość $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$, albo $\frac{4h^2}{r^2} (r^2g^2 - p^2h^2)$, musi być ilością

twier-

twierdzącą, chcąc mieć żeby linia krzywa była Hiperbola. A zatem trzeba uczynić ilość przeczającą, to jest kładąc wartość jego w równaniu, trzeba położyć $r^2g^2 - p^2k^2$ zamiast $p^2h^2 - r^2g^2$. Zrównanie tedy nasze

$$\text{przemienia się w to, } y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2} (x^2 - \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - m); \text{ które przystosowawszy do zrównania}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - \frac{1}{4}aa), \text{ dla wynalezienia}$$

$$\text{średnic dostawnych, mieć będziemy } \frac{b^2}{a^2} =$$

$$\frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}, \text{ i } \frac{1}{4}aa = \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} + m; \text{ skąd łatwo wy-$$

ciąga się a i b ; to jest znaydą się dwie średnice dostawne, które, iak zobaczymy zaraz, są też razem dwiema osiami téż Hiperboli.

Naznaczymy więc kieronek średnic dostawnych, do których stosuje się zrównanie nasze przemienione. Podług tego co się rzekło wyżej (317), trzeba wykryślić te dwa

$$\text{zrównania, } t + \frac{cq}{r} = \frac{qu}{r} = y, \text{ i } u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} =$$

$$\frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}; \text{ ale że, iak widzieliśmy dopiero,}$$

k^2 powinno być ilością przeczającą w przypadku hiperboli, o którą tu rzecz idzie, więc drugie z tych dwóch zrównań, trzeba przemienić na to, $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; nieodmieniam

$$\text{znaku położonego przed wyrazem w którym zawiera się } x, \text{ chociaż w nim znayduje się także } k^2, \text{ bo ilość } n \text{ może być wzięta po-}$$

podług upodobania tak za twierdzącą iak za przeczającą. Trzeba tedy, postępując sobie dalej tymże sposobem, iak w miéyscu przereczoném, poprowadzić przez punkt A równoległe linii PM , linią $AB = \frac{cq}{r}$, a potem

poprowadziwszy znowu przez punkt B inną linią BL , równoległą linii AZ , trzeba wznaczyć podług upodobania część BK , i wyciągnąć linią KL , równoległą linii PM , i taką ażeby było $BK:KL::r:q$; natenczas jeżeli przez punkt B i przez punkt L poprowadzi się linią LBQ , któraby spotykała się z linią PM w punkcie Q , to linie QM wyrażać będą ilości y . Albowiem $QM = PM - PQ = PM$

$$- QI + PI = t - QI + \frac{cq}{r}; \text{ trójkąty zaś podobne sobie } BKL \text{ i } BQI, \text{ dają } BK:KL::BI \text{ albo } AP:QI; \text{ to jest } r:q::u:QI = \frac{qu}{r}; \text{ więc } QM = t - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y.$$

Ale można jeszcze skrócić wykryślenie, prowadząc zaraz od punktu F linią FB prostopadłą na TA ; gdyż iawna jest, że kąt FAB równa się kątowi APM , a zatem że w trójkącie prostokątnym ABF , będzie $r:$

$$q::c:AB = \frac{qc}{r}; \text{ a tak, z przyczyny że}$$

linia QM jest równoległa linii AB , linie y są prostopadłymi na BQ , więc linia BQ jest kierónkiem jednéj z osiów, gdy tym czasem druga musi być równoległa linii QM .

Nieidzie tedy już więcej, tylko o wynalezienie środka. Lecz drugie zrównanie

$$u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}, \text{ znać mi daie, że trzeba}$$

wziąć

wziąć naprzeciwko ilościów u , ilość $AG = \frac{ch^2 p^2}{r^2 k^2}$, i poprowadzić linią GC równoległą linii PM albo prostopadłą na BQ ; takowa zaś linią GC odznaczy punkt C na początek ilościów x , i na środek. Jakóż ilości x powinny rachować się na linii CQ , bo od niej rachują się ilości y ; zrównanie zaś $u + \frac{ch^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{ch^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$, albo $AP + AG = \frac{AG \times x}{n}$, albo

$$GP = \frac{AG \times x}{n}, \text{ daie znać, że te linie } x, \text{ po-}$$

czynają się razem z liniami GP , więc linie x muszą poczynąć się w punkcie C , a zatem nie są inne tylko linie CQ ; więc punkt C jest środkiem.

Z Ellipsą postąpić sobie trzeba tymże samym sposobem.

Co zaś do Paraboli, ponieważ w takim razie, jest $rg = ph$, iak widzieliśmy wyżej, więc zrównanie wyrażone w ilościach y i u , które mieliśmy po wyrugowaniu drugiego wyrazu względem t , i po wprowadzeniu ilości p^2 zamiast $r^2 - q^2$, odmienna się, położywszy w wartości ilości k^2 , zamiast g , wartość jego $\frac{ph}{r}$, wyciągnioną z zrównania $rg = ph$, odmienna się mówię w to, $y^2 + \frac{c^2 p^2}{r^2} - \frac{2cp^2 u}{r^2} = 0$, albo $y^2 = \frac{2cp^2 u}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2}$; któ-

re żeby przywieść do postaci zwyczajnej zrównania należącego do Paraboli, robię, podobnie tego co się rzekło (321), $\frac{2cp^2 u}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2}$

$= nx$, i mam $yy = nx$; a po wykryśleniu, (iak w poprzedzającym przypadku), zrównania $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, którego użyliśmy do

wyrugowania drugiego wyrazu względem t , łatwo będzie można wykryć zrównanie $\frac{2cp^2 u}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2} = nx$, w sposób podobny temu co wyżej (321); to jest, że oswo-

dziwszy u , co da $u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2 nx}{2cp^2}$, bierze się

na linię AP (fig. 50), część $AG = \frac{1}{2}c$, a fig. 50.

poprowadziwszy linią GC równoległą linii PM , punkt C będzie początkiem ilościów x , które nieinne będą tylko CQ ; tak że linią CQ będzie kierónkiem średnicy, wierzchołek iey będzie w punkcie C , a palirzedną będzie n ; której wartość wynaydzie się iak następuje: Ponieważ $AG = \frac{1}{2}c$, więc będzie

$$GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2 nx}{2cp^2} = \frac{r^2 n}{2cp^2} \times CQ; \text{ więc } n = \frac{2cp^2 \times GP}{r^2 \times CQ}; \text{ równolegle zaś}$$

