



Digitization of the scientific library of the State Museum of Natural History of NAS

Bezout P. Nauka matematyki do użycia artyleryi francuzkiej napisana przez P. Bezout, Towarzysza Akademij Nauk, i Marynarskiej etc. a dla pożytku pospolitego, osobliwiey dla Korpusu Artyleryi Narodowey na Polski ięzyk przełożona z rozkazu i nakładem Jego Królewskiej Mci. / P. Bezout. – w Warszawie: W Druk.XX. Missyonarzow, 1781. T. III:. Fundamenta rachcunkow – [4], 432 s., 6; mechaniki część 6 pl.

Download a copy of the book from the site:

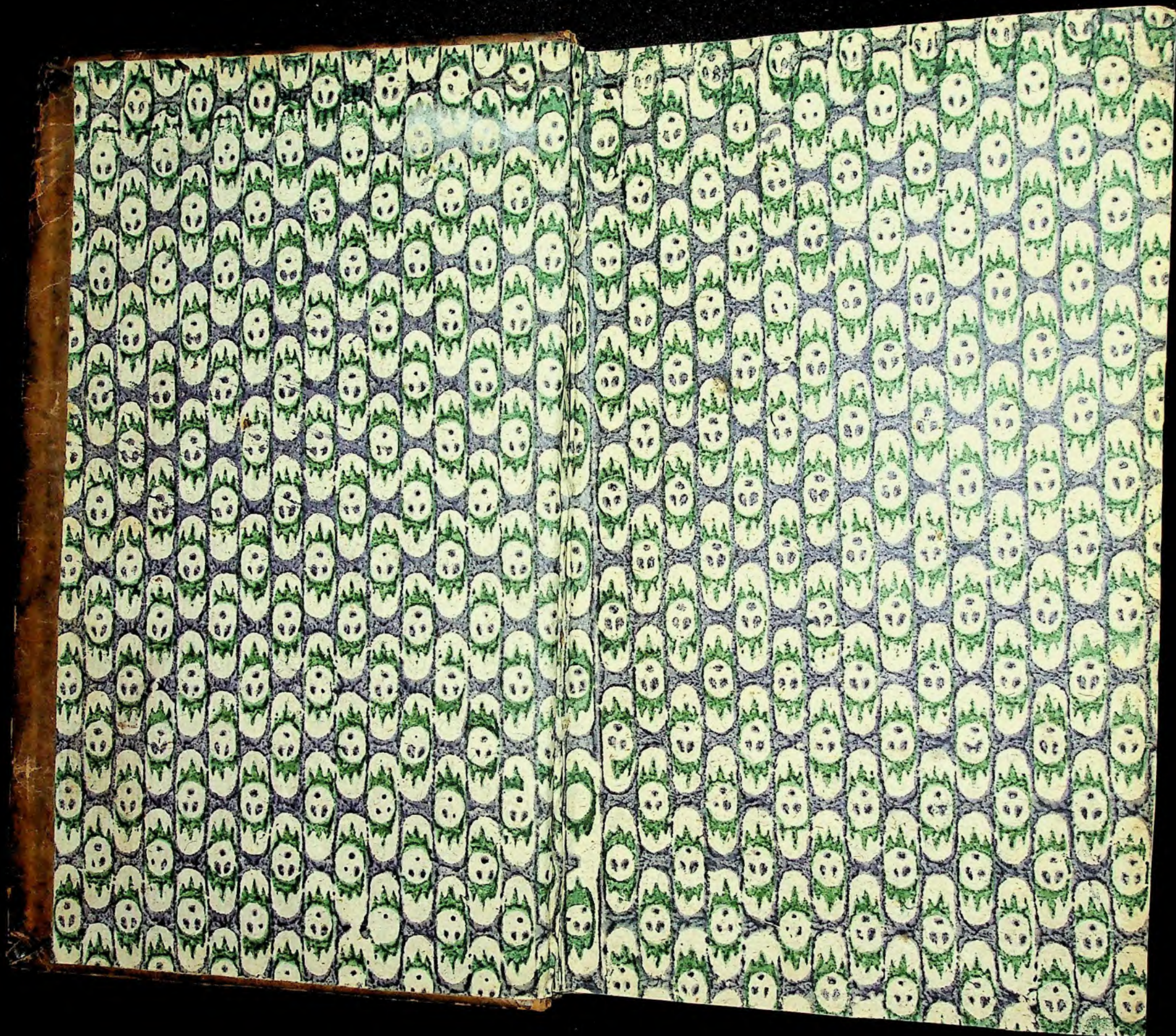
<http://libsmnh.com.ua>

Permanent link to the book page:

http://libsmnh.com.ua/books/bezout_p/nauka_matematyki_do_uzycia_artyleryi_t3/

Biblioteka Muzeum im. Dzieduszyckich
we Lwowie.

№ 27a № 9



4312

Nr. inwentarza

B - 2784.

NAUKA

MATEMATYKI.

do użycia

ARTYLERYI FRANCUZKIEY

napisana przez P. Bezout

Towarzysza Akademij Nauk, i Marynarzkiej &c.
a dla pożytku pospolitego, osobiście dla

KORPUSU ARTYLERYI
NARODOWEY

na Polski język

PRZEŁOŻONA

z Rozkazu i Nakładem

JEGO KROLEWSKIEY MCI.

PANA NASZEGO MIŁOSCIWEGO

do druku

PODANA

TOM TRZECI

Zawierający w sobie Fundamenta powszechnie
MECHANIKI i HIDROSTATYKI; poprze-
dzone Rachunkami służącemi za wstęp
do Nauk Fizyczno-Matematycznych.

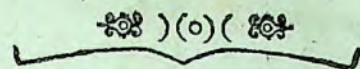


WARSZAWIE
W Drukarni XX. MISSIONARZOW.

R. P. M. DCC. LXXXII.



2990



Z B I O R

*Wyrazów Polskich użytych w tym trzecim Tomie, albo nowych albo mało znaniomych, niepowtarzając tych, które już położyły się na początku każdego z dwóch poprzedzających Tomów.**

Bezwładność	- - -	<i>Inertia.</i>
Biegun w Rurmusach.	-	<i>Embolus.</i>
Całka.	- - - - -	<i>Integralis.</i>
Całkowy rachunek.	- -	<i>Calculus integralis.</i>
Ciało Rurmuśu.	- -	<i>Corpus Antliae</i>
Granica (naywiększości i naymniejszości w liniach krzywych).	-	<i>Limes.</i>
Graniczny środek	- -	<i>Metacentrum.</i>
Kibić w Wadze.	- -	<i>Veſtis.</i>
Klin wałkowy.	- -	<i>Ungula cylindrica.</i>
Kołowrot.	- - - -	<i>Revolutio.</i>
Naymniejszość.	- -	<i>Minimum.</i>
Naywiększość.	- - -	<i>Maximum.</i>
Niezmiérny.	- - -	<i>Infinitus.</i>
Odmieńna.	- - - -	<i>Variabilis.</i>

Po-

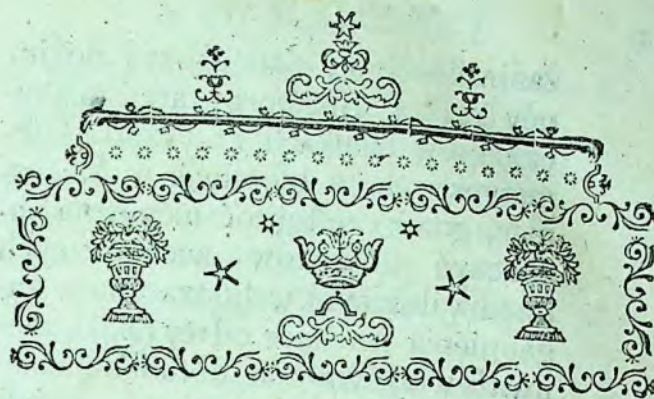
* *Lubo wytłómaczenia tych wyrazów w przeciągu tego Tomu, przez omyłkę kładły się po Francuzku, atoli stosując się do pierwszych dwóch Tomów, daliśmy je tu po Łacinie iak w tamtych.*

Pomiar (Logarytmów).	<i>Basis.</i>
Pomierny. - - - -	<i>Finitus.</i>
Popęd - - - -	<i>Impulsio.</i>
Różniczkowy Rachunek	<i>Calculus differentialis.</i>
Rozwiyka, rodzaj linii krzywéy. - - -	<i>Evoluta.</i>
Rzędy rosnące. - - -	<i>Series divergentes.</i>
Rzędy ubywające. - -	<i>Series convergentes.</i>
Ruchadło. - - - -	<i>Mobile.</i>
Rurmus. - - - -	<i>Antlia</i>
Rurmus ciągnący. - -	<i>Antlia aspirans.</i>
Rurmus deptający. - -	<i>Antlia calcans.</i>
Scalkować. - - - -	<i>Integrare.</i>
Składka w Bryłach. - -	<i>Elementum.</i>
Stateczna ilość. - - -	<i>Quantitas constans.</i>
Swobodny. - - - -	<i>Liber.</i>
Tłoczliwy. - - - -	<i>Compressibilis.</i>
Układ. - - - -	<i>Systema.</i>
Ułamek niepiérwiastkowy	<i>Fraçtio rationalis.</i>
Ważki do rospłynów. -	<i>Areometrum.</i>
Wypiętnówanie, (płaz- czyzny). - - -	<i>Projectio.</i>
Związek (ilościów). -	<i>Funçtio.</i>

Pompa



FUN-



FUNDAMENTA RACHUNKOW.

SŁUŻĄCYCH ZA WSTĘP DO NAUK FI-
ZYCZNO-MATEMATYCZNYCH.

WIADOMOSCI POPRZEDZAJĄCE.

I. **D**otąd zabawialiśmy się re-
gulami służącemi do ra-
chowania ilościów, trafiających się
bądź w jakimkolwiek stanie wielko-
ści. Lecz nieuważaliśmy różnych
odmian, przez które takowe ilości
przechodzą do tego lub owego sta-
nu wielkości. Tén nowy sposób
Tom III. A2 uwa-

żania ilościów, daie okazyą do in-
néy części *Rozbioru*, arcy użyte-
cznego w Naukach Fizyczno-Mate-
matycznych, a osobliwie w Mecha-
nice, gdzie częstokroć niemożna na-
znaczyć stósfunków zachodzących
międzyilościami, wchodzącemi w za-
gadniénia zależące od téy nauki, nie-
uważywłszy wprzód stósfunków mię-
dzy różnemi odmianami ich, to jest
między przyczynkami lub uiątkami
które odbieraiają co moment.

Nim tedy przystąpimy do Me-
chaniki, wprzód zabawimy się nieco,
tym gatunkiem rachunków, których
célem jest, rozbiierać ilości na części
pierwiałtkowe, i z takowych czę-
stek powracać nazad do samychże
ilościów. Mówiąc właściwie, nie-
jestto żaden nowy sposób rachowania
który tu mamy przełożyć, ale tylko
przystósowanie sposobów podanych
w trzeciéy części, a nawet ułatwie-
nie albo przyprowadzenie do prost-
szego stanu tamtych reguł.

2. Zakładamy sobie tu dwa za-
miary. Pierwszy ma nauczyć, iak
zstępuje się od ilościów do *skła-
dek* (elements) z których powstały
te

te ilości; sposób zaś iakim to wyko-
nywa się, nazywa się Rachunkiem *Ró-
żniczkowym* (Calcul differentiel).
Drugi pokaże nam drogę do po-
wrócenia od *składek* do samych
ilościów; a sposób takowy nazwié-
my rachunkiem *cálkowym* (Calcul
Integral).

3. Ponieważ uważać mamy
ilości stósfownie do ich pierwiałt-
ków, to jest stósfownie do przyczyn-
ków nieskończenie małych którými
się pomnażaią, przeto nim postąpi-
my dálej, należy wprzód wytłóma-
czyć się co rozumiemy przez ilości
nieskończenie albo raczéy niezmiér-
nie małe, niezmiérne, i. t. d. i po-
kazać porządek iaki trzeba zacho-
wać w rachunkach między temi ilo-
ściami.

Mówimy tedy, że ilość jest
niezmiérna albo niezmiérnie mała
względem drugiéy, kiedy niemożna
naznaczyć żadnéy ilości tak wiel-
kiéy albo tak maléy, któraby wyra-
żała stósfunek między pominionémi
dwíema ilościami, to jest liczbę ra-
zy, iaką mieści w sobie iedna druga.

4. Ponieważ wszelka ilość, póki nieprzeżestanie byż ilością, niemoże przeżać byż iposobną do przyięcia zawżse iakiego pomnożenia albo umnięyszenia; przeto téż niemoże byż żadney ilości tak małej albo tak wielkięy względem drugięy ilości, ażeby niemożna było myśłą poiąć trzecięy ilości, niezmiérnie mnięyszy lub niezmiérnie więkzsy.

Np. ieżeli x iest niezmiérne względem a , lubo w takim razie niepodobna iest naznaczyć między niemi siółunku, to atoli nieprzeszkadza mi wystawić sobie w myśli trzecią ilość, któraby była taką względem x , iaką iest x względem a , to iest, któraby była czwartym wyrazem proporcji poczynaiący się od tych trzech, $a : x :: x :$; takowy tedy czwarty

wyraz, iakim iest $\frac{x^2}{a}$, będzie niezmiérnie więkzsy od x ; albowiem on zawiera w sobie x tyle razy, ile rozumie się że x zawiera w sobie a . Podobnież nic mi nieprzeszkadza, dla czego niemógłbym poiąć myśłą czwartego wyrazu téy proporcji, $x : a :: a :$; a takowy znowu czwarty wyraz, iakim iest $\frac{a^2}{x}$, będzie

niezmiérnie mnięyszy od a ; ponieważ powinien mieścić się w a tyle razy, ile rozumie się, że a mieści się w x . W téy mierze umysł niczem się nieogranicza, i można poymować ieszcze nową ilość, któraby znowu była niezmiérnie mała względem ilości

a^2

$\frac{a^2}{x}$, tak iako ta iest niezmiérnie mała względem a . Takowe ilości nazywaią się ilościami niezmiérnemi, albo niezmiérnie małemi różnych stopniów.

Powiedziawszy w powżeczności, mnogość z dwóch ilościów niezmiérnych, albo niezmiérnie małych piérwszego stopnia, iest niezmiérnie więkza albo niezmiérnie mnięysza, od każdego z dwóch czynników które ią składaia.

Jakóż, maiąc $xy : y :: x : 1$, ieżeli x iest ilością niezmiérną, to w sobie będzie zawierać iedność, niezmiérną liczbę razy; więc znowu xy zawierać musi w sobie y , niezmiérną liczbę razy.

Temu podobne rozumowanie, pokazuje, że mnogość albo stopień ilości iakięy od tylu wymiarów ile się spodoba, w któreyby wszystkie czynniki były niezmiérne piérwszego stopnia, będzie niezmiérna takiego stopnia, iaka będzie liczba czynników składaiających tę mnogość.

I tak, ieżeli x iest niezmiérne, to x^4 będzie niezmiérne w czwartym stopniu, to iest, niezmiérnie więkze aniżeli x^3 , które znowu iest niezmiérnie

A 4

nie

nie większe aniżeli x^2 , a to niezmiernie większe aniżeli x .

Jakóż, $x^4 : x^3 :: x^3 : x^2 :: x^2 : x :: x : 1$. Przeciwnie zaś trzeba rozumieć, gdyby x było niezmiernie małe; bo natenczas x^4 byłoby niezmiernie małe w czwartym stopniu, to jest niezmiernie mniejsze aniżeli x^3 , to zaś niezmiernie mniejsze aniżeli x^2 , a znowu to ostatnie, niezmiernie mniejsze aniżeli x .

Ale jeżeli czynniki składające mnogość, niewszystkie są niezmiernie, to natenczas stopień niezmierności, nie zależy tylko od liczby sławnych czynników niezmiernych.

J tak axy , jest tylko tego stopnia co xy ; albowiem $axy : xy :: a : 1$; i tego ostatniego stosunku wartość może być naznaczona, jeżeli a jest ilością pomierną.

Uważmy dobrze tę różnicę w stosowaniu ilościów niezmiernych, albo niezmiernie małych, już to między sobą, już też do innych ilościów, względem których pierwsze ilości są niezmiernie albo niezmiernie małe. Jeżeli x , jest ilością niezmierną względem a , to niemaż nic takiego co by mogło pomierzyć stosunek między niemi zachodzący: ale w témże przypuszczeniu, stosunek między

x .

x , a między x rozmnożoném, albo rozdzieloném przez iakąkolwiek bądź liczbę pomierną, będzie stosunek pomierny; i tak x niezmiernie albo niezmiernie małe, nie jest stosowne do a , jeżeli to a rozumie się byż liczbą pomierną; ale toż x nie jest niezmiernie ani niezmiernie małe względem ax ; bo x ma się do $ax :: 1 : a$.

5. Zeby to wyrazić w rachunku, że ilość x jest niezmierna względem innéy ilości a , albo co na iedno wychodzi, ażeby wyrazić, że a jest niezmiernie małe względem x , trzeba w wyrażeniu Algebraiczném, w którémby te ilości znajdowały się razem, odrzucić wszystkie stopnie ilości x , niższe od naywyższego stopnia, a zatém i wszystkie wyrazy w których x nieznayduie się.

Np. jeżeli w wyrazie $\frac{3x+a}{5x+b}$, x rozumie się byż niezmiernie względem a i b , to trzeba odrzucić a i b , co da $\frac{3x}{5x}$ albo $\frac{3}{5}$, na wartość ilości $\frac{3x+a}{5x+b}$, kiedy x jest niezmiernie.

ne. Jakóż $\frac{3x+a}{5x+b}$, jest iedno co $\frac{3+\frac{a}{x}}{5+\frac{b}{x}}$ (rozdzie-

dzieliwszy wszystko górą i dołem przez x);
lecz kiedy x rozumie się niezmiernie względem

do a i b , to ułamki $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{x}$ wyrażające stó-

funkki zachodzące między ilościami a , b , i x ,
powinny być koniecznie odrzucone; bo po-
dług tegoż samego przypuszczenia, takowe
stófunkki, są zawsze mniejsze od wszelkiej
ilości chociażby ią sobie iak najmniejszą w
myśli wystawić; więc w takim razie, ilość
wyżey zadana musi wychodzić na $\frac{3}{2}$.

Podobnież gdyby było $x^2 + ax + b$, to
jeżeli x jest niezmiernie, ta ilość wyszłaby
na x^2 . Jakóż wiedzieliśmy dopiero, że podług
tego przypuszczenia, trzeba odrzucić b wzglę-
dem ax ; lecz znowu x^2 jest niezmiernie
względem ax , bo $x^2 : ax :: x : a$; więc z
tęże przyczyny, należy odrzucić ax wzglę-
dem x^2 ; więc przerzeczona ilość, wychodzi
na x^2 .

Przeciwnym sposobem, gdyby
 x było niezmiernie małe, nie trzeba-
by zachować tylko te wyrazy, w
których wykładniki należące do x
będą najmniejsze.

Itak, $x^2 + ax$, wychodzi na ax , jeżeli x ro-
zumie się niezmiernie małe; $\frac{ax + b}{cx + d}$, wychodzi
na $\frac{b}{d}$, kiedy i tu x rozumie się niezmiernie
małe.

Nietrzeba się obawiać, ażeby te
odrzućenia, odmięniły wnioski, iakie
wy-

wynikać mają z rachunków, w któ-
rych się użyły. I owszém niemożna
inaczey, tylko przez te odrzućenia,
wyrazić to co ma być wyrażono,
to jest że x jest niezmiernie, albo
niezmiernie małe, i tylko przez nie
przychodzi się do wniosku zgadzają-
cego się z przypuszczeniem na przód
założonem. Albowiem rozumiejąc x
niezmiernie, gdyby się nie odrzuciły
wyrazy podług poprzedzających na-
uki; gdyby np. z ilości $\frac{3x + a}{5x + b}$ albo

$\frac{3 + \frac{a}{x}}{5 + \frac{b}{x}}$ nie odrzuciły się wyrazy $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{x}$,

to ponieważ w takim razie, rachun-
ek nieokazowałby, że ilości $\frac{a}{x}$ i $\frac{b}{x}$
są stófunkami mniejszemi nad wszel-
kie, iakie tylko pomyśleć można,
przeto takowy rachunek niemógł-
by dać tego czego się szuka, to jest
wartości przerzeczoney ilości, w
takim razie, kiedyby x było nie-
zmiernie; słowem, rozumieć że $\frac{a}{x}$ i
 $\frac{b}{x}$ wpływają iakózkolwiek w ilość
fzu-

szukaną, byłobyto sprzeciwiać się założonemu przypuszczeniu.

W dalszym przeciągu niebędzie zbywać nam na okazjach, okazania na oko téj prawdy, względem odrzucenia ilościów niezmiernych w niższych stopniach, tym czasem atoli następujący przykład, może służyć na poparcie poprzedzającego rozumowania. Ułożmy sobie taki rząd; $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, i. t. d. jawna jest, że wszystkie wyrazy tego rzędu, coraż bardziey przybliżają się do jedności, a jednak téj granicy przestąpić nigdy niemożę. Każdy wyraz może być oznaczony

przez $\frac{x}{x+1}$, gdzie x wyraża liczbę miéysca

tego wyrazu. Ponieważ tedy wyrazy przybliżają się nieustannie do jedności, a to tém bardziey im bardziey oddalają się od początku, więc téj granicy dóysdż niemożę, aż dopiero w odległości niezmiérnej od pomienionego początku; a zatem ażeby mieć ostatni wyraz tego rzędu, trzeba rozumieć, że w wyrażeniu

$\frac{x}{x+1}$, x jest ilością niezmiérną; lecz

w takim razie, podług wyżéy założonego fundamentu, przerzeczona ilość wychodzi

na $\frac{x}{x}$, to jest na 1; więc odrzucenie wyrazu

$+1$ z ilości $\frac{x}{x+1}$, nietylko niepsuie wnio-

sku, ale nawet czyni go takim jakim być powinien. Słowém, przez takowe odrzucenie wykonywa się to, czego wyciąga założone przypuszczenie.

Taki tedy jest porządek, iaki zachować trzeba w rachunku miéydy

dzy ilościami niezmiérnymi albo niezmiérnie małémi różnych stopniów. Lecz w przystósowaniu tego podanego fundamentu względem odrzucenia ilościów, mogą zdarzyć się niektóre przypadki, o których należy nam uprzedzić czytelnika.

Daymy tedy że mamy te dwie ilości, $xx + ax + b$, i $xx + ax + c$; jeżeli w nich x jest niezmiérne, to oczywiście każda z nich wychodzi na xx , tak iż różnicą między niémi zdaie się być zero w tym przypadku, lubo w rzeczy saméy takową różnicą jest $c - b$, albo $b - c$. Rozwiązanie téy na pozór trudności, jest następujące.

Różnicą między témi dwiéma ilościami, jest w rzeczy saméy $c - b$ albo $b - c$; lecz kiedy się szuka téy różnicy, po założoném przypuszczeniu, że x w obu ilościach jest niezmiérne, to w takim razie jestto szukać, czém jest takowa różnica względem tychże ilościów; a że natenczas każda z nich jest niezmiérna, więc powinno być znaleziono, iak w rzeczy saméy znayduie się, że pomieniona różnica jest zerém względem nich,

nich. Kiedy tedy zadaie się pytanie, w co obraca się wypadek z pewnych działań przedsięwziętych z wielą ilościami, to reguła wyżej podana, powinna być wykonana w fałnym wypadku, a nie w każdéy ilości wziętéy zosobna.