PQ, CG i AB , daia $CQ : GP :: CF : GF :: BF : AF$; to jest $CQ : GP :: BF : c$; więc $GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; położywszy tę wartość za-

miał GP w wartości ilości n , będzie $n = \frac{2c^2 p^2}{r^2 \times BF}$; ilość wiadoma, bo c, p, r są ilości

zadane, a BF jest wiadoma z wykryślenia. Tę wartość można dać ielzcie prościysze wyrażenie, uważywszy, że trójkąt prostokątny FAB , daie $r : p :: AF : BF :: c : BF$;

więc $BF = \frac{cp}{r}$, a zatem $n = \frac{2(BF)^2}{BF} = 2BF$.
Dd Przy-

*Przystósowanie tychże Fundamentów,
do niektórych zagadnień określonych.*

332. Rozwiązawszy drugie z położonych wyżej zagadnień nieokreślonych (329), użyliśmy go (330), do rozwiązania innego zagadnienia określonego. To zaś ostatnie (acz nieiawnie) uważaliśmy znowu, jakoby zawierające w sobie dwa inne zagadnienia oba nieokreślone; i które będąc tegoż samego gatunku co było pierwsze, rozwiązały się tymże samym sposobem. Przecięcie się wspólne dwóch linii krzywych czyli dwóch kół, o co szło w obu osobnych zagadnieniach, dało rozwiązanie zagadnienia określonego. Kiedy zrównanie ostateczne, wyrażające warunki zagadnienia, przechodzi drugi stopień, to w rozwiązaniu go, podobnież trzeba sobie postąpić. W przypadkach w których możnaby nieużywać tylko iednej niewiadomej, używa się ich dwie, i usiłuje się z warunków zagadnienia ułożyć sobie dwa zrównania, te będąc wykryślone z osobna, każde z nich da linią krzywą, której każdy punkt czyni zadosyć zrównaniu odpowiadającemu; jeżeli zagadnienie niejest niepodobne, to dwie linie krzywe spotkają się z sobą w iednym lub w wielu punktach, podług tego, ile zrównanie może mieć iedno albo wiele rozwiązań, albo też kiedy zawiera w sobie wiele przypadków zawisłych od tychże samych ilościów zadanych, i zasadzających się na tychże samych rozumowaniach. Takowe przecięcia dają różne rozwiązania danego zagadnienia.

Jawna tedy jest, że ilekróć dwa zrównania z dwiema niewiadomymi, niebędą przechodzić drugiego stopnia, to rozwiązanie nigdy

gdy zależy niebędzie, iak tylko naywięcej od spólnego przecięcia się dwóch Przecinków stożkowych. Zamiast że w tychże samych przypadkach, gdyby się nieużyło, iak tylko iednej niewiadomej, albo przy pomocy dwóch zrównań wynalezionych, gdyby wyrugowała się iedna z dwóch niewiadomych, to zrównanie podniosłoby się do trzeciego, a częściej aż do czwartego stopnia. Ale jeżeli iedno z dwóch zrównań, albo też oba, przechodzą drugi stopień, to natenczas rozwiązanie zawisłoby od linii krzywych wyższego stopnia, aniżeli są przecinki stożkowe.

Zabawmy się teraz niektórymi przypadkami zagadnień, nieprzechodzących czwartego stopnia.

333. Obierzmy sobie na pierwsze zagadnienie: *Zeby wynaléść dwie średnie proporcjonalne między dwiema danymi liniami a i b.*

Jeżeli sobie oznaczymy przez t i u , te dwie proporcjonalne, mieć będziemy następującą progresyą $a : t : u : b$, z której wynikają te dwie proporcye. $a : t :: t : u$ i $t : u :: u : b$, a zatem i te dwa zrównania, $at = t^2$ i $bt = u^2$, oba należące prosto do Paraboli. Dla tego poprowadziwszy dwie linie nieokreślone AZ , AX (fig. 51.) czyniące między sobą fig. 51. kąt iakikolwiek, (dla tém więkšej łatwości, można go rozumieć byđz prosty), a potem na linii AZ iako na średnicy, i z punktu A iako z wierszchołka téżże średnicy, nakryśliwszy Parabolę (302), którejby palirzedną należącą do średnicy AZ było a , i w którejby kątem spólrzędnych był kąt XAZ , to takowa parabola da rozwiązanie zrównania $at = t^2$, tak że linie AB , będą odpowiadać ilościom u , a linie PM , będą odpowiadać ilościom t . Podobnież na linii AX iako średnicy

dnicy z punktu A iako z wiérzechołka, nakryśliwszy parabolę, któręby palirzedną należącą do średnicy AX było b , a kątem spólrzędnych był kąt XAZ , to takowa parabola rozwiązałaby zrównanie $bt = u^2$, tak że linie AP będą odpowiadać ilościom t , a linie PM ilościom u . Ale ażeby oraz i zagadnienie było rozwiązane, to trzeba żeby te oba zrównania, $au = t^2$ i $bt = u^2$ miały miećce razem, to jest żeby wartość ilości u była w obu jednakowa, iako téż i ilości t . Lecz to oczywiście dopełnia się w punkcie M , gdzie z sobą spotykają się dwie parabole; albowiem, ponieważ ilości u rachują się na linii AZ , a ilości t na linii AX , albo równolegle linii AX ; więc oczywista jest, że poprowadziwszy linie MP i MP równolegle liniom AX i AZ , wartość MP ilości u w Paraboli AMM jest taż sama co wartość AP ilości u w Paraboli AMM , podobnież wartość AP ilości t w Paraboli AMM jest taż sama, co wartość PM ilości t w Paraboli AMM ; a do tego iawna jest, że niema tylko punkt M , gdzie wartości ilościów u i t w obu Parabolach, wypadłyby téż same, chybabyto było w punkcie A , gdzie tak że te dwie linie krzywe spotykają się z sobą. Ale ponieważ w tym punkcie A tak ilość u iak t są zerem, więc iawna jest, że takowy punkt niemoże zadofyć uczynić zagadnieniu. Wartościami tedy ilościów u i t , są linie AP i PM , a punkt M jest punktem spotkania się z sobą dwóch linii krzywych.

334. Wreszcie, chociaż zawsze można dóyśdź rozwiązania szukanego, przez osobne wykryślenie zrównań wynalezionych, atoli czaśem, te wykryślenia dają się uczynić prościęyszymi, przygotóuwawszy sobie zrównania w pewny sposób. Np. dodawszy z sobą dwa zrównania $au = t^2$ i $bt = u^2$, będzie

dzie $au + bt = u^2 + t^2$; zrównanie, należące do koła, rozumiejąc że ilości u i t biorą się na liniach prostopadłych jedna drugiey. A lubo wykryślenie Paraboli jest dosyć łatwe, przecięż wykryślenie koła jest ieszcze łatwieyż, a zatem w terażnięyszym przypadku wolalbym wykryślic naprzód tylko zrównanie samo $au = t^2$, iak wyżej; a potém wykryślibym zrównanie należące do koła, $au + bt = u^2 + t^2$, przemieniwszy go w zrównanie następujące, $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$, przez wyrugowanie drugich wyrazów względem t i u , robiąc $t - \frac{1}{2}b = y$, i $u - \frac{1}{2}a = x$. A natenczas wziąwszy $AB = \frac{1}{2}b$, i poprowadziwszy linią BQ , równoległą linii AP , miałbym linią QM na wartość ilości y . Potém wziąwszy $AO = \frac{1}{2}a$, i poprowadziwszy linią OC równoległą linii AX , miałbym linią CQ na wartość ilości x . A zatem z punktu C iako ze środka, promiennem $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$ to jest promiennem AC , opisałbym koło, które przeciąwszy parabolę AM w punkcie M , dałoby mi linie MP i AP na wartości ilościów t i u .