J tak pokaże się, że summa ilościów $-xx + ax + b$, i $xx + bx + c$, jeżeli x jest niezmiérne, wychodzi na $ax + bx$; w powszechności, pomieniona ilość czyniąca po zebraniu $ax + bx + b + c$, kiedy x jest niezmiérne, wychodzi na $ax + bx$. Podobnież ilość $-\sqrt{(xx - bb)}$, kiedy x jest niezmiérne, zdawałaby się być zerem. Ale że wyrażenie $\sqrt{(xx - bb)}$, jest tylko wskazaniem pierwiastka z ilości $xx - bb$; przeto żeby mieć różnicę między tą ilością a między x , trzebaby takową ilość $xx - bb$ rozłożyć w rząd, podług (Alg. 133); a natenczas ilość $x - \sqrt{(xx - bb)}$

przemienia się w tę, $x - x + \frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3}$ i. t. d. albo $\frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} +$ t. d. która, jeżeli x jest niezmiérne względem b , wychodzi na $\frac{bb}{2x}$.

FUNDAMENTA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO.

6. Uważając ilość odmienną, iako rosnącą stopniami niezmiérnie małémi; żeby doysdz wartości

ta-

takowego przybywania, naynaturalniéysza zdaie się, naznaczyć wartość téy ilości uważonéy w iakimkolwiek momencie czasu, i znowu w drugim momencie następującym zaraz bezśrzednie po piérwszym; a natenczas różnica między témi dwiema wartościami, wyrażać będzie pomnożenie albo umniéyszenie, jakie odbiera takowa ilość: i to jest co nazywa się *różnicą* albo raczéy *różniczką*, téy ilości.

7. Chcąc naznaczyć różniczkę iakowéy ilości odmiennéy nieskładanéy, iakoto np. ilości x albo y , pisze się dx , albo dy ; to jest poprzedzając ją głoską d pospolicie używaną do tego wyrażenia. Ale żeby wskazać różniczkę ilości składanéy, np. takiéy iak x^2 albo $5x^3 + 3x^2$ albo $\sqrt{(x^2 - aa)}$ i. t. d. trzeba takową ilość zamknąć między dwóma nawiasami, położywşy przed piérwszym nawiasem głoskę d ; i tak pisze się $d(x^2)$, $d(5x^3 + 3x^2)$, $d(\sqrt{(x^2 - aa)})$ i. t. d.

Odtąd ilości odmiénne oznaczac będziemy przez ostatnie głoski Abecadła t , u , x , y , z ; a ilości státeczne, to jest które zachowuią zawsze iednakową wartość, przez głoski początkowe a , b , c , i. t. d; jeżelibyśmy zaś gdzie inaczéy sobie postąpili, to ostrzéżemy o tém. A co należy do głoski d , ta niebędzie używana do czego inszego, tylko do oznaczenia różniczki téy ilości którą będzie poprzedzać.

8.

8. Z tego opisanja różniczki iakiéykolwiek ilości, daie się widzieć, że chcąc mieć różniczkę takiéy ilości w którój głolki odmiénne znaydują się bydź położone tylko w pierwszym stopniu, niebędąc rozmnożone ani rozdzielone iedne przez drugie, niéma więcéy do czynienia, tylko przed każdą odmienną położyć cechę d , zostawiwszy każdéy znak iaki miała.

Np. różniczką ilości $x + y - z$ będzie $dx + dy - dz$. Jakóż, żeby mieć takową różniczkę, trzebaby uważać x , odmiéniając się na $x + dx$, y , na $y + dy$, a z , na $z + dz$; lecz w takim razie, ilość zadana $x + y - z$, odmiénilaby się na $x + dx + y + dy - z - dz$; więc wzięwszy różnicę między tym oboim stanem ilościów, będzie $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$; to jest że na różniczkę wypadnie, $dx + dy - dz$.

Tóż samo rozumieć trzeba, chociażby odmiénne wchodzące w ilość zadaną, miały spólczynników czyli mnożników statecznych.

J tak, różniczką ilość $5x + 3y$, jest $5dx + 3dy$; różniczką ilości $ax + by$, jest $adx + bdy$; iakóż, kiedy x i y odmiéniają się na $x + dx$ i $y + dy$, to ilość $ax + by$, odmiénia się na $a(x + dx) + b(y + dy)$, to jest na $ax + adx + by + bdy$; więc różnicą między tym oboim stanem, czyli różniczką

azką przerzeczonéy ilości, jest $adx + bdy$; to jest, powiedziawszy w powszechności, każdą odmienną trzeba poprzedzić cechą d .

Gdyby w ilości zadanej, znaydował się iaki wyraz cały stateczny, to różniczka będzie taka, iak gdyby tego wyrazu wcale niebyło; to jest że różniczką tego wyrazu byłoby zero; i to jest oczywista, bo ponieważ różniczka niejest co innego tylko przybywanie ilości, więc ilość stateczna niemoże mieć różniczki, żeby oraz nieprzestała bydź stateczną.

I tak różniczką ilości $ax + b$, jest prosto adx .

9. Kiedy ilości odmiénne trafiają się nieskładane, ale iednakże będą między sobą rozmnożone, to trzeba zachować następującą regułę: *Zróżniczkuj wyraz, kolejno względem każdéy odmiennéy, tak iak gdyby reszta była mnożnikiem statecznym.*

Np. żeby zróżniczkować xy , różniczkuję naprzód, iak gdyby x było stateczne, mam xdy ; potem różniczkuję też samą ilość

Tom. III.

B

xy,

* Zeby w pisanju uniknąć wszelkiéy dwuwykładności, ilość odmienną która ma bydź poprzedzona cechą d , należy pisać na ostatku.

xy , iak gdyby znowu y było stateczne, i mam ydx ; tak że całą różniczką ilości xy , będzie $xdy + ydx$.

Przyczynę téj reguły można wyrozumić, wróciwszy się do samego fundamentu. Albowiem, żeby mieć różniczkę ilości xy , trzeba uważać x , iakoby odmięniało się na $x + dx$, to jest iakoby pomnażało się o ilość niezmiernie małą dx , a y iakoby odmięniało się na $y + dy$, to jest iakoby pomnażało się o ilość niezmiernie małą dy ; a natenczas xy , wychodzi na $(x + dx) \times (y + dy)$, to jest na $xy + xdy + ydx + dydx$; więc różnicą między tym oboim stanem, albo różniczką zadanęj ilości, jest $xy + xdy + ydx + dydx - xy$, albo $xdy + ydx + dydx$; więc ażeby to wyrazić w rachunku, że ilości dy i dx są niezmiernie małe, trzeba (5) wyrzucić ilość $dydx$, iako niezmiernie małą drugiego stopnia (4), a zatem iako niezmiernie małą względem ilościów xdy i ydx , które są niezmiernie małe pierwszego stopnia; więc naostatek różniczką ilości xy albo $d(xy)$, musi być $xdy + ydx$, to jest taka iaką daie reguła.

Podług téjże reguły, różniczką ilości xyz , byłaby $xydz + xzdy + yzdx$; różniczkując naprzód iakby xy było stateczne, potem iakby xz było stateczne, a naostatek iakby yz było stateczne. Co da się wywieśdź iak wyżej, uważając x , y , i z , odmięniające się na $x + dx$, $y + dy$ i $z + dz$; w którymto przypadku xyz , wychodzi na $(x + dx)(y + dy)(z + dz)$, albo na $xyz + xydz + xzdy + yzdx + ydxz + xdyz + xdzdy + dxddy$; więc różnicą między ilościami w tym oboim stanie i po uczynioném zebraniu i po odrzuceniu ilościów niezmiernie małych drugiego i trzeciego stopnia, będzie ilość $xydz + xzdy + yzdx$, to jest taka, iaką daie reguła.

IO.

MATEMATYKĪ.

17

10. Jeżeli ilość zadana, jest iakimkolwiek stopniem ilości odmięnięj, to trzeba postąpić sobie podług reguły następującej: *Rozmnoż przez wykładnika, zmnięysz tego wykładnika o iednę iedność, i rozmnoż przez różniczkę ilości odmięnięj.*

Stółuiąc to do ilości x^2 , mieć będą $2xdx$, mnożąc przez wykładnika 2, zmnięszając wykładnika 2 o 1, a naostatek mnożąc przez dx , to jest przez różniczkę ilości odmięnięj x . Podobnie znaleźlibyśmy, że różniczką ilości x^3 , jest $3x^2dx$; a ilości x^4 , byłoby różniczką $4x^3dx$; iako téż ilości x^{-1} , będzie $-x^{-2}dx$; ilości x^{-3} , będzie $-3x^{-4}dx$; ilości $x^{\frac{1}{2}}$, będzie $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; ilości $x^{\frac{4}{3}}$, będzie $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$; a w powszechności ilości x^m , różniczką będzie $mx^{m-1}dx$, wykładnik m niechay będzie iaki chce, czyto twierdzący czy przeczący, cały czy ułamkowy.

Zeby wyrozumić przyczynę téj reguły, wróćmy się znowu do fundamentu: Uważmy x , iakoby odmięniające się na $x + dx$; (gdzie dx rozumie się niezmiernie małą); natenczas x^m przemienia się na $(x + dx)^m$; to jest podług reguł wyżej podanych (Alg. 126), przemienia się na $x^m + mx^{m-1}dx + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}dx^2 + \text{t.d.}$, albo tylko na $x^m + mx^{m-1}dx$, (z przyczyny że wyraz $m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}dx^2$

B z

ieft

jest niezmiernie mały drugiego stopnia, a następujące byłyby jeszcze pośledniejszych stopniów); więc różnicą między dwiema ilościami w tym oboim stanie, albo różniczką ilości x^m , jest $x^m + mx^{m-1}dx - x^m$, to jest $mx^{m-1}dx$.

Gdyby znajdował się współczynnik albo mnożnik stateczny, przytomność jego nieuczyniłaby żadnej odmiany; bo zostałby się w różniczkę taki, jaki był w samej ilości; i tak $d(ax^m)$, wychodzi na $max^{m-1}dx$.

11. Owóż już jest wszystko co trzeba wiedzieć żeby być w stanie różniczkowania wszelkiego rodzaju ilości w Algebraicznych; a zatem to wszystko co ma nastąpić nie będzie tylko przystosowaniem reguł poprzedzających.

12. Gdyby była zadana ilość $\frac{x}{y}$, to jest ułamek, podług tego co się rzekło (Alg. 118) napisałbym ją tak xy^{-1} ; a natenczas używszy reguły wyżej podanej (9), miałbym $d(xy^{-1}) = xdy(y^{-1}) + y^{-1}dx$; a zatem podług (10) byłoby $d(xy^{-1}) = -xy^{-2}dy + y^{-1}dx$.

Po uczynionem zebraniu tej ilości, będzie $-\frac{xdy}{y^2} + \frac{dx}{y}$, albo $\frac{ydx - xdy}{y^2}$, gdzie widzieć dać się, że różniczka ułamka $\frac{x}{y}$, równa się różniczkę dx licznika, rozmnożonej przez mianownika y , a potem zmniejszonej różniczką y mianownika, rozmno-

zo-

żoną przez licznika x , wszystko rozdzieliwszy przez kwadrat mianownika; i tać jest reguła jaką pośpolicie podają do różniczkowania ułamków. Ale jawna jest, że niema potrzeby obciążać sobie pamięci tą nową regułą; bo dosyć jest podług przepisu (Alg. 118) przedstawić mianownika do licznika, a potem zadany ułamek zwyczajnie różniczkować.

13. Gdyby potrzeba było różniczkować ilość ax^3y^2 ; należy naprzód uważać x^3 i y^2 , jakoby dwie ilości odmiennie nieskładane, skąd podług (9) wypadnie, $d(ax^3y^2) = ax^3d(y^2) + ay^2d(x^3)$; a potem podług (10), będzie $d(ax^3y^2) = 2ax^3ydy + 3ay^2x^2dx$. W powszechności $d(ax^my^n) = ax^m d(y^n) + ay^n d(x^m) = nax^my^{n-1}dy + may^n x^{m-1}dx$.

14. Jeżeli ilość co ma być różniczkowana jest wielośćowna, ale niezawiera w sobie żadnych stopniów ilościów wielośćownych, to każdy z wyrazów składających ją trzeba różniczkować osobno; i tak będzie $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2dx + 2bxdx + cxdy + cydx$. Podobnież, $d(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2})$

$= d(ax^2 + bx + cx^{-2}y) = 2axdx + bdx - 2cx^{-3}ydx + cx^{-2}dy$. Takóż, $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2ydx + x^3dy + 2aydy$; bo tu należy sobie przypomnieć, że stateczna b^3 nie ma różniczki, albo że różniczką jej jest zero.

15. Jeżeliby znajdował się wykładnik należący do całej ilości wielośćownej, jakoto w tym wyrażeniu, $(a + bx + cx^2)^5$, to całą takową ilość podpadającą pod tego wykładnika, trzeba uważać jakby była tylko jedną osobną ilością odmienną, która różniczkując się podług reguły wyżej podanej

B 3

(10)

(10) do ilościów wyniesionych do iakiegokolwiek stopnia. I tak będzie $d(a + bx + cx^2)^4 = 5(a + bx + cx^2)^4 \times d(a + bx + cx^2) = 5(a + bx + cx^2)^4 \times (bdx + 2cxdx)$. Podobnie będzie $d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} d(a + bx^2) = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} \times 2bxdx = \frac{10}{3}bxdx(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

16. Jeżeliby ilość będąc wielośćowną, składała się z różnych czynników, to każdego czynnika uważać trzeba iakby odmienną iednoślowną, i postąpić sobie podług reguły wyżey podanęj (9) do mnogościów składających się z wielu odmiennych iednoślownych.

I tak ilość, $x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, którą uważać można iakby składającą się z dwóch czynników x^3 i $(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, da $d[x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}] = (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, to jest podług reguły poprzedzających, $3x^2dx(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} +$

$\frac{10}{3}bx^4dx(a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Podobnież, $d\left(\frac{(x + a)^3}{(x + b)^2}\right) = [(x + a)^3 \times (x + b)^{-2}] = (x + a)^3 d(x + b)^{-2} + (x + b)^{-2} d(x + a)^3$; to jest $= -2(x + a)^3(x + b)^{-3}dx + 3(x + b)^{-2}(x + a)^2dx$,

co się przemienia na $-\frac{2(x + a)^3dx}{(x + b)^3} + \frac{3(x + a)^2dx}{(x + b)^2}$, i wychodzi na $\frac{(x + 3b - 2a)(x + a)^2dx}{(x + b)^3}$.

17. Jeżeli ilość zadana jest pierwiastkowa, to w niej zamiast znaków pierwiastkowych, trzeba położyć wykładniki ułamkowe, w sposób indzięj przepisany (Alg. 105), a potem ją zróżniczkować podług reguły wyżey podanych. I tak: $d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; $d(\sqrt[3]{x^3}) = d(x^{\frac{3}{3}}) = \frac{3}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$; - -

$$d[\sqrt{(aa - xx)}] = d(aa - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$$

$$d(aa - xx) = -xdx(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}; d(x^m \sqrt{(a + bx^n)^p}) = d[x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{2}}]$$

$$= x^m d(a + bx^n)^{\frac{p}{2}} + (a + bx^n)^{\frac{p}{2}} d(x^m) = x^m d(a + bx^n)^{\frac{p}{2}} + (a + bx^n)^{\frac{p}{2}} \frac{p}{q} x^{m-1} dx$$

$$d(x^m) = \frac{pmb}{q} x^{m+n-1} dx(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} + mx^{m-1} dx(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

O Różniczkach drugich, trzecich i. t. d.

18. Oprócz różniczek które dopiero uważaliśmy i które nazywają się *Różniczkami pierwszemi*, uważają się także *różniczki drugie, trzecie, i. t. d.*; które chcąc ukażać, trzeba położyć przed ilością odmienną dwa d , jeżeli ma być wskazana druga różniczka; a trzy d jeżeli idzie o trzecią różniczkę, i tak daléj. *Np. ddx* znaczy drugą różniczkę ilości x .

W drugich różniczkach, ilość odmienna uważa się iakby przybywała stopniami nierównemi, której różnica rozumie się niezmiernie małą względem tychże przybytków. I tak ddx jest niezmiernie małe względem dx . Podobnież w różniczkach trzecich, $dddx$ albo d^3x (bo takowe

różniczki znaczyć się zwykły zarówno tym oboim sposobem), jest niezmiernie małe względem ddx ; i tak dalej.

Zeby naznaczyć kwadrat ilości dx , naturalnie napisaćby trzeba $(dx)^2$, ale dla skrócenia pisać się zwykło dx^2 , co nie może sprawić żadnej omyłki, ani być wzięte za różniczkę ilości x^2 ; bo tę ostatnią po stanowiliśmy sobie znaczyć przez $d(x^2)$.

Uważmy to dobrze, że lubo ilości ddx i dx^2 , są obie niezmiernie małe drugiego stopnia, ale sobie nie są równe; bo ddx wyraża drugą różniczkę ilości x , czyli dwoie różniczkowania iedno po drugim następującego z tą ilością x , a dx^2 wyraża kwadrat różniczki dx .

W dochodzeniu drugich różniczek naturalniey zdaie się, uważać ilość odmienną w trzech stanach następujących ieden po drugim a sobie niezmiernie bliskich, wziąć różnicę między pierwszym stanem a drugim, potem między drugim a trzecim, a naostatek wziąć znowu różnicę między temi dwiema różnicami. Np. pierwszy stan ilości x jest x ; w drugim momencie x pomnaża się o ilość dx , skąd powstaie $x + dx$; w następującym daley momencie $x + dx$ pomna-

za

ża się o ilość $dx + d(dx)$, gdzie $d(dx)$ wyraża to, o wiele przybytek drugiego momentu przewyższa przybytek pierwszego momentu, czyli różnicę ilości dx . A zatem trojaki stan ieden po drugim następujący ilości x , będzie wyrażony w tych ilościach: x , $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$. Różnica między pierwszym a drugim stanem jest dx , różnica zaś między drugim i trzecim jest $dx + d(dx)$; a naostatek różnica między temi dwiema różnicami, czyli druga różniczka ilości x , będzie $d(dx)$; a zatem będzie $ddx = d(dx)$. Więc, zeby mieć różniczkę drugą jakiegokolwiek ilości, niepotrzeba tylko zróżniczkować różniczkę pierwszą podług reguł wyżej podanych.

Np. zeby mieć różniczkę drugą ilości xy ; naprzód szukam iey pierwszey różniczki, którą znalazłszy $xdy + ydx$, takową różniczkuję powtórnie, iak gdyby ilości x i dx tudzież y i dy , były wszystkie ilościami odmiennemi, i mam $xddy + dydx + dydx + yddx$, albo $xddy + 2dydx + yddx$. Podobnież, znalazłbym drugą różniczkę ilości x^2 , zróżniczkowawszy nasamprzód x^2 , co mi da $2xdx$, a potem różniczkując $2xdx$, iak gdyby ilości x i dx , były dwie ilości odmiennie pomierne, skąd mi wypada na drugą różniczkę, $2xddx + dx^2$. Podobnież będzie $dd(ax^m) = d(max^{m-1} dx) = m \cdot (m-1) \cdot ax^{m-2} dx^2 + max^{m-1} ddx$.

Gdy-

* W tym sposobie brania różniczek drugich, może zachodzić trudność; o której dobrze będzie uprzedzić tu czytelnika. Wynajdując różniczki pierwsze, odrzucają się ilości niezmiernie małe drugiego stopnia; a że różniczki drugie są także ilościami niezmiernie małemi

Gdyby była zadana do różniczkowania ilość, w którą wchodziłyby różniczki pierwsze, bądźto że takowe wyniknęły lub nie z doskonałego różniczkowania, to w takim razie, trzeba sobie postąpić w tenże sposób co wyżej. I tak, $d(xdy) = xddy + dx dy$. Podobnież, $d(\frac{dy}{x}) = d(x^{-1}dy) = -x^{-2}dx dy + x^{-1}ddy$. Jako też, $d(\frac{dx}{dy}) =$

$$\frac{d(xdy^{-1})}{dy} = \frac{dx dy^{-1}}{dy} - \frac{dx dy^{-2}ddy}{dy^2} = \frac{dx}{dy} - \frac{dx ddy}{dy^2}.$$

19. Trafia się bardzo często w rachunkach w które wchodzi wiele ilościów odmiennych, że różniczka iednéy z tych odmiennych, rozumie się być stateczną. I to przypuszczenie jest zawsze wolne; bo zawsze można sobie wziąć iedną z różniczek pierwszych, za wyraz stateczny, do którego stósują się inne różniczki pierwsze; to przypuszcze-

drugiego stopnia, przeto czyż nienależy obawiać się, ażeby to co się odrzuciło w pierwszym różniczkowaniu, niewpływało w niedoskonałość drugich różniczek? Ale zaiste nie; bo ta odrzucona ilość niezmiernie mała drugiego stopnia, nie może dać na swoje różniczkę tylko ilość niezmiernie małą trzeciego stopnia, która względem drugiey różniczki powinna być odrzucona, iako niezmiernie mały drugiego stopnia.

zczenie mówię, ułatwia rachunek, bo wyrazy zawierające w sobie drugie różniczki takiéy odmiennéy, odpadają; tak że jeżeli dx jest stateczne, to będzie $ddx = 0$, przez co rugują się wszystkie wyrazy, zawierające w sobie ddx . W takim przypadku nietrzeba więcéy tylko dać baczenie, ażeby nieróżniczkować wyrazu dx (czyli różniczki statecznéy), w tych wyrazach gdzie się znajduje.

I tak różniczka ilości, $\frac{dx}{dy}$, wziętęy w tém rozumieniu że dx , jest stateczne albo $d(xdy^{-1})$, w témże rozumieniu, będzie $-xddy^{-2}ddy$ albo $-\frac{dx ddy}{dy^2}$. Przeciwnie przypuściwszy za stateczną dy , różniczka pomienionéy ilości byłaby $\frac{ddx}{dy}$.

20. Co się tycze różniczek trzecich, łatwo widzieć się daie rozumując iak wyżej, że dla wynalezienia ich, nietrzeba więcéy tylko zwyczajnie zróżniczkować różniczki drugie, poczytając tak same ilości odmienné, iako téż ich różniczki pierwsze i drugie za tyléż ilościów odmiennych od siebie różnych; tóż fa-

samo ma się rozumieć o innych różniczkach wyższego stopnia. Należy tylko uważać, że jeżeli w przechodzie od pierwszych różniczek do drugich, jedna z pierwszych różniczek była wzięta za stateczną, to iuż i w całym dalszém różniczkowaniu powinna zawsze być brana za stateczną.

21. W tém wszystkiém co poprzedziło rozumieliśmy, że odmienné x , y i t. d. pomnażają się wszystkie razem, to jest że kiedy x staje się $x + dx$, y także staje się $y + dy$, toż o innych. Ale zdarzyć się może, że gdy iedne ilości rosną drugie umniejszają się. W takim przypadku, po różniczkowaniu, w wypadku daie się znak — różnicze téy ilości odmiennéy, która się zmniejsza. Albo téż można zostawić różniczkę taką iaka wypada podług reguł poprzedzających, ale w przytósowaniu iéy do iakiego zagadnienia, trzeba pamiętać żeby brać w sposób przeczący ilość, która oznacza różniczkę głośki odmiennéy zmniejszającą się.

Jakóž

Jakóž jeżeli y , zmniejszyło się o ilość q , a przez różniczkowanie przypuściło się że y odmienniło się na $y + dy$, to musi być $y - q = y + dy$, albo $-q = dy$, albo $q = -dy$; a zatem w takich przypadkach, to co w różniczkowaniu oznaczyło się przez dy , wszędzie indziéy powinno być oznaczono przez $-dy$. Zobaczmy to w przykładach niżej.

Toż samo rozumieć się ma o różniczkach drugich względem różniczek pierwszych. Jeżeli różniczka pierwsza zmniejsza się, to w dalszém różniczkowaniu postępuje się zwyczajnie, ale w przytósowaniu iéy potém do iakiego zagadnienia, oznacza się przez $-ddy$, co było oznaczono przez ddy , jeżeli pierwszą różniczką było dy .

Te są reguły różniczkowania, kiedy ilości z którei ma być działano, są zadane bezśrzednie. Ale trafia się często, że nie z saméi ilościami, ale tylko z pewnéi ich wyrażeniami działać potrzeba. Np. zamiast kątów, używają się częstokroć ich wstawy, styczne i t. d. zamiast ilościów biorą się ich Logarytmy. Zobaczmy tedy, iak sobie trzeba postąpić w różniczkowaniu takich wyrażén.

O różniczkach Wstaw, Dostaw i t. d.

22. Kiedy jest zadana do różniczkowania ilość taka iak wst. z (czyli wstawa kąta albo łuku z), trzeba sobie wystawić w myśli iż z przemienia się na $z + dz$, a natenczas wst. $(z + dz) =$ wst. z ,
bę-

będzie różniczką ilości wyrażonę przez wst. z . Lecz podług tego co się rzekło w Jeom. (286), wst. $(z \pm dz) = \text{wst. } z \text{ doft. } dz \pm \text{wst. } dz$. doft. z , wzięwszy za promień 1. A znowu, wstawę łuku niezmiernie małego dz jest samże łuk, a dostawa nieróżni się od promienia, więc będzie, wst. $dz = dz$, a doft. $dz = 1$; więc wst. $(z \pm dz) = \text{wst. } z \pm dz \text{ doft. } z$; więc wst. $(z \pm dz) - \text{wst. } z$, albo $d(\text{wst. } z) = dz \text{ doft. } z$, to jest: Ze różniczka wstawy kąta albo łuku mającego za promień iedność, znayduie się, rozmnożywszy różniczkę kąta przez iego dostawę.

23. Podobnież, różniczka tego wyrażenia, doft. z , albo doft. $(z \pm dz) - \text{doft. } z = \text{doft. } z \text{ doft. } dz - \text{wst. } z \cdot \text{wst. } dz - \text{doft. } z$; bo podług (Jeom. 287) doft. $(z \pm dz) = \text{doft. } z \cdot \text{doft. } dz - \text{wst. } z \cdot \text{wst. } dz$; więc mając wzgląd na to, że wst. $dz = dz$, a doft. $dz = 1$, będzie $d(\text{doft. } z) = \text{doft. } z - dz \cdot \text{wst. } z - \text{doft. } z = -dz \cdot \text{wst. } z$; to jest Ze różniczka dostawy kąta, mającego za promień iedność, znayduie się, rozmnożywszy różniczkę kąta. (wziętą z znakiem przeciwnym) przez wstawę tegoż kąta.

Za-

Zawsze tedy będzie $d(\text{wst. } z) = dz \text{ doft. } z$; a $d(\text{doft. } z) = -dz \text{ wst. } z$. Przy pomocy tych dwóch zasąd, można zróżniczkować wszelką ilość, złożoną z wstawy i dostawy, a to podług reguł wyżej podanych,

I tak mając różniczkować, doft. $3z$, będzie $d(\text{doft. } 3z) = -3dz \text{ wst. } 3z$. Podobnież $d(\text{doft. } mz)$ (gdzie m rozumie się bydź liczbą stałą), będzie $-mdz \text{ wst. } mz$; a $d(\text{wst. } mz) = mdz \text{ doft. } mz$. Tudzież $d(\text{wst. } z \text{ doft. } t) = \text{doft. } t \cdot d(\text{wst. } z) + \text{wst. } z \cdot d(\text{doft. } t) = dz \text{ doft. } t \text{ doft. } z - dt \text{ wst. } z \text{ wst. } t$. Jako też $d(\text{wst. } z)^m = m (\text{wst. } z)^{m-1} d(\text{wst. } z) = mdz \text{ doft. } z (\text{wst. } z)^{m-1}$.

24. Gdyby było zadano $\frac{\text{wst. } z}{\text{doft. } z}$, co wyraża styczną kąta z , kiedy promieniem jest 1; (bo podług (Jeom. 282) doft. $z : 1 :: \text{wst. } z : \text{stycz. } z$); to będzie $d\left(\frac{\text{wst. } z}{\text{doft. } z}\right) = d[(\text{wst. } z)(\text{doft. } z)^{-1}] = dz \text{ doft. } z (\text{doft. } z)^{-1} + dz (\text{wst. } z)^2 (\text{doft. } z)^{-2} = \frac{dz \text{ doft. } z}{\text{doft. } z} + \frac{dz (\text{wst. } z)^2}{(\text{doft. } z)^2} = \frac{dz}{(\text{doft. } z)^2}$; bo podług (Jeom. 283), $(\text{doft. } z)^2 + (\text{wst. } z)^2 = 1$.

Więc, różniczka styczney kąta mającego za promień 1, równa się różniczce kąta roz-

rozdzielony przez kwadrat wstawy tegoż kąta.

Skąd na odwrót można wnieść, że różniczka kąta, równa się różnicze stycznej tegoż kąta, rozmnożony przez kwadrat jego dostawy. Jakóż, ponieważ

$$d\left(\frac{\text{wft. } z}{\text{dof. } z}\right) \text{ albo } d(\text{stycz. } z) = \frac{dz}{(\text{dof. } z)^2}$$

więc musi być $dz = (\text{dof. } z)^2 d(\text{stycz. } z)$.

25. Przeciwnie mając $\frac{\text{dof. } z}{\text{wft. } z}$, co wy.

$$\begin{aligned} \text{raża dotyczną kąta } z, \text{ będzie } d\left(\frac{\text{dof. } z}{\text{wft. } z}\right) &= \\ d[(\text{dof. } z)(\text{wft. } z)^{-1}] &= -dz \text{ wft. } z (\text{wft. } z)^{-2} - dz (\text{dof. } z)^2 (\text{wft. } z)^{-2} = -\frac{dz \text{ wft. } z}{(\text{wft. } z)^2} \\ -\frac{dz (\text{dof. } z)^2}{(\text{wft. } z)^2} &= \frac{-dz (\text{wft. } z)^2 - dz (\text{dof. } z)^2}{(\text{wft. } z)^2} \\ &= \frac{-dz}{(\text{wft. } z)^2}. \end{aligned}$$

Więc różniczka dotyczący kąta, równa się różnicze kąta (wzięty w sposób przeczący), rozdzielony przez kwadrat wstawy tegoż kąta. Zobaczymy niżej użycia tego różniczkowania.

O różniczkach Logarytmowych.

26. Przypomniemy sobie (Arytm. 200), że Logarytmy, sąto liczby następujące po sobie rzędem w progressji Arytmetycznej iakiékolwiek, odpowiadające wyraz w wyraz innemu rzędowi liczb postępujących.

pujących w progressji Jeometrycznej iakiékolwiek.

To założywszy, niechay będą y i y' dwa wyrazy po sobie następujące progressji Jeometrycznej, w którejby stósunkiem było r , a dwoma pierwszymi wyrazami a i a' . Podobnież, niech będą x i x' dwa wyrazy po sobie następujące progressji arytmetycznej, w którejby b i b' były dwoma pierwszymi wyrazami. Daymy oraż że x i x' są położone w témże miéyscu progressji arytmetycznej, iak y i y' w progressji Jeometrycznej, w którymto razie x i x' będą Logarytmami wyrazów y i y' .

Z natury progressji Jeometrycznej (Arytm. 195), wypada $y' = ry$, a zaś $a' = ra$; położywszy w pierwszym zrównaniu wartość głośli r wyciągniętą z drugiego zrównania, będzie $y' = \frac{a'y}{a}$, albo $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$. Daymy teraz że różnicą między y' i y jest z , albo że $y' = y + z$; mieć będziemy $\frac{y+z}{y}$ albo $1 + \frac{z}{y}$.

$$\frac{z}{y} = \frac{a'}{a}, \text{ a zatem } \frac{z}{y} = \frac{a'}{a} - 1 = \frac{a'-a}{a},$$

albo $\frac{az}{y} = a' - a$. Z drugiey strony z natury progressyi Arytmetyczney (Arytm. 188) wypada $x' - x = b' - b$.

Zeby teraz mieć stófunek zachodzący między temi dwiema progressyami, daymy że różnica $a' - a$ dwóch pierwszych wyrazów w pierwszej progressyi, ma się do różnicy $b' - b$ dwóch pierwszych wyrazów drugiey progressyi, iak się ma iedność do liczby iakiéykolwiek m , to iest że $a' - a : b' - b :: 1 : m$; mieć będiém $m(a' - a) = b' - b$; położwszy tedy w tém ostatniém zrównaniu zamiast $a' - a$ i $b' - b$ wartości dopiero wynalezione, będzie $\frac{maz}{y} = x' - x$; zrównanie, wyrażające

stófunek między progressyą Jeometryczną iakąkolwiek, i między odpowiadającą iey progressyą Arytmetyczną także iakąkolwiek.

Zmyślmy sobie teraz że w obu progressyach wyrazy po sobie następujące są iedne drugim niezmiernie bliskie; natenczas z , wyrażające

ce

ce różnicę między y' a y odmięni się w dy , a $x' - x$ wyrażające różnicę między x' a x , odmięni się w dx , skąd poprzedzające zrównanie odmięni się w to: $\frac{mady}{y} = dx$.

Co się dotyczy m , które oznacza stófunek między różnicą dwóch pierwszych wyrazów progressyi Arytmetyczney, a między różnicą dwóch pierwszych wyrazów progressyi Jeometryczney, takowe mówię m niemnię przeto będzie pomierne, lubo te dwie różnice są w takim razie niezmiernie małe; albowiém to łatwo poymować się daie, że dwie ilości niezmiernie małe, mogą zawierać w sobie iedna drugą tyle razy, ile się wzaiem zawierają ilości pomierne.

Zrównanie tedy $\frac{mady}{y} = dx$, uczy nas

że różniczka dx logarytmu liczby oznaczony przez y , równa się różnicze dy saméjże liczby, różnicze mówię, rozdzielony przez tęż liczbę y , a rozmnożony przez pierwszy wyraz a progressyi Jeometryczney fundamentalney, i przez liczbę m , oznaczającą stófunek między różnicą dwóch pierwszych wyrazów progressyi Arytmetyczney, a różnicą dwóch pierwszych wyrazów progressyi Jeometryczney. Ponieważ takowa licz-

C 2

ba

ba m , ustanawia niejakim sposobem stosunek między dwiema progresyami, przeto nazywa się *pomiarém* (modulus).

A stąd pokazuje się że jedna i taż sama liczba y może mieć różne logarytmy, podług wartości iaka się naznaczy liczbie m i pierwszemu wyrazowi progresyi Jeometryczney. Ale między temi wszystkiemi różnemi układami logarytmów, do Rachunków Algebraicznych naywygodniejszy jest ten, w którym pierwszym wyrazem progresyi Jeometryczney jest 1, i pomiarém

także 1. Natenczas zrównanie $\frac{mady}{y} = dx$, zawierające w sobie wszelkie różne układy logarytmów, odmienia się w to: $\frac{dy}{y} = dx$.

27. Więc w układzie logarytmów używanym w Rachunkach Algebraicznych, różniczka dx logarytmu x , liczby iakiékolwiek y , równa się różnicze dy téżże liczby, rozdzielonéy przez téż liczbę y . Na téy zasadzie łatwo można wynaléśdź różniczkę logarytmu każdéy ilości Algebraicznéy, ale nim do tego przystąpimy uważmy ród Ze logarytmy o których tu mowa, nielą te co w Tablicach, ale łatwo można wniesć sobie iedne z drugich, iak zobaczymy niżej. 2re. Ze pierwszy wyraz b progresyi Arytmetyczney nieznayduie się w zrównaniu $\frac{mady}{y} = dx$; to zrównanie, iako i to drugie osobne $\frac{dy}{y} = dx$, które sobie wniesliśmy z pierwszego, mają zawsze miéysce, niechay będzie iaki chce ten pierwszy wyraz b , to jest logarytm pierwszego wyrazu a progresyi

gresyi Jeometryczney. A zatem jest nam wolno dla prościéyszego wyrażenia, za logarytm pierwszego wyrazu progresyi Arytmetyczney wziąć zero. A że założyliśmy sobie iż w progresyi Jeometryczney którą teraz zabawiamy się, pierwszym wyrazem jest jedność, więc za logarytm iedności obierzemy sobie zero; ale to trzeba dobrze zważyć, że do tego mamy zupełną wolność.

Tym sposobem tedy obrawszy iedność za pierwszy wyraz progresyi Jeometryczney, a zero za pierwszy wyraz progresyi Arytmetyczney, albo za logarytm iedności, reguły podane indziéy (Arytm. 207 i daléy) względem użycia logarytmów, służy i tu zarówno. A tak przypomniawszy ie sobie i rościagnąwszy ie powszechniey, pokaze się, że zamiast $l(ab)$, można wziąć $la + lb$, gdzie przez l oznacza się logarytm. Podobnież $l\frac{a}{b} = la - lb$; tudzież $la^m = mla$: naostatek $l\sqrt[n]{a^m} = la\frac{m}{n} = \frac{m}{n} la$.

To założywszy na przód, na fundamencie zasady wyżéy ustanowionéy względem różniczki logarytmu liczby iakowéy, znaydziemy $dlx = \frac{dx}{x}$; $dl(a+x) = \frac{d(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$; $dl\left(\frac{a}{a+x}\right) = d\left[la - l(a+x)\right] = -\frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$, pomniąc na to że różniczką statecznéy la jest zero.

Podobnież, $dl \frac{1}{x} = d(l1 - lx) = -\frac{dx}{x}$;

$$dl(x^2) = d(2lx) = \frac{2dx}{x}; dl(xy) = d(lx + ly)$$

$$= \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}; d\left(l\frac{y}{x}\right) = d(lx - ly) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y};$$

$$dl\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = d[l(a+x) - l(a-x)] = \frac{dx}{a+x}$$

$$+ \frac{dx}{a-x}; d[l(aa+xx)] = \frac{d(aa+xx)}{aa+xx} =$$

$$\frac{2xdx}{aa+xx}; dl\sqrt{(aa+xx)} = \frac{d\sqrt{(aa+xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}} =$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{(aa+xx)}}; \text{ albo } \frac{\sqrt{(aa+xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{aa+xx}{aa+xx}$$

$$\text{wygodniéj, } dl\sqrt{(aa+xx)} = d\left[\frac{1}{2}l(aa+xx)\right]$$

$$= \frac{xdx}{aa+xx}; dl[x^m(a+bx^n)^p] = d[lx^m +$$

$$l(a+bx^n)^p] = d[mlx + pl(a+bx^n)] =$$

$$\frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n}. \text{ Te przykłady mogą być}$$

dostateczne na pokazanie, jakim sposobem różniczkują się wszelkie inne ilości logarytmowe.

O różniczkach ilościów Wykładniczych.

28. **T**rafiają się także czasem ilości takiej postaci, cx , xy , to jest ilości mające wykładniki odmienne; przeto też takowe ilości na-

na-

nazywają się *wykładniczymi* (Exponentielles). Zeby wiedzieć iak je różniczkować, daymy że $xy = z$; a natenczas, wzięwszy logarytm każdéj części tego zrównania, mieć będziemy $lxy = lz$; a zatém $dl(xy) = \frac{dz}{z}$; więc $dz = zdl(xy)$, albo (położywszy zamiast z i dz onych wartości), $d(xy) = xydl(xy)$; to jest, że różniczka ilości wykładniczej znajduje się, rozmnożywszy tę ilość wykładniczą, przez różniczkę iéj logarytmu.

I tak $d(xy) = xyd(lxy) = xyd(ylx) = xy(dylx + \frac{ydx}{x})$. Podobnież $d(ax + yz) = d(ax) + d(yz) = axd(lax) + yzd(lyz) = axd(xla) + yzd(zly) = axdxla + yz(dzly + \frac{zdy}{y})$. Takóż $d(aa + xx)^x = (aa + xx)^x dl(aa + xx)^x = (aa + xx)^x d[xl(aa + xx)] = (aa + xx)^x [dxl(aa + xx) + \frac{2x^2dx}{aa + xx}]$; toż o innych. W rachunkach dość często używać się zwykła ilość cx , gdzie c rozumie się

C4

bydź

bydź liczbą którę logarytm $= 1$.
Różniczką tedy tęy ilości podług te-
go co poprzedziło, będzie $c^x d(lc^x)$,
co wychodzi na $c^x d(xlc) = c^x \cdot dxlc$;
że zaś lc rozumieliśmy bydź $= 1$,
więc będzie prosto $d(c^x) = dx c^x$;
to jest że ta osobna ilość wykładni-
cza, ma za różniczkę swoię tęż ilość
wykładniczą, rozmnożoną przez
różniczkę swego wykładnika. Zo-
baczymy to niżej.

*Przytósowanie Reguł poprzedza-
jących.*

29. **Z**eby reguły poprzedzające
i onych użyteczność w po-
spolitéy Algebrze, okazały się przy-
kładami, umysłiliśmy przytósowa-
cie do rzeczy już nam wiadomych,
to jest do zagadnień Jeometrycznych
i Rachunkowych.

30. Zeby poprowadzić styczną
iakiękolwiek linii krzywéy AM (fig.
1), trzeba sobie zmyślić tę linią
krzywą, iakoby wielokąt złożony
z nieskończonéy czyli niezmiérnéy
liczby boków niezmiérnie małych;
przedłużenie MT iednego z tako-
wych boków Mm , będzie styczną,
która wynaydzie się względem ka-
żde-

żdego iakiękolwiek punktu M ,
wyrachówawłzy wartość Podtycz-
néy PT , albo części tēy linii na
któręy rachuią się odcinki, części
mówię zawartēy między rzędną PM
i między punktem T gdzie przeci-
na się styczna z pominioną linią
odcinków. Zobaczymy iak takowa
Podtyczna wynayduie się.

Trzeba sobie zmyślić dwie rze-
dne MP , Mp , przechodzące przez
dwa końce M i m boku niezmiér-
nie małego Mm ; i linią Mr , równo-
ległą linii AP albo osio dcinków. Na-
tenczas, tróykąt niezmiérnie mały
 Mrm , będzie podobny tróykątowi
pomiérnemu TPM i da tę propor-
cyą: $rm : rM :: PM : PT$. Lecz
nazwawszy AP , x ; PM , y ; iawną
jest, że linia Pp albo onéy równa
 rM będzie wyrażona przez dx , a
 rm przez dy ; więc będzie $dy : dx$
 $:: y : PT = \frac{y dx}{dy}$. I to jest powsze-
chna formuła, służąca do wynale-
żienia Podtycznéy w iakiękolwiek
linii krzywéy, czyto linie x i y są
sobie wzaiemnie prostopadłe, czy
nie, byleby linie y były zawsze so-
bie

bie równoległe. Zobaczymy teraz jak ta formuła da się przytósować do każdej linii krzywéj wyrażonéj w równaniu.

Daymy że natura linii krzywéj jakiegokolwiek AM , jest wyrażona w jakimkolwiek równaniu, w które wchodzi odmiennie x , y , i ilości stałeczne. Zróżniczkowawszy takowe równanie, niebędą w niem nigdy znajdować tylko dwojakie wyrazy, to jest iedne rozmnożone przez dx a drugie przez dy . Łatwo tedy będzie przy pomocy pospolitych reguł Algebraicznych, wyciągnąć z tego równania różniczkowego wartość ilości $\frac{dx}{dy}$, w którą wchodzić niebędą tylko x , y , i stałeczne. Takową wartość położywszy w formule $\frac{ydx}{dy}$ albo $y \times \frac{dx}{dy}$, wypadnie wartość Podtęczney wyrażona w głoskach x , y , i w ilościach stałecznych; naostatek zamiast y położywszy wartość iego wyrażoną w x , a wyciągniętą z równania należącego do linii krzywéj, wypadnie też Podtęczna wyrażona tylko w samych x i w stałecznych: a tak ażeby wynależdź Podtęczną odpowiadającą jakiegokolwiek punktowi M , nietrzeba więcéy, tylko w tym ostatnim wypadku położyć zamiast x wartość odcinka AP , odpowiadającego temu punktowi M .

Daymy np. że linia krzywa o którą rzecz idzie jest ellipsa, do której należące równanie jest $y = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ (Alg. 230).

Ró-

MATEMATYKI.

Różniczkuję to równanie i mam $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$, albo $2aaydy = abbdx - 2bbxdx$; wyciągam z niego wartość ilości $\frac{dx}{dy}$, dzieląc naprzód przez dy , a potem przez

mnożnika wyrazu dx , i mam $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb - 2bbx}$;

a zatem będzie $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb - 2bbx}$; naostatek

położywszy zamiast y^2 onego wartość $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, iaką daie równanie należące do téj linii, po zebraniu mieć będę, $\frac{ydx}{dy}$ albo PT

$= \frac{2(ax - xx)}{a - 2x} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$, wartość właśnie też sama, którą znaleźliśmy indziéy (Alg. 237), ale która tu znajduje się sposobem daleko prędzszym. Uważmy tu po drodze, iako takowy wypadek popiera to, co powiedziało się wyżej (5) względem ilościów odrzucających się w rachunku; albowiem używając tu rachunku różniczkowego, w którym podług reguł, ilości niezmiérnie małe drugiego stopnia rozumieją się bydź odrzucone, względem ilościów niezmiérnie małych pierwszego stopnia, znaleźliśmy ténże sam wypadek co indziéy w przytósowaniu Algebry do Jeometryi, gdzie tokowéy Podtęczney szukaliśmy iak nayprostsza droga i sposobem iak nayściśleyszym. A stąd pokazuje się, że odrzucając pominione ilości tak iak się przepisało, nieco innego w tém czyni się, tylko nieiako daie się piétno rachun-

chunkowi takie iakie mieć powinnién, ażeby wyrażał treść zagadnienia.

Podobnymże sposobém trzeba sobie postąpić, w wynaydówaniu Stycznych, międzyległych, Przytycznych i.t.d. Daymy dla prościéy. fzèy rachuby że ilości x i y są sobie wzajemnie prostopadłe; żeby mieć styczną, trzeba znowu przystófować trójkąt Mmr do trójkąta TPM , skąd wypadnie $rm : Mm :: PM : TM$; lecz że z przyczyny trójkąta prostokątnego Mrm , iest $Mm = \sqrt{(rM)^2 + (rm)^2} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; więc $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} :: y : TM$; więc $TM = \frac{y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dy^2)}} = y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}} = y \sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1}$. A zatem zróżniczkowawszy równanie należące do téy linii krzywèy, trzeba wyciągnąć z niego wartość ilości $\frac{dx}{dy}$, i kwadrat iéy położyć w wyrażeniu stycznèy; potém zamiast y położywszy wartość iego wyrażoną w x i w statecznych, wyciągniętą z równania należącego do téy linii krzywèy, wypadnie

padnie styczną wyrażoną w x i w statecznych. Przystófowawszy sobie to do Ellipsy, wypadłoby na styczną iéy właśnie toż samo wyrażenie, które znaleźliśmy byli na swoiém miéyscu (Alg. 240).

Zeby mieć międzyległą, trzeba sobie zmyślić linią MQ prostopadłą stycznèy TM , i uważyc że trójkąty Mrm , MPQ mające boki wzajemnie sobie prostopadłe, są sobie podobne; a zatem daią $Mr : rm :: PM : PQ$; to iest $dx : dy :: y : PQ = \frac{y dy}{dx}$.