335. Takowe wykryślenia można wielorako odmiéniać; można np. dodać iedno z dwóch zrównań, z drugim rozmnożoném przez ilość iakąkolwiek upodobaną $\frac{l}{n}$, bądźto twierdzącą bądź téż przeczącą, skądby mi wypadło, $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$; zrównanie, mogące należyc do Ellipsy albo do Hiperboli, podług wartości, iaka się da ilości $\frac{l}{n}$; tak iż wykryślenie można odbydź przez tę lub owę z tych dwóch linii krzywych, w podobny sposób iak uczyniło się przez koło. Można na-

wet odbyć go razém przez obie, albo też tylko przez jedną złączoną z kołem, a to naznaczając ilości $\frac{1}{n}$ wartości przyzwoite, i które dają się łatwo wynaleść podług tego co się rzekło (319 i dalej).

336. Obierzmy sobie znowu na drugi przykład to Zagadnienie. Zeby rozdzielić kąt albo łuk zadany na trzy części równe.

fig. 52.

Niechay będzie EO (fig. 52) łuk zadany do rozdzielenia; punkt A jego środek; zmyślny sobie że EM jest trzecią częścią tego łuku, a poprowadziwszy promień EA , MA spuścimy prostopadłe MP , OR . Linie OR i AR , oznaczające wstawę i dostawę łuku zadanego OE , rozumieją się być wiadome; nazwiemy je d i c ; promień AE niech będzie r ; naostatek niewiadome AP i PM nazwiemy u i t .

To założywszy, trójkąt prostokątny APM , daie $u^2 + t^2 = r^2$. A trójkąty APM , ARS podobne sobie, daia $AP : PM :: AR : RS$; to jest $u : t :: c : RS = \frac{ct}{u}$. Lecz

jeżeli przedłuży się prostopadła MP aż do spotkania się z okręgiem w punkcie V , łuk MV będzie równy łukowi MO , każdy z nich będąc dwa razy tak wielki jak jest ME ; więc kąt $OMS = AMP = ASR$, z przyczyny równoległych OSM . Więc trójkąt SOM , jest równoramienny, a zatem $OS = OM = MV = 2t$; a że $OR = OS + SR$, więc będzie $d = 2t + \frac{ct}{u}$, albo $2tu + ct = du$, albo $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$.

Dwa tedy równania mające być wykryślone, będą te, $u^2 + t^2 = r^2$, albo $t^2 = r^2 - u^2$, i $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$. Pierwsze już jest ze wszy-

wszystkiém wykryślone, iako należące do tegoż samego koła EMO .

Co zaś do drugiego, takowe należy do Hiperboli (326); a że w niém niedostaie obu kwadratów, więc podług tego co się rzekło w miejscu wspomnioném, trzeba wszystkie wyrazy zawierające w sobie ilość u , przedstawić do iednej części; skąd wypadnie $tu - \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}ct$, albo $\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$; zrobiwszy $\frac{1}{2}d - t = y$, i położywszy zamiast t onego wartość, będzie $uy = -\frac{1}{2}cy + \frac{1}{2}cd$, albo $uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}cd$. Robię potem $u + \frac{1}{2}c = x$, i mam $xy = \frac{1}{2}cd$; zrównanie należące do Hiperboli, uważoné między swými końcotycznymi, które wynayduia się w sposób następujący.

Zrównanie $\frac{1}{2}d - t = y$, znać daie, że jeżeli przez punkt A , początkowy ilościów u i t , poprowadzi się linia AB , równoległa linii PM , i równa linii $\frac{1}{2}d$, a potem jeżeli poprowadzi się druga linia QBC równoległa linii AP , to linie QM , rachowane w przeciwném rozumieniu względem PM , będą oznaczać ilości y . Jakóż $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2}d - t = y$; więc linia CQ , jest kierónkiem iednej z końcotycznych.

Drugie znowu równanie $u + \frac{1}{2}c = x$, znać daie, że jeżeli przedłuży się linia AP ku G , o ilość $AG = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}AR$, to linie GP albo onym równe CQ (poprowadziwszy linię GC równoległą linii PM), będą oznaczać ilości x ; więc punkt C jest środkiem, a linie CQ i CG są końcotycznymi. A zatem podług sposobu wyżey podanego (289), wykryśli się hiperbola między końcotycznymi, przechodząca przez punkt A , iak o tém znać daie zrównanie $xy = \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}d = AG \times AB = CB \times AB$, która przetnie koło w punkcie szukanym M .

Dd 4

Gdy-

Gdyby łuk EO miał więcej jak 90° , to natenczas jego dostawa AR padająca z przeciwnęj strony, byłaby przeczącą; dla czego w zrównaniach, trzeba rozumieć c być większy nad 180° a mniejszy od 270° iaki jest łuk $OEO'E$, to wstawia i dostawa jego byłyby przeczące; a zatem w tychże zrównaniach wyżej położonych, trzeba by odmienić znaki przed głoskami c i d .

Jeżeli przedłuży się linia GC o ilość $CG' = CG$, a linia CB o ilość $CB' = CB$, i jeżeli poprowadzą się linie $B'A$, i $G'A$, równoległe liniom CG' i CB' , tudzież jeżeli między temi liniami CG' i CB' (przedłużonemi nieokreślenie) jako między końcowymi, wykryśli się Hiperbola, przechodząca przez punkt A , to takowa Hiperbola spotka się z kołem w dwóch punktach A i M , tak iak pierwsza spotyka się z niem w punktach M i M'' . Z tych czterech punktów trzy, to jest M , M' i M'' są godne uwagi. Pierwszy z nich daie łuk EM , wynoszący trzecią część łuku zadanego EO . Drugi M' , daie łuk EM' wynoszący trzecią część łuku $E'O$, który jest spełnieniem łuku EO . Naostatek trzeci M'' , daie łuk EM'' wynoszący trzecią część łuku $OEO'E$ to jest łuku OE pomnożonego pół okręgiem.

Jakóż, łuk $E'O$ ma za wstawę i dostawę swoją linie RO i AR , tak iako i łuk EO , tylko iedynie z tą różnicą, że ilość AR uważana iako dostawa łuku $E'O$ większego nad 90° jest przeczącą; lecz ta odmiana nietyczy się tylko drugiego zrównania, i odmienia $xy = \frac{1}{2}cd$, na $xy = -\frac{1}{2}cd$, które jest zrównanie należące do Hiperboli $A'M$; i daie znać, że rozwiązanie tego przypadku, zależy na przecięciu M tego ramienia Hiperboli z kołem,

(zob.

(zobaczmy zaś w krótcie, dla czego punkt A niemoże zagadnieniu zadosyć czynić), więc $P'M$ jest wstawą łuku szukanego, w takowym drugim przypadku. Więc takowym zadanym łukiem jest łuk $E'M$, to jest że łuk $E'M$ jest trzecią częścią łuku EO .

A co się tycze trzeciego rozwiązania, jeżeli pomnoży się łuk EO o 180° , co wykonywa się zrobiwszy $E'O = EO$, to natenczas łuk $EOE'O$, mieć będzie za wstawę i dostawę linie RO i AR , które koniecznie muszą być równe liniom RO i AR , iedynie z tą różnicą, że pierwsze przypadając z przeciwnych stron tym drugim, są przeczące; więc ażeby mieć rozwiązanie odpowiadające temu przypadkowi, nie trzeba nic więcej, tylko ilości c i d rozumieć przeczącemi. Lecz ta odmiana nieczyni żadney odmiany w zrównaniu w które wchodzi c i d , to jest w zrównaniu $xy = \frac{1}{2}cd$; więc pierwsza Hiperbola, w swoim przecięciu M'' , powinna dać rozwiązanie tego trzeciego przypadku; więc $P''M''$ jest wstawą łuku szukanego w takowym trzecim przypadku; a zatem takowym łukiem, jest $E'M''$ to jest że łuk $E'M''$ jest trzecią częścią łuku $EOE'O$.

A tak toż samo wykryślenie, które służy do wynalezienia trzeciej części łuku zadanego A , służy oraz do wynalezienia trzeciej części, łuków od $180^\circ - A$, i od $180^\circ + A$.

Tu daie się przystosować to wszystko, co się powiedziało wyżej (335) o różnych przecinkach stózkowych, których można użyć do wykryślenia, połączwszy podług upodobania, dwa zrównania wyrażone w ilościach u i t iedno z drugim.

Co zaś do czwartego przecięcia, takowe zrekliśmy że przypada w punkcie A , co jest

oczy.

oczywista, bo hiperbola musi przechodzić przez punkt A' , który wynayduie się zrobiewszy $B'A' = AB$, a $B'C = CB$, skąd wynika że $AR' = AR$, a $R'A' = RO$; więc punkt A' należy do okręgu. Ale nowego rozwiązania niedaie, dla tego, że stał się wiadomym i wynalezionym przez takie działania, które niezawisły od zrównań rozwiązujących zagadnienie.

337. Jeżeli z równania $2tu + ct = du$ wyżey wynalezionego, wyciągnie się wartość głoski t , dla położenia iey w wzrównaniu $u^2 + t^2 = r^2$, to wzięwszy zamiast ilości $c^2 + d^2$ iey wartość r^2 , przeztawiwszy i uczyniwszy zeranie, będzie $4u^4 + 4u^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u - r^2c^2 = 0$, albo $4u^3(u + c) - 3r^2u(u + c) - cr^2 \times (u + c) = 0$, a rozdzieliwszy przez $u + c$ będzie, $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, zrównanie, w którym zawierać się muszą trzy przypadki wyżey rozebrane; a zatem powinno mieć trzy pierwiastki. Jakóż z wykryślenia pokazuje się, że głoska u ma w rzeczy samę trzy wartości; to jest AP , AP' , i AP'' ; z których dwie ostatnie przypadając z przeciwnę siroiny pierwszej wartości, daią znać, że to zrównanie ma trzy pierwiastki albo wartości głoski u , takie że z nich są dwie przeczące, to jest $u = -AP$, i $u = -AP'$, a trzecia jest twierdząca, to jest $u = AP$.

338. Zrównanie $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, albo $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, należy do przypadku który wyżey (160) nazwalismy *przybliżonym*; a ponieważ pierwiastkami tego równania są dostawy tych trzech łuków, to jest $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^\circ - EO)$ i $\frac{1}{3}(180^\circ + EO)$, więc przy pomocy Tablic wstawnych, można zawżę wynaléśdź trzy pierwiastki każdego równania trzeciego stopnia, w przypadku przerzeczonym, a to przez przybliże-

nie

nie się dostateczne i niezabawne, w sposób następujący. Oznaczywszy sobie przez $u^3 - pu + q = 0$, wszelkie jakiekolwiek zrównanie trzeciego stopnia w przypadku przybliżonym, i przystólówawszy go do zrównania $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, mieć będziemy $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, tudzież $-\frac{cr^2}{4} = q$; z pierwszego z tych dwóch zrównań, wyciąga się $r = \sqrt{\frac{4}{3}p}$, a z drugiego $c = -\frac{3q}{p}$.

Teraz jeżeli oznaczmy sobie przez R promień Tablic, to wynaydziemy dostawę odpowiadającą łukowi, EO taką iaka znayduie się w Tablicach, wyrachówawszy czwarty wyraz tęj proporcji, $r : c$ albo

$\sqrt{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} :: R : \text{do czwartego wyrazu; takowy czwarty wyraz to jest } \frac{3qR}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}} \text{ znale-$

ziony w Tablicach, będzie wstawą dopełnienia łuku EO ; a zatem dodawszy go stopniów do liczby stopniów wynalezionych, albo przeciwnym sposobem odjąwszy liczbę stopniów wynalezionych, od go stopniów, (podług tego jeżeli q położone w zrównaniu będzie ilością twierdzącą albo przeczącą), wypadnie łuk EO , który tu oznaczmy sobie przez A . To mając, wynayduią się w tychże Tablicach dostawy tych trzech łuków, jakoto $\frac{A}{3}, \frac{180^\circ - A}{3}, \frac{180^\circ + A}{3}$;

które żeby odpowiadały promieniowi r , to jest żeby były wyrażone w takichże częściach iak jest promień r , trzeba każdą z nich rozmnożyć przez $\frac{r}{R}$, albo przez $\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$; albowiem żeby do tego stanu przyprówdzić np. Dost. $\frac{A}{3}$ wziętą w Tablicach, trzeba wyrachować tę

tę proporcją, $R : \text{Dof. } \frac{A}{3} :: r$ do dostawy odpowiadający temuż łukowi, wziętemu w kole któreby miało za promień r , to jest do AP albo u ; a zatem trzy wartości głośki u , będą następujące, $u = \frac{\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}{R}$, $\text{dof. } \frac{A}{3}, u = \frac{\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}{R}$ $\text{dof. } \frac{180^\circ - A}{3}$, i $u = \frac{\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}{R}$ $\text{dof. } \frac{180^\circ + A}{3}$; w których, to uważać należy, aby dać znak — tym wartościom, których łuk przechodzić będzie 90° , chyba żeby był większy nad 270° . Te działania można znacznie ułatwić przy pomocy Logarytmów.