Więc zróżniczkowawszy równanie należące do linii krzywèy, trzeba z niego wyciągnąć wartość ilości $\frac{dy}{dx}$, i położyć ią w wyrażeniu $\frac{y dy}{dx}$, a potém skóńczywszy iak wyżej, wypadnie wartość międzyległèy, wyrażona w x i w statecznych.

Np. równanie $yy = \frac{bb}{aa} (ax - xx)$ należące do Ellipsy, po zróżniczkowaniu daie $2ydy = \frac{bb}{aa} (adx - 2xdx)$; więc będzie $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{bb}{aa} (a - 2x)}{2y}$; a zatem międzyległa $\frac{y dy}{dx} =$

$= \frac{bb}{aa} \times \frac{a-2x}{2} = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a - x)$, wyrażenie toż samo które znaleźliśmy indziéy (Alg. 236).

Zeby mieć Przytyczną MQ , nietrzeba tylko podobnie przyśtósować trójkąt Mrm do trójkąta MPQ .

Obierzmy sobie na drugi przykład formuły należący do Podtycznych i Międzyległych, zrównanie wyrażające własności Paraboli, które jest (Alg. 291) $yy = px$. Zrózniczkówałszy go mieć będziemy $2ydy = p dx$; więc $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, a $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$; więc Podtyczna $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; a Międzyległa $\frac{ydy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$; co zgadza się doskonale z wyrażeniami indziéy wynalezionymi (Alg. 288 i 290).

Na trzeci przykład weźmiemy sobie zrównanie $y^{m+n} = a^m x^n$ wyrażające w powszechności wszelkiego rodzaju Parabole. Zgodziliśmy się indziéy na to ażeby nazywać *Parabolą* wszelką linią krzywą, do której należące zrównanie byłoby takie jak $y^{m+n} = a^m x^n$, o dwu wyrazach, ale gdzie wykładniki głosek x i y położone w różnych częściach tegoż zrównania, miałyby jednakże znaki.

Zrózniczkówałszy to zrównanie, mieć będziemy $(m+n)y^{m+n-1} dy = na^m x^{n-1} dx$; więc $\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n-1}}{na^m x^{n-1}}$; więc Podty-

tyczna $\frac{ydx}{dy}$, będzie $\frac{(m+n) \cdot y^{m+n}}{na^m x^{n-1}}$, albo (po-

łożywszy zamiast y^{m+n} onego wartość $a^m x^n$, będzie $\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)a^m x^n}{na^m x^{n-1}} = \frac{m+n}{n} x$;

skąd pokazuje się, że Podtyczna w liniach krzywych tego rodzaju, równa się odcinkowi x tyle razy powtórzonemu, ile będzie jednościów w wykładniku głoski y , rozdzielonym przez wykładnika głoski x ; co ma miejsce iako to już widzieliśmy indziéy w Paraboli pośpolitey, gdzie Podtyczna jest wyrażona przez $2x$, i gdzie wykładnik głoski y rozdzielony przez wykładnika głoski x , jest w rzeczy, saméy $\frac{2}{1} = 2$.

Obierzmy sobie znowu teraz na przykład linią krzywą, której natura byłaby wyrażona w zrównaniu między różniczkami spółrzednych. Dajmy że linia krzywa BM (fig. 2.) jest taka, że odcinki AP , Ap , fig. 2. i. t. d. biorą się w niéy w progresyji arytmetycznéy, a rzędne odpowiadające PM , pm i. t. d. w progresyji geometrycznéy; takowa linia krzywa nazywa się *Logarytmową*, z téy przyczyny że gdy rzędne wystawiają z kolei wszelkie liczby iakie tylko być mogą, odcinki wystawiają Logarytmy odpowiadające takowym liczbóm; do

takiéy tedy linii należy zrównanie $\frac{amdy}{y}$; bo widzieliśmy wyżéy (26), że to zrównanie wyraża stosunek między liczbami i logarytmami odpowiadającými tym liczbóm. Będzie tedy $\frac{dx}{dy} = \frac{am}{y}$, a zatém Podtyczna ydx

$\frac{ydx}{dy}$ odmięni się w to wyrażenie, $\frac{amy}{y}$ albo am ; to jest, że Podtyczna PT , odpowiadająca każdemu i iakiemukolwiek punktowi iednędzy linii logarytmowey, iest zawsze taż sama i równa się piérwszemy rzędnemy AB albo a , tyle razy powtórzonemy, ile będzie iednościów w pomiarze m .

31. Jeżeli zrównanie należące do linii krzywey byłoby takie, że o ieden ráz gdy ilości x rosną, ilości y umnięyszaia się, iak w fig. 3, to natenczas linia rM powinna bydy wyrażona przez $-dy$ (21); a w takim razie proporcya, $rM:rm::PM:PT$, służąca do wynalezienia Podtyczney, odmięni się w tę, $-dy:dx::y:PT=-\frac{ydx}{dy}$; a tak w rachubie niebędzie żadney innney różnicy, oprócz że Styczna zamiast padania z strony odcinków A , względem rzędnemy PM , padać będzie z strony przeciwney: dla czego wyrażenie $\frac{ydx}{dy}$ można zawsze wziąć za formułę Podtycznych; gdzie ieżeli rzędne zmnięyszaia się coráz, to wartość ilości $\frac{ydx}{dy}$ wypadać będzie pod

pod kształtem przeczącym; dającym znać że takowa wartość powinna bydy wznaczona z przeciwnemy strony tēy stronie; gdzie ilości x biorą początek.

Np. wziąwszy zrównanie należące do koła, w którym początek odcinków uważał się od środka, to iest (Alg. 221.) zrównanie $yy=\frac{1}{4}aa-xx$; iawna iest, że kiedy CP albo x (fig. 4.) rośnie, to y albo PM zmnięysza się, a zatem Podtyczna PT pada z strony PM przeciwnemy początkowi odcinków C ; co téż i rachunek wskazuje; albowiem różniczkowawszy, będzie $2ydy=-2xdx$, a zatem $\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$; więc $\frac{ydx}{dy}=-\frac{y^2}{x}=-\frac{(\frac{1}{4}aa-xx)}{x}$, wartość w której znak $-$ daie znać, że ią trzeba wznaczyć z strony przeciwnemy tēy stronie, która uważała się w braniu ilości $\frac{ydx}{dy}$ za formułę należącą do Podtyczney.

Weźmy sobie ieszcze na przykład zrównanie $xy=aa$, należące do Hiperboli uważoney między kóncotycznymi (Alg. 282); mieć będziemy $xdy+ydx=0$, a zatem $\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}$; więc $\frac{ydx}{dy}=-\frac{xy}{dy}=-x$; co nam znać daie, że chcąc przytknąć styczną do Hiperboli uważoney między kóncotycznymi, trzeba wziąć na kóncotyczny bliższy

fig. 5. punktowi M o który rzecz idzie (fig. 5) z strony PM przeciwny początkowi A odcinków x , linią $PT=AP=x$.

A tu pokazuje się, z jaką łatwością wyнайdują się te wszystkie rzeczy przy pomocy rachunku różniczkowego.

Na wzór Parabol w powszechności wszelkiego rodzaju, nazywają się Hiperbolami uważonemi względem końcотycznych, wszelkie linie krzywe, do których należące zró-

wnanie takie jak $y^m = a^{m+n} x^{-n}$, jest o dwu wyrazach, ale w którym wykładniki należące do y i do x położonych w różnych częściach tegoż zrównania, mają znaki przeciwne. Można by i takowe linie krzywe wziąć sobie jeszcze za przykład, ale obrachowanie tego zostawiamy czytelnikowi, które

odbywszy znajdzie, że Podtyczną jest, $-\frac{m}{n}x$;

to jest, że pada z strony przeciwny początkowi odcinków x , i równa się odpowiadającemu odcinkowi powtórzonemu tyle razy, ile jest jednościów w wykładniku głoski y rozdzielonym przez wykładnika głoski x .

32. Uważmy jeszcze, że $\frac{dx}{dy}$ wyraża styczną tego kąta, jaki czyni linia krzywa w każdym swoim punkcie, z rzędną odpowiadającą; a $\frac{dy}{dx}$ wyraża styczną kąta, jaki czyni linia krzywa z osią odcinków. Jakóż w trójkącie prostokątnym Mnr (fig. 1) (wziąwszy za promień Tablicie dność)

fig. 1.

dność) wypada proporcya, $rm:rM :: 1:1$; Stycz. rmM ; więc Stycz. $rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. Więc żeby dóysdź w

którem miejscu linia krzywa albo iey styczna, czyni z rzędną kąt iaki pewny zadany, albo kąt którego styczna byłaby wiadoma; oznaczwszy takową styczną przez m

będzie $m = \frac{dx}{dy}$; potem, przez zróżniczkowanie zrównania należącego do linii krzywey wynaląwszy wartość ilości $\frac{dx}{dy}$, i zrównawszy ją

z m , wypadnie zrównanie, w którym położwszy zamiast y wartość jego wyrażoną w x i w statecznych, wyciągnioną z zrównania należącego do linii krzywey, wynajdzie się wartość albo wartości głoski x , odpowiadające tym punktóm, w których linia krzywa z rzędną czyni kąt dany; a jeżeli by ta linia krzywa, nieczyniła nigdzie kąta równego zadanemu, to wartości głoski x wypadną w rachunku w postaci zmyślony, albo też samo zrównanie, wskaże oczywiste niepodobieństwo.

Np. w Hiperboli do której należało.
by to równanie, $yy = 2(ax + xx)$, znalazło.
by się $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a + 4x}$, wartość która zróż-

wnana z m , daie $\frac{2y}{2a + 4x}$ albo $\frac{y}{a + 2x} =$

m ; skąd wyciąga się $y = ma + 2mx$; a że znówu równanie należące do téj linii krzywéy daie $y = \sqrt{2(ax + xx)}$, więc $ma + 2mx = \sqrt{2(ax + xx)}$, albo skwadrówawszy, $m^2aa + 4m^2mx + 4m^2xx = 2ax + 2xx$. Teraz gdyby było zapytano, w którym miejscu takowa Hiperbola czyni z rzędną kąt od 45° ; ponieważ styczna odpowiadająca 45° temu stopniowi, równa się promieniowi, więc będzie $m = 1$, co przemienia równanie na $aa + 4ax + 4xx = 2ax + 2xx$ albo $2xx + 2ax + aa = 0$; a zatem będzie $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa)}$ $= -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}aa)}$; wartości zmyślane, które znać daia, że hiperbola do której należałoby to równanie $yy = 2(ax + xx)$, nieczyni w żadnym miejscu z rzędną kąta od 45° .

Przystosowanie do ograniczenia linii krzywych, a w powszechności do ograniczenia wszelkich ilości, tudzież do zagadnień o największościach i najmniejszościach (de maximis & minimis).

33. **W**idzieliśmy dopiero wyżej (32), że $\frac{dx}{dy}$ wyraża styczną kąta, iaki czyni z rzędną albo fa-

sama linia krzywa albo iéy styczna w każdym punkcie; a $\frac{dy}{dx}$ wyraża styczną kąta, iaki czyni albo sama linia krzywa, albo iéy styczna z osią odcinków. Więc chcąc wiedzieć w którym miejscu styczna linii krzywéy, staie się równoległą rzędnym, trzeba poszukać w którym miejscu wartość ilości $\frac{dx}{dy}$ albo co na

iedno wychodzi w którym miejscu dx , staie się zerem; żeby zaś wiedzieć w którym miejscu styczna linii krzywéy jest równoległa odcinkom trzeba szukać w którym miejscu $\frac{dy}{dx}$ albo co na iedno wychodzi, w którym miejscu dy staie się zerem. Albowiem iawna jest, że w pierwszym przypadku, między linią krzywą a między rzędnymi, w drugim zaś przypadku, między linią krzywą a między odcinkami niema żadnego kąta.

A stąd wynika iawnie, że chcąc wiedzieć ieżeli linia krzywa, wyrażona w daném równaniu, ma w jakim punkcie swoię stycznią równo-

wnoległą rzędnym albo odcinkóm, trzeba takowe zrównanie zróżniczkować, a wyciągnawszy z niego wartość ilości $\frac{dx}{dy}$, i licznika takowey wartości zrównawszy z zerem, wypadnie nowe zrównanie, które wraz z zrównaniem należącym do sameyże linii krzywéy, pokaże wartości głosek x i y , dających znać w którym miejscu styczna jest równoległa rzędnym, tak iż ieżeliby to zdarzyć się miało w kilku miejscach, to téż wartości głosek x i y , wypadną kilkorakie. Przeciwnie zaś zrównawszy mianownika z zerem, to takowe zrównanie wraz z zrównaniem należącym do sameyże linii krzywéy, pokaże wartości głosek x i y odpowiadające tym miejscóm, w których styczna jest równoległa odcinkóm.

fig. 6. Zebyśmy to objaśnili jakim znanym przykładem, obierzmy sobie linią krzywą wyrażoną w tém zrównaniu, $yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb$, które należy do koła, ieżeli x i y rozumieją się wzajemnie sobie prostopadle, początek ich biorąc od punktu A położonego zewnątrz koła. Linie AP (fig. 6) są wyrażone przez x , a linie PM , PM' przez y , mające dwie wartości.

tości, odpowiadające każdéy wartości x , a wynikające z tegóż zrównania.

Zróżniczkowawszy to zrównanie, będzie $2ydy + 3xdx = 2adx + 2bdy$; skąd wyciąga się $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$. Zrównamy z zerem naprzód licznika, żeby dóysdź w których miejscach styczna wypada równoległa rzędnym, a mieć będziemy $2y - 2b = 0$, albo $y = b$. Położywszy tę wartość w zrównaniu należącym do linii krzywéy, wypadnie $bb + xx = 3ax - 2aa + 2bb - bb$ albo $xx - 3ax = -2aa$, któreto zrównanie rozwiązane, da $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$, to jest $x = 2a$, i $x = a$; co nam znać daie, że linią krzywa albo ieý styczna, wypada równoległa rzędnym w dwóch punktach R i R' , z których każdy ma za rzędną linią b , a z których ieden R ma za odcinek linią $AQ = a$, drugi zaś R' ma za odcinek linią $AQ' = 2a$.

Teraz żeby dóysdź w którym miejscu linią krzywa albo ieý styczna jest równoległa odcinkóm, zrównamy z zerem mianownika wartości ilości $\frac{dx}{dy}$, a mieć będziemy $3a - 2x = 0$, albo $x = \frac{3}{2}a$. Położywszy tę wartość w zrównaniu należącym do linii krzywéy, mieć będziemy $yy + \frac{9}{4}aa = \frac{9}{2}aa - 2aa + 2by - bb$ albo $yy - 2by + bb = \frac{1}{4}aa$; a po wyciągnięciu pierwiątka kwadratowego, będzie $y - b = \pm \frac{1}{2}a$, więc $y = b + \frac{1}{2}a$, to jest $y = b + \frac{1}{2}a$ i $y = b - \frac{1}{2}a$; co nam znać daie, że styczna wypada równoległa odcinkóm, w dwóch punktach T i T' , które mają za spólny odcinek linią $AS = \frac{3}{2}a$, a z których ieden T ma za rzędną $ST = b + \frac{1}{2}a$, drugi T' ma za rzędną linią $ST' = b - \frac{1}{2}a$.

Punkta Q i Q' nazywają się *granicami* odcinków (limites); bo między Q i Q' każdemu odcinkowi AP odpowiada wartość rzetelne PM i PM' wyrażone przez y , zamiast że między Q i A , i od Q' aż daley, niema żadnego punktu któryby należał do linii krzywéy; tak iż przypuściwszy x być mnieytlze aniżeli AQ czyli a , albo téż więklsze aniżeli AQ' czyli $2a$, nieznaydziemy żadnéy rzetelnéy wartości odpowiadającéy głosce y . Jakóż, ieżeli w zrównaniu położymy zamiast x , ilość $a - q$ mnieyszą nad a , albo téż ilość więklszą nad $2a$, taką iak $2a + q$, po rozwiązaniu zrównania, wartości głoski y znaydziemy zmyślone.

Podobnie, ieżeli zmyślimy sobie linię AL , równoległą rzędnym a przechodzącą przez punkt A , która będzie osią rzędnych, i ieżeli przez punkta T i T' poprowadzą się linie TL , TL' równoległe odcinkóm; to linie $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, i $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$, będą granicami rzędnych; albowiem iawna jest, że niemoże być więklszey rzędney nad AL , ani téż mnieyszey nad AL' , z przyczyny że styczná musi być równoległą odcinkóm. A zatém ieżeli położymy w zrównaniu należącém do linii krzywéy, zamiast y , ilość mnieyszą aniżeli $b - \frac{1}{2}a$, np. taką iak $b - \frac{1}{2}a - q$, zobaczymy rozwpadną nam zmyślone. Tóż będzie, położywszy zamiast y , ilość $b + \frac{1}{2}a + q$, to jest więklszą nad $b + \frac{1}{2}a$.

34. Rzędna ST jest naywięklszą spomiędzy tych wszystkich, co przytykają do części wklękléy okręgu RTR . A znowu rzędna ST' jest

jest naymnieysza spomiędzy tych wszystkich, co przytykają do części wypukléy; rzędne zaś QR i QR' są oraz i naymnieysze spomiędzy przytykających do części wklękléy, i naywięklsze spomiędzy przytykających do części wypukléy.

35. A tak iedenże sposób służy oraz ^{1^{od}} Do naznaczenia granic odcinkóm i rzędnym. ^{2^{re}} Do naznaczenia w iakich przypadkach styczná staie się równoległą odcinkóm albo rzędnym. ^{3^{cie}} Do wyznaleziénia naywięklszych odcinków albo rzędnych.

36. Lecz, niech będzie ilość iaka chce w iaki chce sposób wyrażona Algebraicznie, takowe wyrażenie iéy Algebraiczne, zawlsze da się uważać iakoby wyrażenie rzędney należący do iakiéy linii krzywéy.

Np. mając wyrażenie $\frac{x^2 \times (a - x)}{aa}$, i takową ilość nazwawszy y , będzie $y = \frac{x^2(a - x)}{aa}$; to zrównanie mogę sobie uważać, iakby było należące do takiéy linii krzywéy, w któręby x było odcinkiem, a y rzędną. Natén-

tenczas jeżeli ilość $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$, mo.

że w pewnym razie stać się większą lub mniejszą, aniżeli w wszelkim innym przypadku (co nazywa się że ilość jest sposobna do przyjęcia *naywiększości* lub *naymniejszości*), to w takim razie, oczywiście trzeba tylko słowo w słowo trzymać się sposobu wzwyż podanego; to jest naprzód różniczkować zrównanie, a potem wyciągnąć z niego wartość ilości $\frac{dx}{dy}$, zrównać z zerem licznika albo mianownika takowej wartości.

37. I na temcito należy cała rzecz tycząca się *naywiększości*ów i *naymniejszości*ów, iedna z naypożyteczniejszych w Rachunku Różnicowym, mająca za cel, ażeby znaleźć, która jest *naywiększa* albo *naymniejsza* spomiędzy wielu ilościów, rosnących albo ubywających zawsze iednakowo, a mówiąc w powszechności mająca za cel, ażeby wynaléść taką ilość, która spomiędzy wszystkich posiada w *naywyższym* stopniu iakie pewne własności. Zobaczmy to w przykładach.

38. Niechay będzie zadano, żeby liczbę a rozdzielić na dwie części takie, ażeby mnogość z nich wynikająca była większą aniżeli gdyby taż liczba podzieliła się na iakiejkolwiek inne części. Oznaczmy sobie przez x iedną z takowych części, to druga będzie wyrażona przez $a - x$; a mnogość z nich przez $ax - xx$; która daymy że jest $= y$; mieć będziemy $y = ax - xx$; więc różniczkowawszy będzie, $dy = adx -$

$2x dx$, a zatem $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$. Zrównawszy

licznika z zerem, będzie $1 = 0$, co jest rzeczą niepodobną. a zatem jeżeli tu ma mieć się *naywiększość*, to chyba wynaydzie się, zrównawszy mianownika z zerem. Co zrobivszy, będzie $a - 2x = 0$; skąd wyciąga się $x = \frac{1}{2}a$, wartość która znać daie, że podzieliwszy liczbę zadaną na iakiejkolwiek bądź dwie części, mnogość z takowych dwóch części wynikająca, w ten czas będzie *naywiększa* iak tylko być może, kiedy każda z nich równać się będzie połowie zadaney liczby.

39. Jeżeli ilość będzie wyrażona Algebricznie, iak w terazniéym przykładzie, to można obéyśdź się bez równania iéy z nową odmienną y ; nietrzeba tylko ią prosto różniczkować, i zrównać z zerem licznika lub mianownika, jeżeli takowa różniczka jest ułamkiem. I tak w tymże przykładzie, różniczkowalbym prosto $ax - xx$, a zrówna-

wnawszy z zerem różniczkę $adx - 2x dx$, miałbym $adx - 2xax = 0$, skąd wyciąga się $x = \frac{1}{2}a$.

40. Obierzmy sobie jeszcze inſze powszechniejsze Zagadnienie. Niechay trzeba będzie np. podzielić liczbę wiadomą a , na dwie części takie, ażeby mnogość wynikająca z iednëj wyniesionëj do pewnego stopnia, przez drugą część wyniesioną do podobnegoż albo też do innego stopnia, była największą mnogością iak tylko można. Oznaczmy sobie przez x pierwszą część, a przez m stopień do którego ma być wyniesiona; natenczas druga część będzie wyrażona przez $a - x$, która daymy że ma być wyniesiona do stopnia n ; w takim razie, żadaną mnogością będzie ilość, $x^m(a-x)^n$; takową zróżniczkowawszy i wypadłą różniczkę zrównawszy z zerem, będzie. $mx^{m-1}dx(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$; a rozdzieliwszy wszystko przez $x^{m-1}dx(a-x)^{n-1}$, będzie $m(a-x) - nx = 0$, albo $ma - mx - nx = 0$; skąd wyciąga się $x = \frac{ma}{m+n}$. Daymy tedy że liczba zadana a , miała być podzielona na dwie części takie, ażeby kwadrat iednëj części rozmnożony przez sześcian drugiey części, dał największą mnogość iak tylko można. W takim razie będzie $m=2$, a $n=3$; a zatem wypadnie $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$; to iest, że iedna część powinna wynosić $\frac{2}{5}$ liczby albo ilości zadanéj, a druga $\frac{3}{5}$.

To

To co powiedziało się wyżej z okazji figury 6, daie znać, że ilość fig. 6. może stać się największą spomiędzy wszystkich innych sobie podobnych, a to dwoma sposobami; iako to kiedy ilość taka iak PM naprzód rośnie, mająca potem umniejszać się, albo kiedy ilość taka iak $P'M'$ zrazu rośnie, mająca potem nagle zaſtanowić się, obróciwszy się w $Q'R$; ale w tym ostatnim przypadku, pomieniona ilość iest razem i największą spomiędzy wszystkich rzędnych, przytykających do części wypukłëj, i najmniejszą spomiędzy tych co przytykają do części wklęklëj. Podobnież, ilość może stać się najmniejszą, spomiędzy wszystkich innych sobie podobnych, także dwoma różnemi sposobami, iakoto: kiedy PM naprzód zmniejsza się ażeby potem roſła, albo też kiedy ilość taka iak $P'M'$ naprzód zmniejsza się ażeby potem nagle zaſtanowiła się, która w tym ostatnim przypadku iest razem najmniejszością, i największością; najmniejszością, względem ramiénia $M'TM'$, a największością względem ramiénia $M'TM'$.