339. Obierzmy sobie jeszcze do rozwiązania to zagadnienie, powszechniejsze od tamtego króre rozwiązaliśmy wyżej (211):
fig. 53. Z danego punktu D (fig. 53), wiadomego z położenia względem dwóch linii AR , AP czy-
niących między sobą kąt także wiadomy, po-
prowadzić linią DP , tak ażeby ię część RP
zawarta między pomięzionemi liniami, równa-
ła się linii danej?

Z punktu D , poprowadźmy linią DS , prostopadłą linii AP przedłużonej, i linią DO równoległą linii AR ; poprowadźmy tak-
że z punktu R , linią RN prostopadłą linii AP .
Linie DO , DS , OS i AO rozumieją się byćż
wiadome, iuż to dla tego że punkt D jest wi-
adomy, iuż téż że kąt RAP albo onego spełnie-
nie $RAN = DOS$, jest także wiadome. A za-
tém oznaczmy sobie DO przez r ; DS przez p ;
 OS przez q ; AO przez d ; a linią której
linią RP ma się równać, przez c , niewiado-
me zaś AP i AR oznaczmy sobie przez u i t .

To

To założywszy, trójkąty DSO , RNA
podobne sobie, dadzą $DO : DS :: AR : RN$, i
 $DO : OS :: AR : AN$; to jest, $r : p :: t : RN =$
 $\frac{pt}{r}$, i $r : q :: t : AN = \frac{qt}{r}$, a zatem będzie NP
 $= \frac{qt}{r} + u$; trójkąt zaś prostokątny RNP , da-
ie $(RN)^2 + (NP)^2 = (RP)^2$; to jest $\frac{q^2t^2}{r^2} +$
 $\frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{p^2t^2}{rr} = cc$, albo (z przyczyny że
w trójkącie DSO , $p^2 + q^2 = r^2$), będzie t^2
 $+ \frac{2qut}{r} + u^2 = cc$.

Ale że mamy dwie niewiadome, więc
trzeba nam mieć dwa równania; a zatem
znowu dwa trójkąty DOP , RAP podobne
sobie, daią $DO : RA :: OP : AP$; to jest $r :$
 $t :: d + u : u$, więc $ru = td + ut$. Takie tedy
są dwa równania, które trzeba wykryślić,
chcąc mieć rozwiązanie zagadnienia. Pier-
wsze (319) należy do Ellipsy, a drugie do
Hiperboli.

Zeby pierwsze z nich wykryślić, robie
 $t + \frac{qu}{r} = y$, a działając iak wyżej w przykła-
dach temu podobnych, mieć będę $yy - \frac{qquu}{rr}$
 $+ uu = cc$, (albo z przyczyny że $-\frac{qquu}{rr} + uu =$
 $(\frac{rr - qq}{rr})uu = \frac{ppuu}{rr}$), będzie $yy + \frac{ppuu}{rr} = cc$.
Robię $u = \frac{lx}{n}$ (324); i mam $yy + \frac{pplx}{rrnn} =$
 cc , albo (z przyczyny że iednéy z niewiado-
mych l i n mogę naznaczyć wartość iaka mi
się spodoba), zrobiwszy, $l = r$, mieć będę yy
 $= cc - \frac{ppxx}{nn} = \frac{pp}{nn} (\frac{ccnn}{pp} - xx)$. To równa-
nie

nie przytóżowawszy do zrównania $yy = \frac{bb}{aa}$
 $(\frac{1}{4}aa - xx)$, znaleźlibyśmy wartości obu
 średnic dostawnych a i b , iakoto $a = \frac{2cn}{p}$,
 $a b = 2c$. Wynaydźmy teraz ich położenie
 i wartość ilości n ; ale ażebyśmy tém lepięj
 pojęli użycie tego wykryślenia, zmyślimy so-
 bie wprzód, iż naznaczymy sobie ilość u albo
 AP kolęno różne wartości, zmyślimy so-
 bie mówię, poprowadzone linie PM równe
 odpowiadającym wartościom ilości t , i ró-
 wnoległe linii AR , skąd powstanie linia
 krzywa, nad którą zabawiamy się teraz. To
 założywszy, jeżeli na linii AP , wznaczy-
 my linią AK wziętą podług upodobania,
 i poprowadziwszy linią KL równole-
 głą linii PM , któraby miała się do $AK ::$
 $q : r$, mieć będziemy $QM = PM + PQ = t +$
 $\frac{qu}{r}$, z przyczyny trójkątów sobie podobnych
 AKL, APQ ; więc $MQ = y$; więc AQ jest kie-
 rónkiem jednę z dwóch średnic na który ma-
 ią rachować się ilości x . Lecz zrównanie $u =$
 $\frac{1}{n}x = \frac{r}{n}x$, daie znać, że ilości x poczy-
 nia się tegóż samego czaśu co ilości u , więc ilo-
 ści x , oznaczają się przez linie AQ . Atym spo-
 sobem, zrównanie $u = \frac{rx}{n}$ przemienia się w to,
 $AP = \frac{r \times AQ}{n}$, z którego wyciąga się $n =$
 $\frac{r \times AQ}{AP}$, albo ta proporcya $AP : AQ :: r : n$;
 to jest $AK : AL :: r : n$; a że linia AK , jest
 wzięta podług upodobania, więc można ją
 rozumieć bydz $= r$, skąd wyniknie $n = AL$.

Nie-

Niezoftaie tedy tylko podług (252) wy-
 kryślić Ellipsę, którejby średnice dostawne
 czyniły między sobą kąt, równy kątowi AQM ,
 i były takie, ażeby ta, co ma za kierónek AQ ,

równała się ilości $\frac{2cn}{p}$, a ta co ma za kierónek

AR , równała się ilości $2c$. Takowa Ellipsa
 wykryślona, da rozwiązanie pierwszego zrów-
 nania.