41.

41. A zatem wiedząc że ilość iaka, jest sposobna do przyięcia największości lub najmniejszości, albo też obojga, żeby rozeznąć w jakim znajduie się z tych trzech przypadków, trzeba (rozumiejąc że a oznacza wartość głośki x przyzwoita największości lub najmniejszości) trzeba mówię, w zadanej ilości położyć kolęyno zamiast x ilości $a+q$, a , i $a-q$. Jeżeli dwa wypadki skrajne będą rzetelne i mniejsze nad wypadek środkowy, to ilość będzie największością; przeciwnie jeżeli dwa wypadki skrajne będą większe nad wypadek środkowy, to ilość będzie najmniejszością; natomiast jeżeli z dwóch wypadków skrajnych, ieden będzie zmyślony a drugi rzetelny, to ilość będzie razem i największością i najmniejszością.

42. Kiedy w szukaniu największości lub najmniejszości, wynaleziona wartość ilości odmienną, na wartość największości lub najmniejszości daie ilość przeczącą, to należy stąd wnieść, że takowa wynaleziona największość albo najmniejszość

mniejszość, nienależy do niniejszego zagadnienia, ale raczej do takiego zagadnienia, w którym niektóre warunki zachodziłyby przeciwne.

Np. gdyby zadano było przedzielić linią AB (fig. 7) w punkcie C , tak ażeby kwadrat odległości AC od punktu A , będąc rozdzielony przez odległość od punktu B , dał najmniejszy wieloraz jaki tylko być może. Tym końcem oznaczwszy przez a linią zadaną AB , a przez x część AC ; część pozostała CB będzie wyrażona przez $a-x$; a zatem wielorazem byłoby $\frac{x^2}{a-x}$; zróżniczkowawszy tedy tę ilość, albo

bo $x^2(a-x)^{-1}$, mieć będziemy $2xdx \cdot (a-x)^{-1} + x^2dx(a-x)^{-2} = 0$, albo $\frac{2xdx}{a-x} + \frac{x^2dx}{(a-x)^2} = 0$, albo $2axdx - x^2dx = 0$, albo $(2a-x)x = 0$; skąd wyciąga się $x=0$, albo $2a-x=0$; pierwsza wartość, wyraża najmniejszość, ale która oczywiście pod żaden rachunek niepodpada. Co się zaś dotyczy drugiey, z której wyciąga się $x=2a$, jeżeli zamiast x położy się ta wartość w ilości $\frac{x^2}{a-x}$, to takowa przemieni się na $\frac{4a^2}{-a}$, albo

na $-4a$. Wynaleziona tedy najmniejszość, nie może należeć do niniejszego zagadnienia. Ale dawszy baczenie na wypadłą wartość $x=2a$, da się widzieć, że punkt C nie może znajdować się między A i B ; ale że zagadnienie mogłoby być rozwiązane, gdyby rzecz szła o wynalezienie tegoż punktu C na przedłużeniu linii AB za punkt B , względ-

względem A . Lecz w takim razie, jeżeli oznaczmy AC przez x ; odległość BC już niebędzie wyrażona przez $a - x$, ale przez $x - a$, a zatem ilość $\frac{x^2}{a - x}$ przemieni się na $\frac{x^2}{x - a}$, którą różniczkowawszy, zrównawszy z zerem, będzie $\frac{2x dx}{x - a} - \frac{x^2 dx}{(x - a)^2} = 0$, albo po uczynionych zebra- niach: $x^2 dx - 2ax dx = 0$; skąd wyciąga się $x = 2a$, iak pierwszy; lecz ta wartość poło- żona w ilości $\frac{x}{x - a}$, przemienia ją na $4a$, więc najmniejszość ma miejsce w tym przypadku.

Jeżeli mianownik $x - a$ różniczki, zrów- na się z zerem, to będzie $x = a$, co daie znać o *największości*. Jakóż kiedy $x = a$, to ilość staje się niezmienną, ale przeto niemnię ma prawdziwe znamie *największości*; albowiem x czyto rozumie się mniejsze czy większe nad a , to zawsze ilość mniejsza niezna- duie się inaczej, tylko przypuściwszy by- dź $x = a$.

43. Kiedy w równaniu iakię- ility ilości mający by- dź *największością* albo *najmniejszością*, znayduie się iaki mnożnik albo dzielnik stateczny, to przed różniczkowaniem można odrzucić tak tego iak owego. Ja- kóż, daymy że $\frac{ay}{b}$ wyraża w powse- chności ilość, która ma by- dź *na- większością*.

większością albo *najmniejszością*; gdzie gółki a i b rozumieją się sta- teczne; musi tedy by- dź $\frac{ady}{b} = 0$, ale że ani a ani b nieieft zerem, więc musi by- dź $dy = 0$; skąd wypada tén- że sam wniosek, iak gdyby tylko sa- mo y miało by- dź *największością* albo *namniejszością*, to ieft tén- że sam, co wypada po odrzuceniu czynni- ków i dzielników statecznych. Ta uwaga służy do skrócenia Rachun- ków w wielu przypadkach.

44. Obierzmy sobie teraz to zaga- dnienie: *Ażeby znalédz, spomiedzy wszy- stkich linii które tylko mogą by- dź poprowa- dzone przez tén- że punkt D, dany w znaio- mym kącie ABC (fig. 8), która ieft taka, co fig. 8a. z bokami tego kąta, czynilaby najmniejszy tróykąt, iak tylko by- dź może.*

Poprowadźmy przez punkt D linią DG równoległą bokowi AB , a zmyśliwszy sobie iakąkolwiek linią prostą EF , prze- prowadzoną przez tén- że punkt D , spuść- my prostopadłą DK na linią BC , a dru- gą EL z punktu E , w którym linią EF spotyka się z linią AB . Linią BG , ro- zumie się by- dź wiadoma, iako téz i pro- stopadła DK ; niechay tedy będzie $BG = a$, $DK = b$, a podstawa BF tróykąta BEF niech będzie $= x$. Jawna ieft, że poczwłszy od pewnego punktu, im bardzię będzie ro- snąc linią BF , tén téz bardzię tróykąt po- mnażać się będzie. Przeciwnie znowu da się

poymować, że taż linia BF im bardziej zmniejszać się będzie, tem też bardziej zmniejszać się będzie trójkąt, ale to tylko aż do pewnego punktu. Bo jeżeliby linia BF prawie zrównała się linii BG , to linia EDF stałaby się prawie równoległą linii AB , obracając się w takim razie prawie w linię GD , przez co trójkąt stawałby się niezmiernie wielki. Musi tedy być jakaś pewna wartość linii BF , dająca najmniejszy trójkąt iak tylko być może; którą żeby wynaleść, szukamy powszechnego wyrażenia trójkąta BEF . Trójkąty sobie podobne, BEF , GDF , dają $GF:BF::DF:EF$; trójkąty zaś DKF i ELF także sobie podobne dają $DF:EF::DK:EL$; więc $GF:BF::DK:EL$; to jest,

$$x-a:x::b:EL=\frac{bx}{x-a}; \text{ więc powier-}$$

szchnia trójkąta BEF , która jest $\frac{EL \times BF}{2}$, będzie wyrażona przez $\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2}$, albo

przez $\frac{\frac{1}{2}bx}{x-a}$. Trzeba tedy, zróżniczkować tę ilość, żeby albo licznik albo mianownik stał się zerem, albo też (z przyczyny że można wyrzucić statecznego czynnika $\frac{1}{2}b$ (43), dosyć będzie zróżniczkować ilość $\frac{xx}{x-a}$; lecz niepowtarzając rachunku

już wyżej odbytego (42), wnieść sobie i tu podobnie można, że $x=2a$. Więc zrobiwszy linię $BF=2a=2BG$, linia FDE , poprowadzona przez punkt D , da trójkąt FBE , najmniejszy iak tylko być może.

45. Szukamy teraz, spomiędzy wszystkich równoległościannów téżże powierzchni i téżże wysokości, który jest taki, aby miał największą objętość.

Oznaczmy sobie przez h wysokość, przez cc powierzchnią równoległościannu; x i y niechay będą dwa boki prostokąta służącego za podstawę. Cała powierzchnia składa się z sześciu prostokątów, z których dwa mają h za bok czyli za wysokość, a x za podstawę; inne dwa mają h za wysokość, a y za podstawę; a na reszcie dwa ostatnie mają x za podstawę, a y za wysokość; a zatem całej powierzchni będzie to wyrażenie, $2hx + 2hy + 2xy = cc$. Co zaś dotyczy się objętości czyli bryłowości, takowa wyraża się przez hxy ; która ponieważ ma być największa spomiędzy wszystkich innych téżże powierzchni, przeto potrzeba ażeby iey różniczka $hxdy + hydx$ była $= 0$, albo (co na iedno wychodzi) ażeby $xdy + ydx = 0$. Lecz zrównanie $2hx + 2hy + 2xy = cc$, które wyraża że powierzchnia tych wszystkich równoległościannów jest stateczna, to jest zawsze iednakowa, daie $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$; więc w tém zrównaniu położywszy wartość ilości dx , wyciągniętą z pierwszego zrównania, po uczynionych zebraniach, będzie $y = x$; co znać daie, że podstawa takiego równoległościannu powinna być kwadratem. Zeby zaś oraz dósłdz boku iego czyli wysokości, trzeba zamiast y położyć wartość iego x , wzrównaniu $2hx + 2hy + 2xy = cc$, które tym sposobem przemieni się na $4hx + 2x^2 = cc$, a będąc rozwiązane, da $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$; gdzie z dwóch wartościów iedna, to jest $x = -h - \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$ będąc przeczącą, niemoże służyć niniejszemu zagadnieniu, a zatem na

przyzwoitą wartość w tym razie, niezostaje tylko ta druga, $x = -h \pm \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$.

46. Teraz gdyby było zadano: iaka powinni być wysokość h , ażeby równoległoscian spomiędzy wszystkich innych téż powierzchni, miał największą bryłowość; trzeba naprzód uważać, że ponieważ wysokością będąc h , podstawa ma być kwadratem, więc takowa bryłowość musi być wyrażona przez hxx ; trzeba tedy ażeby różniczka ilości hxx , poczytając h i x za odmiennie, była $= 0$; a zatem będzie $2hxdx + xxdh = 0$, albo $2hdx + xdh = 0$, rozdzieliwszy przez x . Lecz równanie $4hx + 2x^2 = cc$, wyrażające że w takim razie powierzchnia jest stateczna, daie różniczkowawszy, $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$; więc położywszy w tém równaniu, zamiast dh wartość jego wyciągniętą z równania $2hdx + xdh = 0$, będzie po uczynionych zebraniach $h = x$; więc wieloscian szukany musi być sześcianiem, kiedy bok czyli wysokość jego h , ma równać się bokowi x kwadratu służącego za podstawę. Teraz żeby wynaleźć bok tego sześcianu, trzeba położyć zamiast h wartość jego x w równaniu $4hx + 2x^2 = cc$, które przez to odmieni się na $4x^2 + 2x^2 = cc$, albo $6x^2 = cc$, skąd wyciąga się $x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$. Więc spomiędzy wszy-

stkich równoległoscianów téż powierzchni, największa bryłowość jest sześciannu, mającego za bok linią równającą się pierwiastkowi kwadratowemu, wyciągniętemu z szostej części téż powierzchni,

47. Podobnie postąpić sobie będzie należało, żeby rozwiązać to inne zagadnienie: Spomiędzy wszystkich wałków prostych

tę-

tęż powierzchni, który jest, co ma największą objętość czyli bryłowość.

Oznaczywszy przez x średnicę podstawy, przez y wysokość, przez $1:c$ stosunek średnicy do okręgu, wypadnie na powierzchnią wypukłą $cxxy$, na całą zaś

powierzchnią, $cxy + \frac{cx^2}{2}$, a $\frac{cx^2y}{4}$, na bry-

łowość. Ktorato ostatnia ponieważ ma być największością, więc różniczka iey

musi być zerem; a zatem będzie $\frac{cxydx}{2} + \frac{cx^2dy}{4} = 0$, albo $2ydx + xdy = 0$; niemniéj

z przyczyny że powierzchnia jest stateczna, iey różniczka musi także być zerem, a zatem podobnie będzie $cxdy + cydx + cxdx = 0$, albo $xdy + ydx + xdx = 0$.

Zrównanie $2ydx + xdy = 0$, daie $dy = -\frac{2ydx}{x}$. Położywszy tę wartość w osta-

tniem równaniu, będzie $-2ydx + ydx + xdx = 0$, skąd wyciąga się $y = x$. Co znać daie, że spomiędzy wszystkich wałków prostych iednéjże powierzchni, ten ma największą objętość czyli bryłowość, którego wysokość równa się średnicy podstawy. I odwrotnie, spomiędzy wszystkich wałków prostych iednéjże bryłowości, ten ma najmnięszą powierzchnią, którego wysokość równa się średnicy podstawy.

Więc w moździerzach z kómorami wałkowemi, proch najmnięj mocy wywierza przeciwko ścianom takiéj komory, której głębokość równa się średnicy onéjże.

48. Szukaymy znowu teraz: Spomiędzy wszystkich trójkątów tegoż obwodu i

E 3

tę-

tęże podstawy, który jest taki, co by miał największą powierzchnią.

Oznaczmy sobie przez a podstawę AB , a przez c obwód trójkąta ABC (fig. 9). Spuścimy prostopadłą CP , i nazwiemy $AP = x$, $CP = y$; mieć będziemy $PB = a - x$, $AC = \sqrt{(xx + yy)}$, a $CB = \sqrt{[(a-x)^2 + yy]}$. Więc obwód będzie wyrażony przez $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a-x)^2 + yy]} + a$, a powierzchnia przez $\frac{ay}{2}$. Będzie

tedy $\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[(a-x)^2 + yy]} + a = c$; trzeba zaś ażeby różniczka wyrażenia $\frac{ay}{2}$ była $= 0$, to jest żeby było $\frac{ady}{2} = 0$, a za-

tém $dy = 0$. Dalej, zrównanie które wskazuje że obwód jest stateczny, będąc zróżniczkowane da nam,

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy)}} + \frac{(a-x) \cdot -dx + ydy}{\sqrt{[(a-x)^2 + yy]}} = 0, \text{ które, z przyczyny}$$

$$\text{ny że } dy = 0, \text{ wychodzi na } \frac{xdx}{(a-x)dx} - \frac{xdx}{\sqrt{(xx + yy)}} = 0,$$

albo rozdzieliwszy przez dx , i zniósłszy ułamki, na $x\sqrt{[(a-x)^2 + yy]} = (a-x) \cdot \sqrt{(xx + yy)}$. A skwadrówawszy, będzie $xx \cdot (a-x)^2 + xxyy = (a-x)^2 \cdot xx + (a-x)^2 \cdot yy$; potem wyrzuciwszy z obu części wyrazy jednakowe, i każdą część zrównania rozdzieliwszy przez yy , będzie $xx = (a-x)^2$, albo $xx = aa - 2ax + xx$, skąd wyciąga się $x = \frac{1}{2}a$, wartość dająca znać, że trójkąt powinién być równoramienny. A zatem trzeba z środka linii AB wysta-

wieć

wić prostopadłą, i z punktu B iako ze środka promieniem równającym się połowie zbytku obwodu c nad podstawę a , narysować łuk, który takową prostopadłą przetnie w punkcie C , natenczas, jeżeli poprowadzą się linie CB i CA , to niemi zamknie się trójkąt, mający największą powierzchnią spomiędzy wszystkich innych tegoż obwodu i tęże podstawy.

49. Teraz zaś chcąc wiedzieć w powszechności: Spomiędzy wszystkich trójkątów tegoż obwodu, który jest taki, co by miał największą powierzchnią, trzeba uważać, iako z poprzedzającego rozwiązania pokazuje się, że choćby podstawa była iako chce, to zawsze x powinno równać się iey połowie; to jest że niechay będzie iako chce, wartość głoski a , to zawsze musi być $x = \frac{1}{2}a$. To założywszy na przód, zrównanie wyrażające obwód, wynidzie na $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + a = c$, albo $2\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} = c - a$; a skwadrówawszy, będzie $aa + 4yy = cc - 2ac + aa$, skąd wyciąga się $y = \sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$. Powierzchnia tedy trójkąta, w powszechności wyrażona przez $\frac{ay}{2}$, przemieni się na $\frac{a}{2}\sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$. A że ta-

kowa powierzchnia ma być największą spomiędzy wszystkich innych tegoż obwodu, podstawa a niechby była iako chce, więc trzeba zrównać z zerem różniczkę ilości $\frac{a}{2}\sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$ albo ilości $a\sqrt{(cc - 2ac)}$, uważając w nię a iako odmienną. Będziemy zatem mieć $d[a\sqrt{(cc - 2ac)}]$, albo $d[a(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}}]$ to jest, $da(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}} - a \cdot da(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}}$

E 4

2ac)

$$\frac{2ac}{cada} - \frac{1}{2} = 0, \text{ albo } da \sqrt{(cc - 2ac)} - \frac{1}{2} = 0, \text{ albo } da(cc - 2ac) - \frac{1}{2} cada = 0, \text{ albo } ccda - 3cada = 0, \text{ skąd wyciąga się } a = \frac{c}{3}.$$

Więc podstawa a powinna być trzecią częścią obwodu: a ponieważ widzieliśmy indziej, że trójkąt ma być równoramienny, więc stąd jeszcze dalej wynika, że musi być i równoboczny. Więc spośród wszystkich trójkątów iednegóż obwodu, trójkąt równoboczny ma największą powierzchnią.

50. W tych dwóch rozwiązaniach, nierównaliśmy mianownika z zerem; bo w pierwszym, na x wypadłaby nam była wartość zmyślna; a w drugim byłibyśmy znaleźli $a = \frac{1}{2}c$, wartość która nierozwiązałaby zagadnienia; bo gdyby podstawa wynosiła połowę obwodu, to pozostałe dwa boki, obróciłyby się w tęż podstawę, a w takim razie trójkąt równa się zerowi. Na potem, kiedy licznik albo mianownik zrównany z zerem, niemiąłby nas przywieść do przyzwoitego rozwiązania, to już o nim wzmianki nieuczynimy, żebyśmy się daremnie mi rachunkami nierozwodzili.

51.

51. W zagadnieniu przedostatniem, nieprzytłizliśmy do wynalezienia, który jest spomiędzy wszystkich równoległoscianów téżże powiększchni, co ma największą objętość, aż po rozważeniu równoległoscianów iednéyże wyfokości. Podobnież w ostatniem zagadnieniu znaleźliśmy trójkąt mający największą powiększchnią, spomiędzy wszystkich innych tegóż obwodu, ale wprzód poczęliśmy od rozwiązania zagadnienia, tyczącego się trójkąta iednéyże podstawy.

Pospolicie zręczniey bywa tak sobie postępować; to jest rozwiązuąc zagadnienie, nietrzeba razem poczytać za odmiénne tylko iak najmniéyszą liczbę ilościów, a dopiero potem z koléi każdą ilość poczytaną wprzód za stateczną, uważać w rachunku iako odmienną.

Np. gdyby było zadano, rozdzielić liczbę pewną na trzy części, takie, ażeby mnogość wynikająca z tych trzech części, była największą mnogością iak tylko być może. Oznaczywszy sobie dwie z takowych części przez x i y , a przez a liczbę zadaną, trzecia część będzie wyrażona przez $a - x - y$, a zaś mnogość wynikająca z tych trzech części byłaby $xy(a - x - y)$,
któ-

które różniczka ma być zrównana, z zerem. Lecz w tym różniczkowaniu, zamiast uważania razem oboich ilości x i y za odmiennie, niebiorę tylko samo x za taką odmienną ilość, i mam $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, skąd wyciąga się $x = \frac{1}{2}(a - y)$; przez co mnogość $xy(a - x - y)$ odmienna się na $\frac{1}{4}y(a - y)^2$. Teraz znowu różniczkuję po czytając y za odmienną, i mam $\frac{1}{4}dy(a - y)^2 - \frac{1}{2}ydy(a - y)$, na różniczkę, którą podobnie zrównawszy z zerem, będzie $dy(a - y)^2 - 2ydy(a - y) = 0$, skąd wyciąga się $y = \frac{1}{2}a$; więc x , i trzecia część to jest $a - y$, każda musi być warta $\frac{1}{3}a$.

52. Można też, jeżeli się spodoba, poczytać wszystkie ilości razem za odmiennie, a potem zgromadziwszy wszystkie wyrazy rozmnożone przez różniczkę tęż ilości odmiennę, ich sumę zrównać z zerem, i toż samo wykonać względem różniczki każdą inną odmienną.

I tak w ostatnim przykładzie, mielibyśmy $aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = 0$; gdzie zosobna zrównawszy z zerem sumę wyrazów zawierających w sobie dx , i sumę wyrazów zawierających w sobie dy , mielibyśmy $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, tudzież $axdy - x^2dy - 2xydy = 0$; albo rozdzieliwszy pierwszą różniczkę przez ydx a drugą przez $x dy$, będzie $a - 2x - y = 0$, i $a - x - 2y = 0$; zrównania z których łatwo wyciąga się $x = \frac{1}{3}a$ i $y = \frac{1}{3}a$, jak było wyżej.

Przyczyna tego postępu łatwo poiąć się daie, zważywszy, iż tu niezachodzi tylko

ko ten warunek, ażeby cała różniczka była zerem. Lecz ten warunek w powszechności nie może być dopełniony tylko dwojakim sposobem; to jest, albo rozumiejąc że każda z dwóch różniczek dx i dy równa się zerowi, co czyniłoby wprawdzie zadość warunkowi, aleby nam nic niewskażało; albo też rozumiejąc że summa wyrazów mnożących dx jako też summa wyrazów mnożących dy , każda z nich równa się zerowi, a to właśnie wychodzi na to cośmy przepisali.

53. Kiedy warunki zagadnienia są wyrażone w wielu równaniach, to przed przyśtósowaniem tęż reguły do zrównania różniczkowego, mającego wskazać *naywiększość* albo *naymniejszość*, trzeba wprzód wyciągnąć z innych zrównań różniczkowanych, wartości różniczek tylu odmiennych, ile będzie zrównań oprócz tego zrównania, i takowe wartości wprowadzając się w to zrównanie; co uczyniwszy, postępuje się zwyczajnie podług reguły, iak gdyby nie było innego, tylko to zrównanie.

I tak w przykładzie wzwyż położonym przyśtósowanym do *naywiększego* równoległoscianu, mieliśmy to zrównanie $2hx + 2hy + 2xy = cc$, i ten warunek że hxy powinno być *naywiększością*. Jeżeli tedy h , x i y wszystkie trzy razem poczytać zechcemy za odmiennie, to zrównanie $2hx +$ t. d.
po

po różniczkowaniu da nam, $2hdx + 2xdh + 2hdy + 2ydh + 2xdy + 2ydx = 0$; z warunku zaś największości wypadnie $hxdy + hydx + xydh = 0$. Z pierwszego zrównania wy-

$$-ydx - xdy - hdy - hdx$$

ciągnąwszy $dh = \frac{x + y}{x + y}$

i położywszy tę wartość w drugim zrównaniu, po uczynionych zebraniach, będzie $hx^2dy + hy^2dx - xy^2dx - x^2ydy = 0$. Teraz sumę wyrazów mnożących dx , i sumę wyrazów mnożących dy , każdą osobno zrównawszy z zerem, mieć będziemy $hy^2 - xy^2 = 0$, albo $h = x$, i $hx^2 - x^2y = 0$; skąd, po rozdzieleniu wszystkiego przez spólnego czynnika x^2 , wyciąga się $h - y = 0$, albo $h = y$; a że było $h = x$, więc musi być także $y = x$; więc wszystkie trzy wymiary h, x, y , wypadają sobie równe, co właśnie zgadza się z pierwszym rozwiązaniem; nakoniec położywszy te trzy wartości w zrównaniu $2hx + 2hy + 2xy = cc$, będzie $6h^2 = cc$, skąd wyciąga się $h = \sqrt{\frac{cc}{6}}$, iak w témże pierwszym dopiero wzmiankowanym rozwiązaniu.