Zeby zaś wykryślić drugie zrównanie
 $ru = dt + ut$ albo $ru - ut = dt$, podług fun-
 damentów poprzedzających, robię $r - t = y$;
 a potem $u + d = x$; przez co zrównanie do-
 piero wzwyż wymienione, przemienia się na
 to, $x'y = rd$, które należy do Hiperboli uwa-
 żonęj między kóncotycznymi. A zatem po-
 dług zrównania $r - t = y$, bierze się na linii
 AR ilość $AT = r = OD$; to jest przez punkt
 D prowadzi się linia DTV równoległa li-
 nii AP ; natenczas linie VM , wyrażać będą
 ilości y , rachując się od V ku M , to jest
 w rozumieniu przeciwnem, iak się rachują li-
 nie PM ; albowiem $VM = PV - PM = r -$
 t ; więc $VM = y$. Potem podług zrówna-
 nia $u + d = x$, bierze się $AO = d$, to jest, że
 przez punkt D poprowadzi się linia DO
 równoległa linii AT ; a natenczas linie DV
 będą wyrażać ilości x ; bo $DV = OP = OA$
 $+ AP = d + u$. A zatem między liniami DO
 i DV iako kóncotycznymi, wykryśli się Hi-
 perbola, przechodząca przez punkt A ; z przy-
 czyny że $x'y = rd = AO \times AT$. Takowa Hi-
 perbola spotka się z Ellipsą w dwóch punktach
 M i M' ; przez które poprowadziwszy linie
 $MR, M'R$, równoległe linii AP , pokażą się
 dwa punkta R i R' , takie, że jeżeli przez nie
 i przez punkt D poprowadzą się linie DRP ,
 $DP'R$; części PR i $P'R$ zawarte między

ra-

ramionami kątów RAP , $R'AP$ równych ieden drugiemu, takowe mówię części, równać się będą daney linii c .

Jeżeli przedłużymy końcotyczne, wykryśli się Hiperbola, naprzeciw położona fig. 54. $M''A'M'''$ (fig. 54), to takowa w przypadku spotkania się z Ellipsą, wskaże dwa nowe punkta M'' , M''' , przez króre poprowadzimy linie równoległe linii AP , pokażą się na linii AT dwa nowe punkta R'' , R''' takie, że jeżeli przez nie i przez punkt D poprowadzą się dwie linie, to części takowych linii zamknięte między ramionami kąta TAS , będą także równać się daney linii c . Takim tedy sposobem, mówiąc w powżeczności, należy sobie postąpić, w rozwiązywaniu Zagadnień określonych, kiedy nieprzechodzą czwartego stopnia.

340. Gdyby rozwiązując zagadnienie, nieużyło się było tylko iedney niewiadomey, to iednakże niemniéy może służyć ten sposób, wprowadzimy nową niewiadomą. Np. gdyby zadane było to zagadnienie; *Mając wiadomą strzałkę CP ucinka kulowego (fig. 55), i bryłowość drugiego ucinka mającego za strzałkę resztę PM średnicy, iakby wynaléżdź średnicę kuli?*

Niechay będzie r : c stosunek promienia do okręgu, a , strzałka CP ; t , strzałka PM ; to $a+t$ będzie średnicą koła; a bryłowość ucinka mającego za strzałkę PM , będzie wyrażona przez $\frac{c}{2r} \times tt (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}t)$. Lecz że ta bryłowość rozumie się bydz wiadoma, przeto oznaczam ją sobie przez $\frac{c}{2r} \times \frac{1}{2}aap$, gdzie p iest ilością wiadomą. Mieć tedy będzie $\frac{c}{2r} tt (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}t) = \frac{c}{2r} \cdot \frac{1}{2}aap$, albo $t^3 + 3att - aap = 0$. Ze-

Zeby wykryślić to zrównanie, robie $t^2 = au$, a polozywszy tę wartość w zrównaniu dopiero poprzedzającym, mieć będę, $ta^2 + 3a^2u - a^2p = 0$; zrównanie należące do Hiperboli uważonéy między końcotycznemi, które wykryśliwszy przy pomocy zrównania $t^2 = au$ należącego do paraboli, z spólnego przecięcia się tych dwóch linii krzywych, pokaże się wartość ilości t .

Tym sposobem możnaby wynaléżdź promień wewnętrznego wydrążenia bomby, któryby była wiadoma waga, średnica i strzałka odcinka kulowego, składającego dno bomby.

Mieliśmy także i tu, iak uczyniliśmy w Jeometryi, położyć Przodatek niektórych użytecznych Zagadnień Artylerycznych, rozwiązyjących się przy pomocy fundamentów zawierających się w tym Tomie, ale odkładamy to sobie raczej do następnego Tomu, gdzie dla nich będzie lepsze miéysce, po zasiągnięciu dalszych wiadomości.

KONIEC DRUGIEGO TOMU.



Tom II.

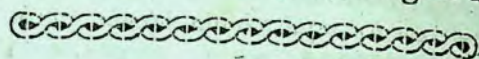
Ee

ZBIOR



ZBIOR

Materyi zawartych w tym drugim Tomie.



ROZDZIAŁ I.

W którym dają się fundamenta rachowania ilościów Algebraicznych.

Co jest Algebra Karta 1.	nie w ilościach iedno-
O działaniach fundamentalnych, z ilościami uważanemi w powszechności. - - - 3.	stównych. Karta. 9.
O dodawaniu i odę-mowaniu. - - - 4.	Co jest wykładnik. 11.
Jak się wskazują te działania. - - - 4. 5.	Jak wskazuje się mno- żenie w ilościach wie- lostównych. - - - 19.
Co to jest współczynnik 5.	O Dzieleniu, i iak wskazuje się to działa- nie. - - - 20. 21.
Co się ma rozumieć przez wyrazy ilości. 7.	Co znaczy ilość mają- ca za wykładnika zero. 22.
Co jest ilość iednosto- wna, dwustówna, trzy- stówna, i wielostówna. 7.	O sposobie wynalezie- nia największego wspólne- go dzielnika dwóch ilo- ściów literalnych. - 32.
Znaki ilościów twier- dzących i ilościów prze- czających. - - - 9.	O ułamkach literal- nych. - - - 34.
O mnożeniu, i iak wskazuje się to działa-	O zrównaniach. - 40.
	O znaku równości i o częściach zrównania. tam.
	Cze-

Czego potrzeba do rozwiązania przez Al- gebrę Zagadnień, które mogą być zadane względem ilościów. k. 41.	dnę niewiadomą. kar. 84.
O zrównaniach pier- wszego stopnia z iedną niewiadomą. - - - 42.	O przypadkach w któ- rych zadane zagadnienia bywają nieokreślone, choć będzie tyle zrów- nań ile jest niewiado- mych; i o przypadkach w których zagadnienia bywają niepodobne do rozwiązania. - - - 92.
Reguła do przedstawienia ilościów z iedną czę- ścią zrównania do dru- giej. - - - 43.	O zagadnieniach nie- określonych. - - - 97.
Reguła do oswobo- dzenia niewiadomej z mnożnika. - - - 46.	O zrównaniach dru- giego stopnia z iedną niewiadomą. - - - 104.
Reguła do wyrugó- wania mianowników. 48.	Co jest znak Pier- wiastkowy. - - - 105.
Przystosowanie fun- damentów poprzedzają- cych, do rozwiązania niektórych prostych za- gadnień. - - - 51.	Dla czego każde zrów- nanie drugiego stop- nia, zawsze ma dwa pierwiastki. - - - 106.
Reguła do wyrażenia w zrównaniu danego za- gadnienia. - - - 52.	Kiedy takowe dwa pierwiastki, są tylko zmyślone albo wcale niepodobne. - - - 108.
O ilościach twierdzą- cych, przeczących, i co rozumie się przez nie 65.	Potrzebne przygotó- wanie do rozwiązania zrównania drugiego sto- pnia. - - - tamże.
O zrównaniach pier- wszego stopnia z wielą niewiadomymi. - 73.	Reguła do rozwią- zania zrównania dru- giego stopnia. - 110.
Reguła do wyrugowa- nia niewiadomych. 74. 75.	Przystosowanie tej reguły do rozwiąza- nia niektórych zaga- dnień. - - - 113.
Inszy sposób wyrugó- wania niewiadomych. 81.	O podnoszeniu do ró- żnych stopniów, ilościów iednostównych, o wy- ciąganiu z nich pierwia- stków
Przystosowania reguł poprzedzających, do roz- wiązania niektórych za- gadnień, zawierających w sobie więcej iak ie-	

stków i o rachunkach
ilościów poprzedzonych
znakami pierwiastko-
wymi, iako téż o tych
co mają wykładniki k. 123.

Reguła do podnieście-
nia ilości iednoślowney
do stopnia zadanego. tamż.

Reguła do wyciągnię-
nia pierwiastka stopnia
zadanego, z ilości ie-
dnoślowney. - 126.

Reguła przyprowa-
dzenia do spólnego wy-
kładnika, wszystkich wy-
kładników odpowiadają-
cych różnym znakom
pierwiastkowym. - 133.

Reguła do przedsta-
wienia ilości z liczni-
ka do mianownika, i
odwrotnie. - 137. 138.

O podnoszeniu do ró-
żnych stopniów ilościów
wielosłownych, i o wy-
ciąganiu z nich pier-
wiastków. - 139.

Podnoszenie do ró-
żnych stopniów ilościów
dwusłownych. - 152.

Podnoszenie do ró-
żnych stopniów, ilościów
wielosłownych. - 155.

O wyciąganiu pier-
wiastków z ilościów
wielosłownych. - tamże.

O sposobie przybli-
żenia się do pierwia-
stka ilościów literal-
nych, kiedy nie są sto-
pnia doskonałego. - 163.

O zrównaniach z dwi-
ma niewiadomymi, prze-
chodzących drugi sto-
pień. - karta 170.

O zrównaniach o dwu
wyrazach. - 173.

O zrównaniach które
mogą być rozwiąza-
ne, w sposób przepisa-
ny do zrównań dru-
giego stopnia. - 176.

O składaniu zrównań 177.

O liczbie pierwiastków
znaydujących się w ia-
kiemkolwiek zrówna-
niu. - 178.

O stosunku iaki zachod-
zi między pierwiastka-
mi zrównania, i między
spółczynnikami różnych
wyrazów iego. - 183.

O przekształcaniach
zrównań iaki z niemi
przedsiębrać można 187.

Reguła do wyrugó-
wania mianowników,
a żeby oraz pierwsze-
mu wyrazowi nie dać
spółczynnika. - 188.

Reguła wyrugowa-
nia drugiego wyrazu
z iakiegokolwiek zrów-
nania. - 189.

O rozwiązaniu po-
wszechnym zrównań
składanych. - 190.

Przystosowanie tego
sposobu do zrównań
trzeciego stopnia. - 193.

Co się ma rozumieć
przez

przez przypadek przy-
bliżony. - karta 196.

Przystosowanie do
czwartego stopnia. 197.

O spółmiernych dziel-

nikach zrównań. kar 198.

O sposobie przybli-
żenia się do pierwia-
stków, zrównań składa-
nych. - 204.

ROZDZIAŁ II.

W którym daie się
Przystosowanie

Algebry do Arytmety-
ki i do Jeometryi kart. 207.

Jakim sposobem wyra-
żenie Algebraiczne ia-
kieykolwiek własności,
prowadzi do rozwiąza-
nia tylu zagadnień, ile
znaydować się będzie
w takowem wyraże-
niu różnych ilościów. 208.

Własności powsze-
chne Progresyów A-
rytmetycznych. - 209.

O summowaniu wy-
razów Progresyi Aryt-
metyczney iakięykol-
wiek podniesionych do
różnych stopniów. 222.

Przystosowanie tego,
do wyrachowania liczy-
by kul zawierających
się w Piramidzie czwo-
rógatney i podługney. 225.

Złożenie niektórych
innych rzędów. - 229.

Przystosowanie do wy-
rachowania liczby kul,
umieszczonych w pi-
ramidzie trójkątney. 232.

Własności i użycia

Progresyów Jeometry-
cznych. - 234.

O wykryślanu Jeo-
metrycznym ilościów

Algebraicznych. - 242.

Wykryślenie ilościów
niepierwiastkowych o
iednym wymiarze. 244.

Wykryślenie ilościów
niepierwiastkowych o
dwu wymiarach. - 248.

Wykryślenie ilościów
niepierwiastkowych o
trzech wymiarach. 249.

Wykryślenie ilościów
pierwiastkowych dru-
giego stopnia. - 250.

Różne zagadnienia
Jeometryczne, i uwa-
gi tak względem spo-
sobu wyrażenia ich w
zrównaniach, iako téż
względem różnych ro-
związań wynikających
z tych zrównań. - 256.

Reguła względem wy-
boru linii, która ma
być wzięta za niewia-
domą, w daném zaga-
dnieciu. - 283.