54. Nietylko można wszystkie razem, albo pojedynczo z kolei brać ilości za odmiennie, ale też można poczytać za stateczne, takie części tychże ilościów iakie się spodobaia, byleby liczba tych nowych warunków obranych podług upodobania, złączona z liczbą warunków należących do zagadnienia, nieprzewyższała liczby odmiennych x, y, z wchodzących w zagadnienie. Ta uwaga

ga może być arcy użyteczna w wielu zagadnieniach, osobliwie gdzie wchodzą ilości pierwiastkowe.

O Promieniach Krzywościów albo o Rozwiyce (*Dévoloppée*).

55. **Z**myśliwszy sobie, że z każdego punktu M, m, m' i. t. d. linii krzywéy iakiéykolwiek, (fig. 10), fig. 10. są powystawiane prostopadłe $MN, mn, m'n'$ i. t. d.; to z przecięciów kolejnych n, n' i. t. d., powstanie inna linia krzywa, nazwana *Rozwiyką*; z przyczyny, że uważając ją iakby była obwinięta nicią ABN , przytkniętą do początkowego punktu B , w takim razie, rozwiając tę linię krzywą, koniec A nici, nakryłby linię krzywą AM . Jakóż np. w rozwinięciu części Nn , uważając Nn iako linię prostą bardzo małą, nie MNn , kryśli około punktu n iako śrzodka, łuk Mm , któremu nie MNn musi być koniecznie prostopadła; bo promień koła jest prostopadły swemu okręgowi.

56. Mając zadaną linię krzywą AM , a chcąc wynaléśdź wartość li-

linii Mn poprowadzonéy z iakiégo-
kolwiek punktu M , a nazywającéy
się *Promieniem Rozwiyki*, trzeba
uważyć, że linia Mn powstaie z
spólnego przecięcia się dwóch pro-
stopadłych niezmiérnie bliskich ie-
dna drugiéy, iakie są MN i mn . Dla
fig. 11. czego (fig. 11), należy sobie zmy-
ślić dwa łuki przyległe iedén dru-
giému Mm , mm' niezmiérnie małe
i niezmiérnie mało od siebie ró-
żne, uważając ie iakoby dwie linie
proste, tudzież linia MN prostopa-
dłą w punkcie M na linia Mm , ia-
ko téż linia mN , prostopadłą w
punkcie m , na linia mm' . Natén-
czas w trójkacie NMm prostokąt-
nym w M , będzie $1 : \text{wst. } MNm ::$
 mN albo $MN : Mm$, albo téż (z
przyczyny że kąt MNm iest nie-
zmiérnie mały), będzie $1 : MNm ::$
 mN albo $MN : Mm$; więc $MN =$
 $\frac{Mm}{MNm}$. Lecz przedłużywszy linia
 Mm , będzie kąt $umm' = MNm$, bo
z tych obu kątów każdy iest dopeł-
nieniem iednegoż kąta MmN , z
przyczyny kątów prostych NMm
i Nmm' ; więc $MN = \frac{Mm}{umm'}$.

Je-

MATEMATYKI.

Jeżeli poprowadzą się linie Mr
i mr' równoległe linii AP , to ła-
two daie się widzieć, z przyczyny
kąta umr' równego kątowi mMr ,
że kąt umm' iest ilością o którą kąt
 mMr zmniejszyła się, albo że iest ró-
żniczką kąta mMr , która powinna
bydź wzięta w sposób przeczący
kiedy linia iest wklęka, iak tu,
a przeciwnie powinna bydź wzię-
ta w sposób twierdzący, kiedyby
linia była wypukła; będzie tedy
 $MN = \frac{Mm}{\mp d(rMm)}$. Szukamy teraz
wyrażenia ilości $d(rMm)$; i uważmy
tym końcem, że styczna kąta rMm
iest $\frac{dy}{dx}$, a dostawą iego, [nazwawszy
 ds łuk Mm albo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$], iest
 $\frac{dx}{ds}$; iako to łatwo wnieść sobie mo-
żna stąd, że trójkąt rMm iest pro-
stokątny; widzieliśmy téż takżé (24),
że kiedy kąt iakikolwiek iest oznaczo-
ny przez z , to będzie $dz = (\text{dost. } z)^2$
 $d(\text{stycz. } z)$; więc $d(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2}$.
 $d(\frac{dy}{dx})$; więc naostatek $MN =$
 ds

$\frac{ds}{\sqrt{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) + dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}} = \frac{ds^3}{ds^3}$ Itajel
formuła, służąca do wynalezienia
promieniów linii nazwaney Roz-
wiyki, kiedy w nięj rzędne są so-
bie równoległe.

57. Zebyśmy przytósowanie tego za-
baczyli w iakich przykładach, daymy że
linia krzywa AM, iest kołem do którego na-
leży zrównanie $yy = 2ax - xx$; mieć bę-
dziem $y = \sqrt{2ax - xx}$; więc $dy =$
 $\frac{adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$; a $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ będzie =

$$\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}; \text{ tudzież } \frac{dy}{dx} \text{ będzie } = \frac{a - x}{\sqrt{(ax - xx)}}; \text{ więc } d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-a^2 dx}{(2ax - xx)^{3/2}}$$

formuła tedy służąca terazniyszemu przy-
padkowi, gdzie linia krzywa rozumie
wklęka, i rzędne rozumieją się sobie ro-

wnoległe, będzie $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) + dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; która prze-

$$\text{mienia się w tę, } \frac{(2ax - xx)^{3/2}}{a^2 dx^3} = a; \text{ to iest}$$

tu promień Rozwiyki iest zawsze tęj-
wielkości, i równy promieniowi koła, tak
że cała Rozwiyka zamyka się w iednym
punkcie, który iest środkiem; a to dooko-
nale zgadza się z tém, co o kole mamy
wiadomo.

Obierzmy sobie na drugi przykład Pa-
rabolę, do której należy to zrównanie y^2
 $= ax$, albo $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, mieć będziem dy
 $= \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$; więc $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$
 $\sqrt{(dx^2 + \frac{1}{4} ax^{-1} dx^2)} = dx \sqrt{(1 + \frac{a}{4x})} = dx.$

$$\sqrt{\left(\frac{4x + a}{4x}\right)} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{(4x + a)}, \text{ a } \frac{dy}{dx} =$$

$$\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}; \text{ więc } d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx; \text{ a zatem}$$

formuła $\frac{ds}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, odmienna się w tę

$$\frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{(4x + a)}}{-\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx} = \frac{(4x + a)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{dx^2 \times \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx}{4x + a} \sqrt{\left(\frac{4x + a}{a}\right)}.$$

58. Promienie Rozwitek służą do
zmiężenia w każdym punkcie krzywizny
linii krzywéy. Ponieważ w rozwinięciu
cząstki Nm linii krzywéy BN (fig. 10), ni-
tka kryśli mały łuczek mm', więc ten łu-
czek mm', ma tęż samę krzywosc co koło
mające za promień linią mn. A tak mając
wyrażenie promienia Rozwiyki, tém samém
iest wiadomy, odpowiadający każdemu pun-
ktowi promień koła, mającego tęż samę
krzywosc, iaką ma linia krzywa w tymże
punkcie. A że krzywosc koła iest tém wię-
ksza, im mniejszy będzie iego promień, to
iest że krzywosci kół, są w stosunku od-
wrotnym promieni swoich; więc zawsze ła-
two będzie wziąć stosunek między krzy-

wością linii krzywéy w jakimkolwiek punkcie, a między krzywością téżę albo in-szézę linii, także w jakimkolwiek punkcie. I tak gdybyśmy chcieli wziąć stófunek między krzywością Paraboli iaką ma w wierszchołku, a między krzywością iéżę, iaką ma w kón-cu rzędny przechodzący przez śródpół; uważć mamy, że w wierszchołku téy linii iest $x=0$, i że odcinek odpowiadający śródpółowi iest $\frac{1}{2}a$ (Alg. 291). W wyrażeniu te-dy promienia Rozwiyki, zrobiwszy koléyno $x=0$, i $x=\frac{1}{2}a$, wypadną nam te dwie wár-tości, $\frac{1}{2}a$ i $a\sqrt{2}$; więc promieniem Rozwiy-ki, odpowiadającym wierszchołkowi Para-boli, iest $\frac{1}{2}a$, a promieniem odpowiadają-cym kóncowi rzędny, przechodzący przez śródpół téżę Paraboli, iest $a\sqrt{2}$; więc krzy-wość uważona w pierwszym punkcie, ma się do krzywości uważonéy w drugim pun-ktcie :: $a\sqrt{2} : \frac{1}{2}a$ albo :: $2\sqrt{2} : 1$.

Ponieważ promień MN rozwiyki, nie-iest co innego tylko nitką obwiiającą, al-bo która uważa się, iakoby obwiiiała linią BN , więc idzie zatém, że takowy promień równa się w długości łukowi BN , pomnożo-nemu o część AB , to iest o którą nitka przechodziła linią krzywą, gdy poczynalo się rozwiianie, czyli pomnożonemu o pro-mień rozwiyki uważonemu w początkowym punkcie A . Więc linią krzywa BN może być sprostowana, to iest że można na-znaczyć długość każdego z iéy łuków BN .

FUNDAMENTA RACHUNKU CAŁKOWEGO.

59. Jest tu teraz mowa o powro-
cie od ilościów różniczko-
wych

wych do ilościów pomiérnych; z których różniczkowania wyniknęły pierwsze; sposób w który dzieie się taki powrót, nazywa się *Rachunkiem całkowym*.

Niemasz żadnéy takiéy ilości odmiennéy wyrażonéy Algebrai-cznie, któręby niemożna było zna-léśdź różniczki; ale bywa bardzo wie-le takich ilościów różniczkowych, które niedadzą się *scalkować*: iedne przeto, że w saméy rzeczy niemo-gły wyniknąć z żadnego zróżniczkó-wania; i takie są ilości $x dy$, $x dy - y dx$, i. t. d.; inne przeto, że na scalko-wanie ich ieszczé dotąd niewyna-leziono sposobu; spomiedzy których są takie, że podług podobieństwa, na-wet nadziei mieć niemożna aby kie-dy mogły być scalkowane.

Atoli pomimo tego, można przynajmniéy odnieść bardzo wiel-ki pożytek z tych ilościów, które wiemy iak się całkują. Takowe zechcemy tu dać poznać, a potém

F 2

204

* Przez ilość różniczkową rozumié-my tu, nie tylko ilość wynikającą z zróżni-czkowania, ale w powszechności wszelką ilość zawierającą w sobie różniczki dx , dy , i. t. d. iednéy, lub większézę liczby odmienných.

zobaczmy iak sobie trzeba postąpić z temi co nieprzyimują całkowania. Poczniemy naprzód od wytłómaczenia się z niektórych sposobów mówienia, których dalej używać mamy.

Nazwiemy *związkiem* ilości (fonction), wszelkie wyrażenie rachunkowe, w które ta ilość wchodzi, w iaki chce sposób. I tak x , $a + bx^2$, $\sqrt{x^2 + bx^2}$, i. t. d. są to związki głoski x .

Przez *ilości Algebraiczne* rozumieć będziemy te, których może być naznaczona doskonała wartość wykonawszy pewną liczbę działań Algebraicznych i Arytmetycznych, niezależących od Logarytmów. Przeciwnie przez *ilości Niealgebraiczne* rozumieć będziemy te, którym niemożna naznaczyć doskonałych wartościów ale tylko przybliżone, albo w których koniecznie dorozumiewa się przybliżenie; takie są Logarytmy i niezmienna liczba innych ilościów.

Do oznaczenia *całki* iakię różniczki, używać będziemy głoski $\int$, położony przed takową ilością; którą

rato

rato głoska znaczyć będzie to, co by znaczyły słowa: *summa ilości N*; bo *całkować* albo brać całkę iakię ilości, nie jest co innego, tylko zsummować wszystkie podraśnięcia niezmiennie małe, kterými pomnażać się musiała, ażby przyszła do pewnego sobie zamierzonego stanu.

O *Różniczkach z iedną odmienną*, mających *Całkę Algebraiczną*; a naprzód o *Różniczkach iednostoiwnych*.

60. **R**egula fundamentalna. Zeby *scalkować Różniczkę iednostoiwną*, trzeba iód *Pomnożyć wykładnika głoski odmiennéy o iedną iedność*. 2^{re} *Rozdzielić przez tego wykładnika tak pomnożonego, i przez różniczkę głoski odmiennéy*; to jest, rozdzielić przez tego nowego wykładnika, rozmnożonego przez różniczkę głoski odmiennéy.

Przyczyny téy reguły nietrzeba indziéy szukać, tylko w samymże sposobie różniczkowania (10). Ponieważ tu rzecz idzie o znalezienie ilości różniczkowaney, iawna jest, że należy użyć działań przeciwnych tym, które przepisały się

F 3

się

się do różniczkowania. To założy-
wszy, przystąpmy do przystosowa-
nia daney reguły.

$$\int 2x dx \text{ albo } \int 2x^1 dx = \frac{2x^{1+1} dx}{(1+1) dx} = x^2;$$

$$\int x dx = \frac{x^2 dx}{2 dx} = \frac{x^2}{2}. \text{ Jakóż, } d(x^2) = 2x dx;$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2x dx}{2} = x dx.$$

$$\text{Podobnież } \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1) dx} =$$

$$\frac{ax^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}}. \text{ Podobnież, } \int \frac{adx}{x^3}, \text{ albo } -$$

$$\int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-3+1} dx}{(-3+1) dx} = \frac{ax^{-2}}{-2} = -\frac{a}{2x^2}.$$

W powszechności, kiedy ilość ma wy-
kładnika m , czyto twierdzącego czy prze-
czącego, całego czy ułamkowego, to za-

$$\text{zawsze będzie } \int ax^m dx = \frac{ax^{m+1} dx}{(m+1) dx} =$$

Nie ma wprowadzić przyczyny potrze-
bować téj reguły, do wynalezienia całki
różniczki dx albo adx ; bo iawna jest, że
pierwszey byłaby całka x , a drugiey ax ; ato-
li gdybyśmy i tu chcieli przystosować re-
gułę daną, to trzeba by uważać, że w ta-
kowych różniczkach wykładnikiem głoski
 x jest zero, tak iż jedno znaczą, co $x^0 dx$
i $ax^0 dx$, którym podług reguły odpowiada-

ly.

byby te całki, $\frac{x^{0+1} dx}{(0+1) dx}$ i $\frac{ax^{0+1} dx}{(0+1) dx}$, albo x ,
i ax .

Nie ma tylko ieden przypadek który
wyłącza się od reguły fundamentalney, to
jest, kiedyby wartością wykładnika m by-
ło -1 ; bo w takim razie, całka wychodzi-
łaby na $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$ albo na $\frac{ax^0}{0}$ albo na $\frac{a}{0}$, to
jest, na ilość niezmierną, która niemoże być
naznaczona. Jakóż, przypuściwszy za miano-
wnika zamiast zera, ilość niezmiernie małą,
iawna jest, że takowy mianownik musi za-
wierać się niezmierną liczbę razy w ilości
pomiernéy a , a zatem ułamek wyrażałby ilość
niezmierną. Pokażemy to na inżem miéy-
fcu, dla czego tu z rachunku wypada ilość
niezmierna; tym czasem zaś tylkoważmy,

że różniczka zadana $ax^m dx$, wychodząca w
takim razie na $ax^{-1} dx$ albo na $\frac{adx}{x}$, jest ró-
żniczką Logarytmową; to jest różniczką ilo-
ści ax , albo lx^a , iako, (zróżniczkowawszy ją),
łatwo o tém przekonać się można (27).

Gdyby różniczka jednoślowna miała
znak pierwiastkowy, to zamiast takowego
trzeba by użyć wykładnika ułamkowego. I
tak ażeby scałkować $adx \sqrt{x^2}$, piszę $adx \cdot x^{\frac{2}{2}}$,
albo $ax^{\frac{2}{2}} dx$, a z resztą postępuję sobie iak
wyżéy.

6r. Widzieliśmy wyżéy (8) Prze-
że kiedy w ilościach które mają słoga,
bydź różniczkowane, znajduią się

F 4

ia-

jakie wyrazy całe stateczne, to takowe wyrazy wyrzucają się z różniczek. Więc powracając nazad do całki, trzeba pamiętać przydać do niej na ostatek ilość stateczną, która może mieć taką wartość jak się spodoba, póki nieidzie więcej o nic, tylko o wynalezienie całki, to jest o wynalezienie takiej ilości, z której różniczkowaney wypadłaby różniczka zadana. Jakóż ilości

$$\frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C, \text{ (oznaczmywszy}$$

przez C tę stateczną iakąkolwiek), za różniczkę, obie ilości zarówno mieć będą $ax^m dx$, C niechby miało wartość iaką chce. Ale kiedy całkowanie odbywa się dla rozwiązania iakiego zagadnienia danego, to natenczas, takowa stateczna ma pewną wartość, wynikającą z warunków zagadnienia: zobaczymy to w dalším przeciagu, ale już odtąd zawsze ją będziemy przydawać każdemu scalkowaniu, ażeby się zaś na niej niemylić, nigdy iey nie oznaczmy inaczej, tylko przez C .

0

O Różniczkach wielostownych, których całkowanie przypada do Reguły Fundamentalney.

62. ^{1^o} Można także scalkować poług reguły poprzedzającej wszelką ilość, w którą niewchodził iaki stopień ilości wielostowney, albo dzielnik wielostowny, albo chociażby wchodził dzielnik wielostowny, ale był ilością stateczną.

I tak mając scalkować $ax^3 dx + \frac{bx^2 dx}{c}$ $+ edx$, scalkowałbym osobna każdy wyraz, i miałbym $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C$. Podobnież całka ilości $ax^3 dx + \frac{bdx}{x^4}$ albo ilości $ax^3 dx + bx^{-4} dx$, byłaby $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^{-3}}{-3} + C$, albo $\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + C$.

63. ^{2^{re}} A gdyby nawet wchodziły i stopnie iakie ilościów wielostownych, to ieszcze możnaby całkować przez regułę fundamentalną, byleby takowe pominione ilości nieznaydowały się w mianowniku, a oraz ażeby ich wykładnik był liczbą całą twierdzącą.

Np.

Np. $(a + bx^2)^3 \times dx$, może być całkowane przez regułę poprzedzającą, podniósłszy $a + bx^2$ do trzeciego stopnia; skąd podług (Alg. 126) wypadłoby $a^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 + b^3x^6$; a zatem $(a + bx^2)^3 dx = a^3 dx + 3a^2bx^2 dx + 3ab^2x^4 dx + b^3x^6 dx$; które to ilości całka biorąc każdy wyraz z osobna, byłaby $a^3x + \frac{3a^2bx^3}{3} + \frac{3ab^2x^5}{5} + \frac{b^3x^7}{7} + C$.

64. Ponieważ niema żadnej ilości wielostopnów podniesionych do jakiego stopnia, a mając za wykładnika liczbę całą przeczącą, którejby niemożna było podług reguły podanej w Algebrze (126) rozłożyć w rząd pewny ilościów jedno-stopnów, przeto zawsze będzie można całkować wszelką ilość wielostopną, która niezawierałaby w sobie innych części wielostopnych, iak tylko stopnie oznaczone wykładnikami, złożonemi z liczb całych i twierdzących.

I tak, gdybym miał do całkowania ilość $gx^3 dx (a + bx^2)^2 + a^2x^7 dx (c + ex^2 + fx^3)^4$, rozłożyłbym sobie w rząd (podług reguły wzyż wiankowaney) wartość ilości $(a + bx^2)^2$, a potem każdy wypadły wyraz, rozmnożyłbym przez $gx^3 dx$; podobnież, rozłożyłbym wartość ilości $(c + ex^2 + fx^3)^4$, a każdy wypadły wyraz, rozmnożyłbym przez $a^2x^7 dx$; co zrobiwszy, niezostanie mi, tyl-

tylko całkować zwyczajnie rząd ilościów jedno-stopnów, podług reguły fundamentalney.

65. Trzeba tu wyłączyć tylko ieden przypadek, to jest, kiedyby który z wykładników wypadł przecząc; w takim razie, po rozłożeniu ilości w rząd i po rozmnożeniu, na wykładnik głośki odmienney mogłoby wypaść w jakim wyrazie — 1; ale natenczas takowy wyraz, całkuje się przez Logarytmy.

Np. mając ilość $\frac{adx}{x^3} (a + bx)^2$ albo

$ax^{-3} dx (a + bx)^2$; odmiénilbym ją na $ax^{-3} dx (a^2 + 2abx + b^2x^2)$, co wychodzi na $a^3x^{-3} dx + 2a^2bx^{-2} dx + ab^2x dx$; z których dwa wyrazy $a^3x^{-3} dx + ab^2x dx$, mają na swoje całki $-\frac{a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2}$; lecz wyraz $2a^2bx^{-2} dx$ albo $2a^2b \frac{dx}{x}$, jest podług (27) różniczką Logarytmową ilości $2a^2bx$; więc całka razem wzięta, uczyni $-\frac{a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2} + 2a^2bx + C$.

66. 3cie Chociażby różniczka zadana zawierała w sobie ilość wielostopną, wyniesioną do stopnia iakiegokolwiek, (oznaczonego wykładnikiem czyto całym czy ułamkowym, twierdzącym albo przeczącym), to ielżce będzie można całkować.

kówać ilość zadana, byleby summa ilościów mnożących tę ilość wieloflowną, była różniczką téżże ilości wieloflownej, uważonéy bez swego wykładnika całkowitego, albo byleby była pomiénioną różniczką, rozmnożoną albo rozdzieloną przez liczbę stateczną.

Np. $gdx(a+bx)^p$ należy do tego przypadku; bo gdx jest różniczką ilości $a+bx$, rozmnożoną przez $\frac{g}{b}$, to jest, przez ilość stateczną; a tak mając scałkować pomiénioną

$$\text{ilość, piżę } \int gdx(a+bx)^p = \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)d(a+bx)}$$

$$\text{W.D. } + C = \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)bdx} + C = \frac{g(a+bx)^{p+1}}{(p+1)b}$$

+ C. Jakóż, zróżniczkowawszy na odwrót tę nową ilość, mielibyśmy iak pierwéy

$$gdx(a+bx)^p. \quad \text{Podobnie, mając różniczkę } \frac{a^2dx+2axdx}{\sqrt{(ax+xx)}}$$

albo $(a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, wnoszę sobie, że może być scałkowana, bo $a^2dx+2axdx$ jest różniczką ilości $ax+xx$, rozmnożoną przez ilość stateczną a . Używszy tedy reguły poprzedzającej, będzie $\int (a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}} =$

$$\frac{a^2dx+2axdx}{\frac{1}{2}ax+2xax} + C = 2a(ax+xx)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Jedynie tylko stąd wyłaczyć trze-

MATEMATYKI.

trzeba przypadek, kiedyby wykładnikiem ilości wieloflownej było -1 , natenczas całkuje się przez Logarytmy, iak zobaczymy niżej,

O Różniczkach dwufLOWNYCH mogących całkować się Algebraicznie.

67. Przez różniczkę dwufLOWNĄ, rozumiemy takie wyrażenie, w którym ilość najbardziej pośladowana, jest iakimkolwiek bądź stopniem ilości dwufLOWNEJ.

I tak $gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}$, jest różniczką dwufLOWNĄ. Podobnie $gx^m dx(a+bx^n)^p$; co może wyrażać w powszechności wszelką różniczkę dwufLOWNĄ, bo przez g, a, b, m, n, p , mogą rozumieć się wszelkie iakie tylko mogą być liczby, bądźto twierdzące bądź przeczące.

Niemamy sposobu scałkowania powszechnie wszelkiey ilości dwufLOWNEJ. Ale stąd co poprzedziło iawną jest, że różniczką dwufLOWNĄ $gx^m dx(a+bx^n)^p$, może być scałkowana w dwóch przypadkach następujących. 1^o Kiedy p jest liczbą całą twierdzącą iakąkolwiek, wykładniki m i n niechby były iakie chcą (63), wyiawszy przypadek wymiéniony pod l. (65). 2^{re} Kiedy wykładnik m gloski x , położonéy zewnątrz ilości

ści dwuflowney, jest mnieyszy o iedną iedność iak wykładnik n téżę głoski x zamkniętę w ilości dwuflowney; to jest, że w powszechności można scałkować wszelką ilość taką, iak $gx^{n-1}dx$ ($a \pm bx^n$)^p, wykładniki n i p niechay będą iakie chcą, wyiawszy tylko przypadek kiedyby było $p = -1$. Iakóż $gx^{n-1}dx$, jest różniczką ilości $a \pm bx^n$, rozmnożoną przez $\frac{g}{nb}$, to jest przez ilość stateczną; a zatem przypadek należy do owego, o którym było wyżey (66); więc tę i téy podobną ilość, można scałkować podług reguły fundamentalney, poczynawszy $a \pm bx^n$ iakoby za iedną ilość.

Oprócz tego, są ieszcze dwa inne przypadki, które mogą bydź zawarte w iednym, ściągające się także do przypadku poprzedzającego. Zobaczmy na czym zależą.

68. 10d Można scałkować wszelką różniczkę dwuflowną, w której wykładnik głoski położonę zewnątrz ilości dwuflowney, będąc pomnożony o iedną iedność, może bydź doskonale rozdzielony przez wy-

wykładnika ilości x zawartę w ilości dwuflowney, i na wieloraz daie liczbę całą twierdzącą. Sposób, iak sobie w takim razie postąpić trzeba, bądźto w całkowaniu bądźto w okazaniu powszechności téy prawdy, na tém zależy, ażeby ilość dwuflowną wziętą bez iey wykładnika, zrównać tylko z iedną odmienną, i różniczkę żadaną wyrazić tylko w téy iednuy odmiennuy i w ilościach statecznych; co zawsze łatwo uczynić można, działając iak w przykładach następujących.

Obierzmy sobie naprzód do scałkowania ilość $gx^3dx(a \pm bx^2)^{\frac{4}{3}}$. Uważam że ta różniczka może bydź scałkowana; bo wykładnik głoski x położonę zewnątrz ilości dwuflowney, to jest 3, pomnożony o iedną iedność czyni 4, które rozdzielone przez wykładnika 2 głoski x , zawartę w ilości dwuflowney, daie mi na wieloraz 2, liczbę całą twierdzącą. Robię tedy $a \pm bx^2 = z$, i wyciągam z tego zrównania $x^2 = \frac{z-a}{b}$.

Potem uważam, że wyraz x^3dx poprzedzający ilość dwuflowną, pochodzi (wyiawszy mnożnika statecznego), z różniczkowania ilości x^4 , która jest kwadratem ilości x^2 ; podnoszę tedy do kwadra-

tu zrównanie $x^2 = \frac{z-a}{b}$, i mam $x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$, więc zróżniczkowawszy, mieć bę-

dać $4x^3 dx = 2 \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right) \cdot \frac{dz}{b}$, a zatem $x^3 dx =$

$$\left(\frac{z-a}{b}\right) \frac{dz}{2b} = \frac{(z-a) dz}{2b^2}.$$

Położywszy zamiast $x^3 dx$ i zamiast $(a+bx^2)$ onych wartości wyrażone w z , w ilości $gx^3 dx (a+bx^2)^{\frac{4}{3}}$ mieć będą

$$\frac{g \cdot (z-a) dz}{2b^2} + \frac{z^{\frac{4}{3}}}{2b^2}, \text{ albo } \frac{gz^{\frac{4}{3}+1} dz}{2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{3}} dz}{2b^2}.$$

$$\text{Więc } \int gx^3 dx (a+bx^2)^{\frac{4}{3}} = \int \frac{gz^{\frac{4}{3}+1} dz}{2b^2} - \int \frac{gaz^{\frac{4}{3}} dz}{2b^2} =$$

$$\frac{gz^{\frac{4}{3}+2}}{(\frac{4}{3}+2)2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{3}+1}}{(\frac{4}{3}+1)2b^2} + C, \text{ albo (z przy-}$$

czyny że $\frac{gz^{\frac{4}{3}+1}}{2b^2}$ jest spólnym mnożnikiem)

$$\text{będzie } = \frac{gz^{\frac{4}{3}+1}}{2b^2} \left[\frac{z}{\frac{4}{3}+2} - \frac{a}{\frac{4}{3}+1} \right] + C =$$

$$\frac{gz^{\frac{4}{3}+1}}{2b^2} \left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a \right) + C; \text{ w którymto}$$

wyrażeniu, położywszy nazad zamiast z wartość onego $a+bx^2$, wypadnie nakoniec u

$$\text{całkę daney ilości, } \frac{g}{2b^2} \cdot (a+bx^2)^{\frac{4}{3}+1} \left[\frac{5}{14}(a+bx^2) - \frac{5}{9}a \right] + C.$$

69. Podobnymże sposobem postąpić sobie będzie potrzeba w wszelkim innym przypadku, podpadającym pod też same warunki.

ki. Weźmy np. ilość, $gx^3 dx (a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, która powinna dać się całkować, bo wykładnik 3 pomnożony o jedną jedność, dać

dać rozdzielony przez wykładnika 3 głoski x położony w ilości dwuślownej, daie na wieloraz liczbę całą twierdzącą. Robię te-

dy $a+bx^3 = z$, i mam $x^3 = \frac{z-a}{b}$; a że wy-

raz $x^3 dx$ poprzedzający ilość dwuślowną (wyjąwszy mnożnika stałego), pochodzi z odbytego różniczkowania ilości x^3 ; więc żeby mieć x^3 , podnożę do sześcienu zró-

wnanie $x^3 = \frac{z-a}{b}$, co mi da $x^9 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^3$;

a zróżniczkowawszy, będzie $9x^8 dx =$

$$3 \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \frac{dz}{b}; \text{ a zatem } x^3 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \frac{dz}{3b}.$$

Różniczka tedy $gx^3 dx (a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, odmię-

nia się na $g \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \cdot \frac{dz}{3b} \cdot z^{-\frac{2}{3}}$, albo (odby-

wszy wskazane działania, to jest podniósłszy $\frac{z-a}{b}$ do kwadratu, i rozmnożywszy przez

$$z^{-\frac{2}{3}}, \text{ będzie } \frac{gz^{2-\frac{2}{3}} dz}{3b^3} - \frac{2gaz^{1-\frac{2}{3}} dz}{3b^3} + \frac{ga^2 z^{-\frac{2}{3}} dz}{3b^3};$$

ilość różniczkowa, której cał-

$$\text{ką jest } \frac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3(3-\frac{2}{3})} - \frac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3(2-\frac{2}{3})} + \frac{ga^2 z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3(1-\frac{2}{3})} + C,$$

$$\text{co z przyczyny spólnego mnożnika } \frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}}, \text{ wychodzi na } \frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}} \left(\frac{z^2}{3-\frac{2}{3}} - \frac{2az}{2-\frac{2}{3}} + \frac{a^2}{1-\frac{2}{3}} \right) + C,$$

$$\text{albo } \frac{g}{3b^3} z^{1-\frac{2}{3}} \left(\frac{3z^2}{7} - \frac{6az}{4} + 3a \right) + C, \text{ albo naostatek, położy-}$$

wfzy nazad zamiast z wartość onego $a + bx^3$ całką daney ilości będzie, $\frac{g}{3b^3} (a + bx^3)^4 - \frac{6a}{4} (a + bx^3)^3 + 3a^2] + C$.

I ten jest sposób całkowania, którego używać trzeba, ile razy wykładnik głośki x położonéy zewnątrz ilości dwuflownéy, będąc pomnożony o jedną jedność i rozdzielony przez wykładnika głośki x zawartéy w ilości dwuflownéy, daie nam na wieloraz liczbę całą twierdzącą.

70. 2^{re} A chociażby ilość różniczkowa dwuflowna, nieznaydowała się w tym przypadku o którym dopiero mówiło się, atoli zdarza, się bardzo często że ją można do tego naprowadzić, przy pomocy przekształcenia bardzo prostego, zależącego na tém, ażeby wykładnika głośki x zawartéy w ilości dwuflownéy, uczynić przeczącym kiedy jest twierdzący, albo twierdzącym kiedy będzie przeczący. Co żeby wykonać, trzeba rozdzielić dwa wyrazy tęy ilości dwuflownéy przez stopień głośki x położonéy wewnątrz nawiasów, a zewnątrz, trzeba rozmnożyć przez ténże stopień, wyniesiony do stopnia oznaczonego przez wykładnika całej ilości dwuflownéy.

Np.

Np. Zeby uczynić przeczącym wykładnika 2, głośki x położonéy w ilości dwuflownéy $gx^4dx (a + bx^2)^5$; dzielę $a + bx^2$ przez x^2 , co mi daie $gx^4dx (\frac{a}{x^2} + b)^5$, albo $gx^4dx (ax^{-2} + b)^5$; ale że ilość x^2 przez którą rozdzieliliśmy, rozumié się bydz podniesiona do piątego stopnia, będąc nakryta wykładnikiem należącym do całej ilości dwuflownéy, więc żeby się nadgrodziło iedno drugiem, trzeba rozmnożyć zewnątrz przez $(x^2)^5$, to jest podług (Alg. 96) przez x^{10} ; tak że zadana ilość przemieni się na $gx^{14}dx (ax^{-2} + b)^5$. Używszy takowego przekształcenia, da się widzieć, że wiele różniczek dwuflownych nieznaydujących się iawnie w przypadku poprzedzającym, dadzą się do niego naprowadzić.

Np. Gdyby mi zadana była do całkowania ilość $\frac{aadx}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}}$ albo $aadx (aa + xx)^{-\frac{3}{2}}$;

widzę że wykładnik głośki x położonéy zewnątrz, który jest 0, będąc pomnożony o 1, niemoże bydz spełna rozdzielony przez wykładnika 2, głośki x położonéy wewnątrz; ale nienależy mi stąd wnosić, że ilość dana niemoże bydz całkowaną: albowiem zrobiwszy stopień x przeczącym w ilości dwuflownéy, i napisawszy $aa (x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$ $(aa^{-2} + 1)^{-\frac{3}{2}}$, co wychodzi na $aax^{-3}dx$ $(aax^{-2} + 1)^{-\frac{3}{2}}$, widzę, że natenczas — 3 pomnożone o 1, to jest — 3 + 1 albo — 2, będąc rozdzielone przez wykładnika — 2, głośki x zawartéy między nawiasami, daie mi na wieloraz liczbę całą twierdzącą. A zatem

G 2

tém

tém, zrobiwszy $aa^{-2} + 1 = z$, wyciągam z tego równania $x^2 = \frac{z-1}{aa}$; a że $x^{-3}dx$ (wyciągnąwszy mnożnika statecznego) jest różniczką ilości x^{-2} , więc różniczkuję i mam, $-\frac{2x^{-3}dx}{aa} = -\frac{dz}{aa}$; skąd wyciągam $x^{-3}dx = -\frac{dz}{2aa}$. Różniczka tedy wzwyż położona $aa x^{-3}dx$ ($aa x^{-2} - 1$) $^{-\frac{1}{2}}$, odmięnia się na $-\frac{aadz}{2aa} \cdot z^{-\frac{1}{2}}$, albo na $-\frac{z^{-\frac{1}{2}}dz}{2}$, który całką będzie $-\frac{2 \cdot (1 - \frac{1}{2})}{2} + C$, albo $z^{-\frac{1}{2}} + C$, albo (położywszy zamiast z wartość onego) $(aa x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}} + C$, albo nastatek $\frac{1}{\sqrt{(aa x^{-2} + 1)}} + C$, co wychodzi na $\frac{x}{\sqrt{(aa + xx)}} + C$. A zatem sposób całkowania w tym razie, jest także sam co poprzedzający.

71. W tém co poprzedziło, rozumieliśmy x tylko w jednym wyrazie ilości dwuślownej podniesione do jakiegokolwiek stopnia, co gdyby się zdarzyło w obu wyrazach, możnaby ilość naprowadzić do pierwszego stanu, rozdzieliwszy tę ilość dwuślowną przez stopień jednego z dwóch wyrazów, a zewnątrz

wewnątrz rozmnożywszy ją przez tenże stopień, wyniesiony do stopnia oznaczonego przez wykładnika całej ilości dwuślownej; a to z téż samą przyczyną, która położyła się wyżej (70), mówiąc o przemianie wykładnika twierdzącego na przeczący.

I tak gdyby było zadano scałkować ilość $\frac{aa dx}{x \sqrt{(ax + xx)}}$, albo $aa x^{-1} dx (ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, przemienilibym ją na tę, $aa x^{-1} (x)^{-\frac{1}{2}} dx \cdot (a + x)^{-\frac{1}{2}}$, rozdzieliwszy ilość dwuślowną przez x , a zewnątrz rozmnożywszy przez toż x wyniesione do stopnia $-\frac{1}{2}$, to jest do stopnia okrywającego całą ilość dwuślowną; co wychodzi na $aa x^{-\frac{3}{2}} dx (a + x)^{-\frac{1}{2}}$. Stosując do téj ilości regułę służącą pierwszemu przypadkowi (68), zdawałaby się ta ilość być nieprzyimująca całkowania; lecz zrobiwszy przeczącym wykładnika główni x , zawartę między nawiasami, będzie $aa x^{-\frac{3}{2}} (x)^{-\frac{1}{2}} dx (ax^{-1} + 1)^{-\frac{1}{2}}$, albo $aa x^{-2} dx (ax^{-1} + 1)^{-\frac{1}{2}}$, co podług (68) może być scałkowane. Zrobiwszy tedy $ax^{-1} + 1 = z$, będzie $x^{-1} = \frac{z-1}{a}$; po zróżniczkowaniu zaś będzie, $-x^{-2} dx = \frac{dz}{a}$, albo $x^{-2} dx = -\frac{dz}{a}$; więc $aa x^{-2} dx (ax^{-1} + 1)^{-\frac{1}{2}}$, odmięnia się na $-adz, z^{-\frac{1}{2}}$, albo na $-az^{-\frac{1}{2}} dz$; który całką

ką jest $\frac{-ax^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$, albo $-2ax^{\frac{1}{2}} + C$, albo
 (położywszy zamiast x onego wartość)
 $-2a(ax^{-1} + 1)^{\frac{1}{2}} + C$, albo naostatek,
 $-2a\sqrt{\left(\frac{a}{x} + 1\right)} + C$.

Uważywszy tedy zadaną różniczkę dwuślowną, stosownie do dwóch przypadków dopiero opisaných, jeżeli pokaże się, że do żadnego z nich nieprzypada, to natenczas daremnie byłoby spodziewać się całki Algebraicznej. Co się zaś dotyczy różniczek trójsłownych, czwórślownych i. t. d. to jest w których ilość wielośłowna zawiera w sobie trzy, cztery i. t. d. wyrazów, takowe mogą także być całkowane w przypadkach wyżej wymienionych (62 i dalej). Zdarzają się także jeszcze oprócz tego inne przypadki podpadające całkowaniu Algebraicznemu, ale te są rzadkie i w małej liczbie, dla tego w tém miejscu bawić się nad niemi niebędziemy; ale niżej podamy sposób iakby rozpoznać te co mogą być całkowane, i te których całka może być doprowadzona do iakiéy zadanéy znamény całki.

Przy.

Przystósowanie Reguł poprzedzających do kwadratury figur krzywych.

72. **Z**eby znaleźć płaszczyznę, czyli (co na jedno wychodzi) kwadraturę figur krzywych, wystawiać sobie zwykliśmy te figury iakoby wielokąty, złożone z niezmiernéy liczby boków; w których z kónców M i m każdego boku (fig. 12) uważają prostopadłe MP , mp spuszczone na oś odcinków, przez co rozkłada się płaszczyzna, na niezmierną liczbę nierównoległoboków niezmiernie małych. Natenczas, każdy nierównoległobok taki iak $PpmM$, można poczytać za różniczkę rozległości pomiernéy (APM); bo w rzeczy saméy $PpmM = Apm - APM = (ARN)$. Nieidzie tedy, tylko o wyrażenie Algebraiczne małego nierównoległoboku $PpmM$, żeby potem całkować to wyrażenie przy pomocy reguł poprzedzających.

Lecz poczytając $PpmM$ za różniczkę płaszczyzny; trzeba uważać że takowa, niemniéy jest różniczką płaszczyzny wziętęy od

G4

po-

początku A odcinków, iako jest różniczką każdéy innéy rozległości $KPML$ wziętéy od punktu stałego i pewnego K ; albowiem zarówno wypada $PpmM = KpmL - KPML = d(KPML)$. Więc w całkowaniu, ilość bezśrzednie z rachunku wypadająca, niema przyczyny raczéy przypilować rozległości APM , iak wszelkiéy innéy rozległości $KPML$, różniacéy się od piérwśzéy pewną iaką stateczną rozległością KAL . A zatém do całki wynalezionéy przez rachunek, trzeba dodać stateczną, któraby wyrażała to, o co rozległość szukana różni się od rozległości z rachunku bezśrzednie wypadającey. W przykładach następujących, zobaczmy iak wynayduie się takowa stateczna; teraz zaś poszukaymy naprzód wyrażenia rozległości $PpmM$.

Oznaczmy sobie AP przez x ; PM przez y ; a tak mieć będziemy $Pp = dx$; $pm = y + dy$. Płasczyną nierównoległoboku $PpmM$ podług (Jeom. 142) jest $\frac{PM + pm}{2} \times Pp = \frac{2y + dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dydx}{2}$. Lecz chcąc wy-

ra-

razić że Mm jest niezmiérnie małe, trzeba odrzucić wyraz $\frac{dydx}{2}$ iako niezmiénie mały względém ydx ; więc na powszechné wyrażenie różniczki czyli *składki* (element) płasczyny wszelkiéy figury krzywéy, mieć będziemy ydx .

Zeby przystósować tę formułę do iakiey płasczyny zadanéy, któraby była wyrażona w zrównaniu, trzeba z tego zrównania wyciągnąć wartość głoski y i położyć ją w formule ydx ; skąd wypadnie cała ilość wyrażona w x i dx ; która kiedy będzie mogła bydź scałkowana przez reguły poprzedzające, da wyrażenie płasczyny takowéy figury krzywéy, nważonéy od któregokolwiek punktu iaki się spodoba, byleby nieprzepomnieć do wynalezionéy całki przydać stateczną; któręy wartość znajdzie się, wyraziwszy od którego punktu uważa się płasczyna; zobaczmy zaraz, iak się to robi.

Obiérzmy sobie za przykład parabolę pospolitą, do któręy należy zrównanie $yy = px$. Mićc będziemy $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, więc ydx przemieni się na $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$; ilość, któręy całką będzie (60) $\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}dx}$, albo $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; takie tedy będzie wyrażenie płasczyny parabolicznęy; tak iż mając wiadomy odcinek x i palirzedną p , można mieć wartość rozległości APM , lub téż $KPML$ poczynając

cęy

cę się od pewnego punktu K , gdyby tylko stateczna C była wiadoma, to jest gdyby całka wyrażała od którego punktu rachuje się płaszczyzna w niniejszym przypadku.

Daymy więc, że rozległości mają się rachować od punktu A ; to podług tego przypuszczenia, będzie $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; gdzie chcąc wiedzieć co ma być warto C żeby zrównanie miało miejsce, trzeba uważać, że kiedy x staie się zerem, to rozległość APM przemienia się także w zero, a w takim razie zrównanie wychodzi na $0 = 0 + C$; więc $C = 0$; więc kiedy całka ma wyrażać rozległości poczynające się od punktu A , to stateczna C powinna być zerem; to jest że w takim razie już nie trzeba dodawać statecznej, ale rozległość APM prosto wyrażona będzie przez $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Lecz mając uważać rozległości od punktu K , takiego ażeby było $AK = b$ (gdzie b rozumie się być ilością wiadomą); to natenczas będzie $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; a że rozległości $KPML$ wychodzą na zero w ten czas, kiedy AP albo x staie się $= b$; więc w takim razie będzie $0 = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$; więc $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$; a zatem będzie $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$. Skąd iawna jest, do czego służy stateczna przydawająca się całkowanemu, i iako wartość ię zależy od samej treści zagadnienia.

Uważmy tu, że $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$; lecz $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; więc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ albo $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$; a że $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ wyraża, rozległość APM , więc

więc też rozległość może być także wyrażona przez $\frac{2}{3}xy$, to jest przez $\frac{2}{3}AP \times PM$, albo przez $\frac{2}{3}$ prostokątu $APMO$; linia AP niech będzie iaka chce.

Podobnież $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b$; lecz kiedy $x = AK = b$, to zrównanie $yy = px$, przemienia się na $yy = pb$; a zatem $y = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; to jest że $KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; więc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ albo $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3}KL \times AK$; a że rozległość $KPML$, wyraża się przez $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, więc może być także wyrażona przez $\frac{2}{3}AP \times PM - \frac{2}{3}AK \times KL$, to jest przez $\frac{2}{3}APMO - \frac{2}{3}AKLI$.

Spomiedzy czterech Przecinków Stożkowych, tylko sama Parabola może być skwadrowana.

Obierzmy sobie na drugi przykład Parabole w powszechności wszelakiego rodzaju, do których (30) należy to zrównanie, $y^m + n = a^m x^n$. Miec będiem $y =$

$$\sqrt[m+n]{a^m x^n} = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}; \text{ więc będzie}$$

$$ydx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx; \text{ ilość, który cał-}$$

$$\text{kę jest } \frac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n} + 1}}{\frac{n}{m+n} + 1} + C; \text{ co wycho-}$$

$$\text{dzi na } \frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n} + 1} + C, \text{ al-}$$

$$\text{bo na } \frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} \times x + C, \text{ albo}$$

$$\text{naostatek (z przyczyny że } y =$$

$a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$), wychodzi na $\frac{m+n}{m+2n} xy$

† C. A zatem kiedy rozległości APM rachują się od początku A odcinków x (fig. 13), to trzeba ażeby całka była zerem kiedy APM jest zerem, a następnie kiedy x jest zerem, i natenczas stateczna jest także zerem, tak że pominiona ilość wychodzi pro-

sto na $\frac{m+n}{m+2n} xy$; to jest że rozległość APM

jest zawsze pewną częścią mnogości xy , czyli prostokątu $APMO$; jest mówię częścią

wyrażoną przez ułamek $\frac{m+n}{m+2n}$, którego

wartość zawisła od wartościów głosek m i n , to jest od stopnia paraboli. A zatem wszelkiego rodzaju Parabole mogą być skwadrowane.