Inne przystosowania
Algebry tyczące się
ró

różnych materyi. k. 297.
 O Liniiach krzywych
 w powszechności; a w
 szczególności o Prze-
 cinkach stożkowych. 308.
 Jakim sposobem, zrów-
 nanie należące do li-
 nii krzywej, może słu-
 żyć do wykryślenia ta-
 kowej linii przez pun-
 kta, i do wyróżnie-
 nia ię własnościów. 311.
 O Ellipsie. - 318.
 Różne sposoby wy-
 kryślenia ię. - 320.
 Co się rozumie przez
 osi, śródpały i przez
 wierszchołki osiów. 323.
 Co jest palirzędna. 324.
 Przyrównanie koła
 do Ellipsy. - 325.
 Sposób przytknięcia
 styczney do Ellipsy. 328.
 Naznaczenie podty-
 czney, styczney, mię-
 dzyległey, i przyty-
 czney. - 330.
 Co się rozumie w
 Ellipsie przez średni-
 ce dostawne, i jakie są
 własności rzędnych o-
 nym odpowiadających 335.
 Własności średnic
 dostawnych. - 339.
 Sposób naznaczenia
 osiów, przy pomocy
 średnic dostawnych
 i kąta iaki czyni ie-
 dna z drugą. - 343.
 O Hiperboli. - 344.
 Różne sposoby wy-
 kryślenia ię. karta 346.
 Co się rozumie w
 Hiperboli przez osi,
 śródpały i przez wier-
 szchołki osiów. - 347.
 Palirzędna w Hiper-
 boli. - 349.
 Sposób przytknięcia
 styczney do Hiperboli 352.
 Naznaczenie Podty-
 czney, Styczney Mię-
 dzyległey, i Przyty-
 czney. - 353.
 O Końcotycznych, co
 są i iak się naznaczają 355.
 Co się rozumie w
 Hiperboli przez śrze-
 dnicę dostawne. - 361.
 Własności rzędnych
 onym odpowiadają-
 cych. - 363.
 Własności średnic
 dostawnych. - 365.
 Sposób wykryśle-
 nia Hiperboli, mając
 wiadome średnice do-
 stawne i kąt iaki czy-
 ni jedna z drugą. - 366.
 O Hiperboli między
 końcotycznymi. - 367.
 Co się rozumie przez
 stopień Hiperboli. 369.
 Własności linii po-
 prowadzonych między
 Hiperbolą i między ię
 końcotycznymi. - 370.
 Sposób nakryślenia
 Hiperboli, mając wia-
 dome końcotyczne, i

ieden punkt należący do
 téy linii krzywej k. 373.
 O Paraboli. - tamże.
 Co się rozumie w Pa-
 raboli przez osi, wiersz-
 chołek, śródpał, przez
 linią kierónkową i
 przez palirzędną. 374.
 Sposób wykryślenia
 téy linii krzywej. 376.
 Własności rzędnych
 należących do osi. 377.
 O styczney, Podty-
 czney, i Przytyczney
 w Paraboli. - 377-378.
 O średnicach Para-
 boli, i o Palirzędnych 379.
 Własności Paraboli,
 względem ię śrze-
 dnic. - 380.
 Sposób wykryślenia
 Paraboli, mając wiado-
 mą średnicę, i kąt ia-
 ki z nią czyni styczną
 przytkniętą do ię
 wierszchołka. - 381.
 Skąd i iak powstaia
 w Stożku Przecinki
 stożkowe. - karta 382.
 Uwagi nad zrówna-
 niami należącymi do
 Przecinków stożko-
 wych, i znaki szcze-
 gólne rozróżniające
 takowe zrównania od
 innych. - 400.
 Sposoby naprowa-
 dzenia do Przecinków
 stożkowych, wszelkie-
 go zrównania drugie-
 go stopnia z dwiema
 niewiadómymi, kiedy
 takowe zrównanie wy-
 raża rzecz podobną. 415.
 Przytósłowanie po-
 przedzających wiado-
 mości, do rozwiąza-
 nia niektórych Zaga-
 dnień nieokręślonych 416.
 Przytósłowanie tych-
 że fundamentów, do ro-
 związania niektórych
 zagadnień okręślo-
 nych. - 432.

KONIEC ZBIORU MATERYI.



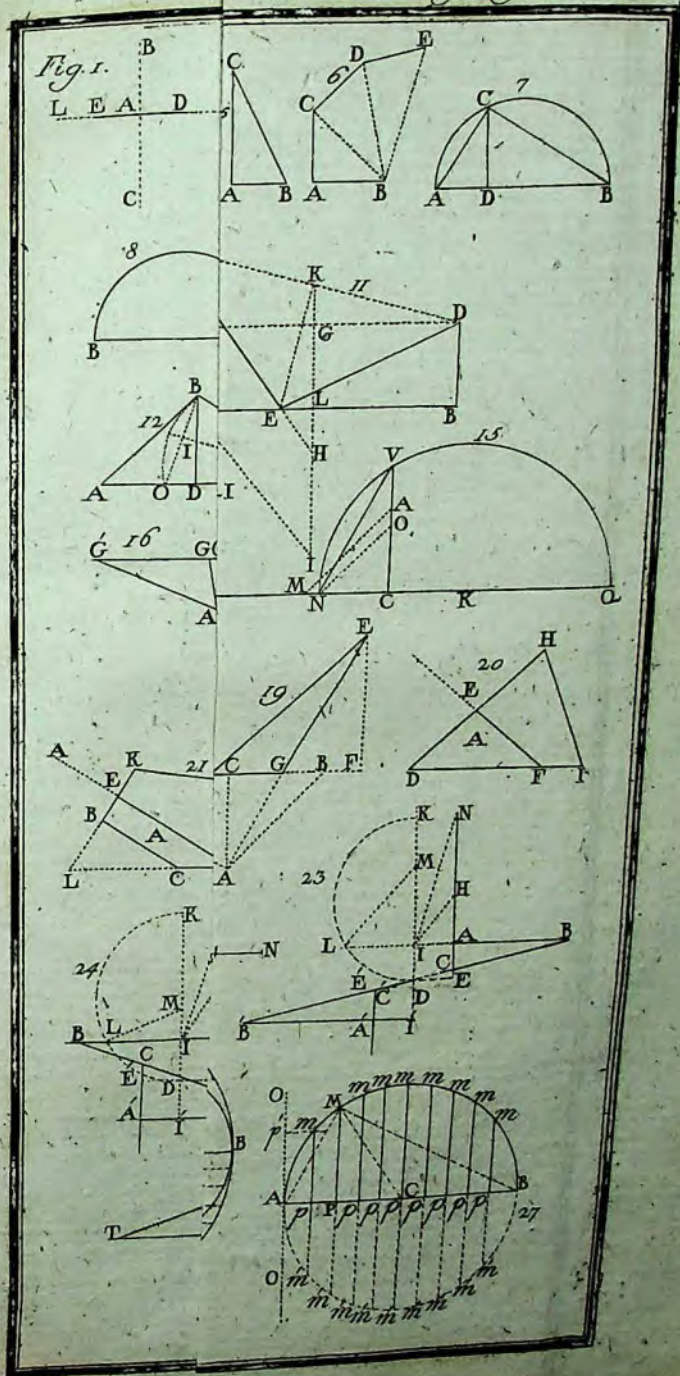


Fig. 1.