Znaleźlibyśmy podobnie że w powłachności wszelkie Hiperbole uważone względem swoich końcotycznych, (wyjąwszy Hiperbole pospolitą), mogą być skwadrowane. Ale w tym rachunku, na wartość stateczną wypada częstokroć ilość niezmienna, przeto nie zawadzi tu zastanowić się nad tem co ona znaczy. Niechay będzie $y^m = a^m + n x^n$ zrównanie należące do figur krzywych. Miec

będziem $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{n}{m}}$; więc będzie $y dx$

$= a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx$, ilość, której całką jest

$\frac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} + C$, albo $\frac{m}{m+1} a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m+1+n}{m}}$

†

† C, skąd bez wszelkiej trudności wynduie się stateczna, jeżeli m więcej wartości n . Ale przeciwnie jeżeli m jest mniejsze iak n , to na wartość stateczną wypada ilość niezmienna, kiedy rozległości mają rachować się od początku odcinków x ; kiedy zaś mają rachować się od wszelkiego innego punktu, to pominiona ilość wypadac będzie pominiona. Daymy np. że $m=1$, a $n=2$; w takim razie zrównanie wychodzi na $y = a^3 x^{-2}$, z którego wnosi się na płaszczyznę, $-a^3 x^{-2}$

† C, albo $C - \frac{a^3}{x^2}$. Więc mając rachować

rozległości od początku A odcinków x , trzeba

ażeby $C - \frac{a^3}{x^2}$ było zerem, kiedy jest $x=0$;

to jest, że ma być $C - \frac{a^3}{0} = 0$, a zatem C

$= \frac{a^3}{0}$, co oznacza ilość niezmienną. Przeciwnie mając rachować rozległości od punktu K , takiego ażeby było $AK=b$, będzie

$C - \frac{a^3}{b^2} = 0$, skąd wyciąga się $C = \frac{a^3}{b^2}$.

Owóż mamy co znaczy taki przypadek.

Linia krzywa do której należy zrównanie $y = a^3 x^{-2}$ albo $y = \frac{a^3}{x^2}$, rościaga się

niezmiennie wzdłuż końcotycznych AZ , AT (fig. 14), ale w tem przybliża się bar-

dzię do końcotycznej AZ , aniżeli do drugiej AT , iako o tem zrównanie znać daie;

tak iż rachując rozległości od końcotycznej AT , takowe wypadają niezmienne; bo roz-

zległość zawarta między tą końcotyczną i ramieniem niezmiennym BS , jest niezmienna.

fig. 14.

A

A zatem niepodobna jest naznaczyć rozległościów $APMS$ rachujących się od kóńcocy AT . Przeciwnie rozległości zawarte między ramię BM i kóńcocy AZ aż do niezmierności, mają wartość po-
mierną; bo pominąwszy odległość dosyć nie-
wielką, ramię przybliża się znagła do swo-
ięy kóńcocy, tak iż rozległość nie-
zmiernie długa $KLM OZ$, wyraża się przez
 $\frac{a^3}{b^2}$, a $PM OZ = \frac{a^3}{x^2}$; a zatem $KLPM = \frac{a^3}{b^2} - \frac{a^3}{x^2}$. Skąd pokazuje się, że lubo niemożna

mieć rozległościów rachowanych od kóńco-
tycznych AT , ale można mieć rozległości
 $KLMP$ rachowane od punktu K , wziętego
tak blisko linii AT iak się spodoba.

Obierzmy sobie na trzeci przykład figurę
krzywą, do której należałoby to zrównanie,
 $y = \frac{aa - x^3}{aa}$, i której postać wypadłaby ta-

fig. 15. ka iak pokazuje (fig. 15), dając koléno
głosce x wartości do upodobania obrane,
a głosce a naznaczywszy pewną iakową
wartość.

Mieć tedy będzie $ydx = \frac{aa x dx - x^3 dx}{aa}$,
ilość, której całką jest (60) $\int ydx$ albo APM
 $= \frac{2aa x^2 - x^4}{4aa} + C$. Gdzie chcąc rachować

rozległości APM od punktu A początku
odcinków x , trzeba ażeby ta całka stała się
zerem, kiedy będzie $x=0$, co daie znać, że
stateczna C jest zerem; tak iż rozległość
nieokreślona APM wyraża się prosto przez
 $\frac{2aa x^2 - x^4}{4aa}$

$\frac{2aa x^2 - x^4}{4aa}$. W powszechności, kiedy wár-
tość głoski y , nie składa się tylko z samych
ilościów jednoślownych, iak w terażni-
szym przypadku, to zawsze łatwo znaleźć
można płaszczynę (60).

Obierzmy sobie ieszcze jeden przykład,
i daymy że ma być wynaleziona płaszczy-
zna, figury krzywéy, do której należałoby
to zrównanie, $a^3 y y = x^4 (a^3 - x^3)$; skąd wy-

ciąga się $y = \pm \sqrt{\frac{x^4 (a^3 - x^3)}{a^3}} = \pm \frac{x^2}{a^2 \sqrt{a}}$
 $\sqrt{(a^3 - x^3)}$; więc (niebiorąc tylko jedną z
wartościów głoski y), będzie $ydx = \frac{x^2 dx}{a^2 \sqrt{a}}$
 $\sqrt{(a^3 - x^3)} = \frac{x^2 dx}{a^2 \sqrt{a}} (a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}$; lecz ta ilość

może być scałkowana (66), bo $x^2 dx$ iest
różniczką ilości x^3 rozdzieloną przez liczbę
stateczną 3, więc podług (66) będzie $\int ydx$

$= \frac{x^2 dx \cdot (a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}}{3} + C = -\frac{2(a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{9a^2 \sqrt{a}}$
 $+ C$. Co się tycze stateczney C , téy wár-

tość łatwo wynaydzie się, byleby był wia-
domy punkt, od którego rachue się płasz-
czynna.

Można téż ieszcze wynaleść płaszczy-
znę linii krzywych, rozłożywszy ją na tróy-
kąty zamiast nierównoległoboków. Np.
możnaby znaleźć powierzchnię odcinka
 ANQ (fig. 12), uważając go złożonym, iak
koby z niezmiernéy libzby tróykątów nie-
zmiernie małych, tnkich iak AQq . Tako-

wy tróykąt byłby wyrażony przez $\frac{Aq \times Qt}{2}$,
spuściwszy prostopadłą Qt , albo (co na ie-
dno

dno wychodzi) nakryśliwszy z środka A promieniem AQ łuk niezmiernie mały Q . A natenczas oznaczywszy AQ przez t , a łuk Qt przez dx , będzie $Aq = t + dt$, a zatem będzie trójkąt $AQq = \frac{t + dt}{2} dx = \frac{tdx}{2}$

$+ \frac{dtdx}{2}$, to jest $= \frac{tdx}{2}$, odrzuciwszy wyraz $\frac{dtdx}{2}$ dla wyrażenia że dx i dt są ilościami niezmiernie małymi. Po czém niepotrzebaby więcej, tylko mieć zrównanie między ilościami x i t , żeby można zamiast t położyć wartość onego wyrażoną w x , a potem scałkować.

Puzytósowanie do sprośtowania linii krzywych.

73. Sprośtować linią krzywą, jest to wynaléśdź iéy długość, albo linią prostą któraby iéy się równała, albo równała się łukowi zadanemu téżze linii krzywéy. Zobaczmy jaką drogą przychodzi się do tego, kiedy to bydź może.

Uważając zawżé linią krzywą AM (fig. 12) iako wielokąt złożony z niezmiernéy liczby boków, mały boczek Mm można po czytać za różniczkę łuku AM ; bo $Mm = Am - AM = d(AM)$. Lecz poprowadziwszy linią Mr równoległą linii AP , będzie $Mm = \sqrt{(Mr^2 +$

$+ rm^2) = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; więc nie idzie tylko o scałkowanie ilości $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Tym końcém trzeba zróżniczkować zrównanie należące do linii krzywéy, a wyciągnąwszy z niego wartość ilości dy wyrażoną w x i dx , albo téż wartość ilości dx , wyrażoną w y i dy , takową wartość położyć w ilości $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, tak żeby składała się tylko z samych x i dx^2 , albo z samych y i dy^2 ; a naostatek wyciągnąwszy spód znaku pierwiastkowego dx^2 albo dy^2 podług (Alg. 107), niezostanie do czynienia tylko scałkować takową ilość.

Na przykład obierzmy sobie spomiedzy Parabol powszechnie wyrażonych przez $ym + n = amx^n$, tę do którejby w szczególności należało to zrównanie, $y^3 = ax^2$;

wyciągnąwszy z niego x^2 , będzie $x^2 = \frac{y^3}{a}$,

a zatem $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$; więc będzie $dx = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{a^{\frac{1}{2}}}$,

a $dx^2 = \frac{9}{4} \frac{ydy^2}{a}$; więc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 +$

$+ \frac{9ydy^2}{4a}) = dy \sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})}$ (Alg 107). Lecz

ta ilość łatwo daie się scałkować (66); bo wykładnik głośki y położonéy zewnątrz ilo-

ści dwuślownej, jest mniejszy o 1, od wykładnika téżże głośki położony między nawiasami. Więc będzie $\int dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}}$ albo

$$\int dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27} \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Co należy do statecznej C , ta znajdzie się w ten sposób. Jeżeli łuki AM chcemy rachować od punktu to jest od początku rzędnych y , to trzeba ażeby całka czyli wartość łuku AM , stała się zerem w ten czas kiedy $y=0$. Lecz kiedy jest $y=0$, całka wychodzi na $\frac{8a}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + C$, albo

$$\text{prosto na } \frac{8a}{27} + C, \text{ więc będzie } \frac{8a}{27} + C = 0,$$

a zatem $C = -\frac{8a}{27}$. Więc długość łuku iakiegokolwiek AM poczynającego się od wierzchołka A , będzie wyrażona przez $\frac{8a}{27} \times \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

Chcąc wiedzieć które są inne parabole co mogą być sprostowane, można tego dójsz w sposób następujący. Zrównanie $ym + n = a^m x^n$ należące do takowych linii, daie $y = \frac{m}{a^m + n x^{m+n}}$. Dla prostszego wy-

rażenia zrobmy $\frac{m}{m+n} = k$, a $\frac{n}{m+n} = l$, mieć

bę.

będziem $y = a^k x^l$; więc będzie $dy =$

$$la^k x^{l-1} dx, \text{ a } dy^2 = l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2;$$

$$\text{więc } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2}$$

$$= dx \sqrt{1 + l^2 a^{2k} x^{2l-2}}, \text{ ilość, która niemo-}$$

że być scałkowana tylko w ten czas, kiedy $2l-2=1$. Atoli odmieniwszy znak należący do głośki x okryty znakiem pierwiastkowym, odmieni się poprzedzająca ilość

na $x^{l-2} dx \sqrt{(x^{-2l+2} + l^2 a^{2k})}$, która może być scałkowana, jeżeli $l-1$ pomnożone o iednę iedność i rozdzielone przez $-2l+2$ da na wieloraz liczbę całą twierdzącą, to

$$\text{jest jeżeli będzie } \frac{l}{-2l+2} = t, \text{ przez } t \text{ ro-}$$

zumiejąc liczbę całą twierdzącą. Skąd wy-

$$\text{ciąga się } l = \frac{2t}{2t+1}; \text{ albo } l = \frac{n}{m+n}; \text{ więc}$$

$$\frac{n}{m+n} = \frac{2t}{2t+1}, \text{ a zatem } m = \frac{n}{2t}.$$

Skąd pokazuje się, że Parabole poddające się sprostowaniu, są te; do którychby należało takie

$$\frac{n \cdot (2t+1)}{n} = a^{2t} x^n, \text{ albo (wy-}$$

$$\text{ciągnąwszy pierwiastek stopnia } n) \quad \frac{1}{2t+1} = a^{2t} x;$$

$$y^{2t} = a^{2t} x;$$

Przystósowanie do Powierzchniów krzywych.

74. Przystaniemy tu tylko na Powierzchniach brył kołowych

H 2

tnych

tych (de revolution). Nazywają się zaś tak, bryły króre uważają się jakby powstały z ruchu linii krzywej AM (fig. 16) obracającej się wokół linii prostej AP .

Trzeba tu sobie w myśli wy-
stawić, że kiedy linia krzywa AM
obraca się około linii AP , mały bo-
czek Mm rysuje pasek albo część
stożka uciętego, który będzie skład-
ką powierzchni, i który podług (Je-
om. 222) równa się mnogości, wy-
nikającej z łuczku Mm , rozmnożo-
nego przez okrąg, mający za pro-
mień prostopadłą spuszczoną z śro-
dka łuczku Mm na linię AP , albo
(co na jedno wychodzi, z przyczyny
że Mm jest niezmiennie małe).
przez okrąg mający za promień li-
nię PM . Lecz łuczek $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; a oznaczywszy przez
 $r : c$ stófunek promienia do okręgu
koła, będzie $r : c :: y$ do okręgu, ma-
jącego za promień PM , któryto za-
tém okrąg będzie wyrażony przez
 $\frac{cy}{r}$. A zatem na składkę powierz-
chni brył kołowrotnych, wypadnie
nam to wyrażenie, $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

75. Zebyśmy to przytósowali do przy-
kładów, daymy iż ma być wynalezio-
na powierzchnia kuli. Do koła AMB
(fig. 17), należy zrównanie $yy = ax - xx$, fig. 17.
oznaczywszy AP przez x , a PM przez y .
Więc będzie $y = \sqrt{ax - xx}$, a $dy = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - xx}} dx$; więc $dy^2 = \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4(ax - xx)}$;

$$\text{więc } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{a^2 - 4ax + 4x^2}{4(ax - xx)} dx^2} = \frac{\sqrt{4ax^2 - 4ax^2 + x^2 dx^2}}{2\sqrt{ax - xx}} = \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}}.$$

Położywszy tedy w formu-
le $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ zamiast y i dy^2 onych
wartości, będzie $\frac{c \sqrt{ax - xx}}{r} \cdot \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}}$,

co wychodzi na $\frac{\frac{1}{2} a c dx}{r}$; ilość, której całką jest
 $\frac{\frac{1}{2} a c x}{r} + C$, albo tylko prosto $\frac{\frac{1}{2} a c x}{r}$, jeżeli po-
wierzchnia rachuje się od punktu A . Lecz
 $\frac{\frac{1}{2} a c x}{r}$ albo $\frac{\frac{1}{2} a c}{r} \cdot x$, wyraża powierzchnią wai-
ka, mającego za podstawę największe koło
kuli a za wysokość x , więc ten wypadek
doskonale zgadza się z owym, który nam
wypadł indziej (Jeom. 223).

76. Gdybyśmy chcieli mieć powierz-
szchnię Paraboloidy czyli bryły Paraboli-
czney, (nazywa się zaś tak bryła powstająca
z kołowrotu Paraboli AM (fig. 16) około osi fig. 16.
fwoiej); uważmy że należące do niej zrówna-
nie jest $yy = px$; więc $x = \frac{yy}{p}$, $dx = \frac{2y dy}{p}$, a
 $dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{p^2}$; więc będzie $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{4y^2 + p^2}}{p}$

$\sqrt{(dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{pp})} = dy \sqrt{(1 + \frac{4y^2}{pp})}$; ilość
dająca się całkować podług (66) i ma-
jąca za całkę $\frac{cydy}{r} (1 + \frac{4y^2}{pp})^{\frac{3}{2}} + C$, co wy-

chodzi na $\frac{ppc}{12r} (1 + \frac{4y^2}{pp})^{\frac{3}{2}} + C$. Lecz żeby
ta ilość wyrażała powierzchnią poczynającą
się od wierzchołka A , trzeba ażeby była
zerem w ten czas, kiedy $y=0$, a w takim ra-
zie przemienia się na $\frac{ppc}{12r} (1)^{\frac{3}{2}} + C$, albo na
 $\frac{ppc}{12r} + C$; więc będzie $\frac{ppc}{12r} + C = 0$, to jest
 $C = -\frac{ppc}{12r}$; więc powierzchnia paraboloi-
dy nieokreślonej $AMLA$, wyraża się przez
 $\frac{ppc}{12r} (1 + \frac{4y^2}{pp})^{\frac{3}{2}} - \frac{ppc}{12r}$.

*Przystósowanie do pomiaru bry-
łowatościów.*

77. **W** pomiarze bryłowatości
ciał, można sobie takowe
ciała uważać iakoby składające się
z zrazików niezmiernie ciénkich i
wzajemnie sobie równoległych, al-
bo téż iakoby składające się z nie-
zmiernéj liczby piramid, którychby
wierzchołki zbiegały się w ieden
punkt

punkt. Uważając ie tedy iakoby
składające się z zrazików niezmiér-
nie ciénkich i wzajemnie sobie ró-
wnoległych; różnica między dwi-
ma płaszczyznami naprzeciw sobie
położonemi, którými zamyka się
każdy zrazik, jest niezmiernie mała,
zatém w rachunku powinna być
opuszczona, chcąc to wyrazić że
zrazik jest niezmiernie ciénki. A
stąd wynika, że na wyrażenie bry-
łowatości tego zrazika, trzeba wziąć
mnogość wynikającą, z rozmnoże-
nia iednéj z dwóch przeciwnych so-
bie podstaw, przez wysokość nie-
zmiernie małą. *Np.* jeżeli uwa-
żam piramidę $SABC$ (fig. 18), iakoby
składającą się z zrazików nie-
zmiernie ciénkich, takich iak $abcdef$;
mogę wziąć za pomiar tego zra-
zika, mnogość z płaszczyzny abc albo
 def , przez grubość tegoż zrazika.

Podobnież, jeżeli uważam bryłę ko-
łowrotną, powstałą z kołowrotu linii
krzywéj AM około linii prostéj AP (fig. 16),
jeżeli ją mówię uważam, iakoby zło-
żoną z zrazików wzajemnie sobie równole-
głych i niezmiernie ciénkich, to powinienem
wziąć za pomiar każdego zrazika, mnogość
z płaszczyzny koła, mającego za promień PM ,
rozmnożonéj przez grubość Pp . To zało-
ży-

żywszy na przód, zobaczmy jak wynaydują się bryłowości wszelkich ciał. Każdy zrazik trzeba sobie poczytać za różniczkę bryły zadanej; bo w rzeczy samej zrazik $MmlL$ jest $= AmlA - AMLA = d(AMLA)$; a zatem mając wyrażenie algebraiczne tego zrazika, niezostanie więcéy do czynienia, tylko go scałkować.

Np. gdyby rzecz szła o Piramidę SA BC ; rozumiejąc że płaszczyzna ABC iéy podstawy, równa się ilości wiadomey bb , a wysokość $ST=h$; oznaczywszy przez x odległość zraziku któregokolwiek od wierzchołka, grubość tego zrazika będzie wyrażona przez dx . Co się tycze powierzchni abc , takowa znayduie się podług (Jeom. 202) przez tę proporcją, $ST^2 : St^2 :: ABC : abc$, to jest $hh : xx :: bb : abc = \frac{bbxx}{hh}$; a zatem

bryłowością tego zrazika będzie, $\frac{bbxxdx}{hh}$,

ilość, której całką jest $\frac{bbx^3}{3hh} + C$, albo tyl-

ko prosto $\frac{bbx^3}{3hh}$, jeżeli bryłowość rachue

się od wierzchołka S . Takowa ilość wyrażająca iakąkolwiek część piramidy $Sabc$,

jest też sama co $\frac{bbxx}{hh} \times \frac{x}{3}$, a ta znowu wy-

chodzi na $abc \times \frac{St}{3}$; co właśnie zgadza się

z tém, iak było okazano indziéy (Jeom. 242).

78. Co się zaś dotyczyé brył kołowrotnych, w takowych można mieć

mieć bryłowość zrazika składkowego wyrażoną w sposób powszechny. Jakóż oznaczywszy przez $r:c$ stosunek promienia do okręgu, wynaydzie się okrąg mający za promień PM (fig. 16) albo y , ułoży- fig. 16.

wszy tę proporcją, $r:c :: y:\frac{cy}{r}$; rozmnożywszy wartość $\frac{cy}{r}$ okręgu ma-

iącego za promień PM , przez $\frac{1}{2}y$, to jest przez połowę promienia, wypadnie na płaszczyznę, $\frac{cy^2}{2r}$, a tę znowu

rozmnożywszy przez grubość Pp albo dx , wypadnie na bryłowość zrazu składkowego wszelkiéy bryły kołowrotnej $\frac{cy^2dx}{2r}$. Chcąc użyć téy for-

muły w wszelkim przypadku szczerzonym, nie trzeba więcéy, tylko położyć w téy ilości, zamiast y wartość iego wyrażoną w x , a wyciągnioną z zrównania należącego do figury krzywéy AM , z której kołowrotu powstaie bryła, a potém tak przemienioną ilość scałkować.

79. Obierzmy sobie za przykład. Elipsoidę, czyli bryłę Elliptyczną, powstaiającą z kołowrotu Ellipsy wokoło swoiéy więkšzéy osi (fig. 19). Zrównanie należące do fig. 19. Elli-

Ellipsy jest $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, oznaczywszy

AP przez x , PM przez y , a oś AB i Dd przez a i b . Formuła tedy, poprzedzająca $\frac{cy^2 dx}{2r}$ odmiienia się na $\frac{cbb}{2raa} dx (ax - xx)$, al.

bo na $\frac{cbb}{2raa} (ax dx - x^2 dx)$; ilość, której cał.

ką jest $\frac{cbb}{2raa} \times (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}) + C$, albo prosto

tylko $\frac{cbb}{2raa} \times (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3})$, jeżeli rachuje się bryłowość od punktu A .

Zeby mieć całą Ellipsoide, trzeba rozumieć $x = a$, skąd wyniknie $\frac{cbb}{2raa} \times (\frac{a^3}{2} -$

$\frac{a^3}{3})$, co wychodzi na $\frac{cabb}{12r}$, ilość też sama co

$\frac{cbb}{4r} \times \frac{1}{3}a$ albo $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$; lecz $\frac{cbb}{8r}$, wyraża pł.

fzyczynę koła, mającego b albo Dd za pro-

mięń, a następnie $\frac{cbb}{8r} \times a$ wyrażałoby brył-

watość wálka, opisanego na Ellipsoidzie, więc każda bryłowość Ellipsoidy jest =

$\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$; trzeba stąd wnieść, że bryłowość

Ellipsoidy, wynosi $\frac{2}{3}$ bryłowości wálka na

nię opisanego. A że kula nie jest co inne-

go, tylko Ellipsoida mająca równe obie oś,

więc kula wynosi także $\frac{2}{3}$ wálka na nię

opisanego; co słowo w słowo zgadza się z

80. Gdybyśmy zaś chcieli mieć bryłowość rachowaną od pewnego punktu K , takiego, ażeby było $AK = e$, to natenczas

należy użyć całki powszechny $\frac{cbb}{2raa} (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3})$

+ C ; a że bryłowość ma się poczynać od punktu K , więc trzeba żeby ta całka wypadła zerem w tymże punkcie, to jest w ten czas kiedy $x = e$; lecz w takim razie cał-

ka wychodzi na $\frac{cbb}{2raa} (\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}) + C$,

więc będzie $\frac{cbb}{2raa} (\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}) + C = 0$, a za-

tém $C = -\frac{cbb}{2raa} (\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3})$; więc na bry-

łowość poczynającą się od punktu K , wy-

pada ilość $\frac{cbb}{2raa} (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}) - \frac{cbb}{2raa} (\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3})$.

Takie tedy jest wyrażenie kawałka bryły Elliptycznej, zawartego między dwiema płaszczyznami sobie równoległymi, którym oś jest prostopadła, i którego grubość czyli wysokość byłaby $= x - e$.

81. Obierzmy sobie na drugi przykład Paraboloidę (fig. 16). Zrównanie należące fig. 16.

do Paraboli jest $yy = px$; a zatem formuła $\frac{cy^2 dx}{2r}$, przemienia się na $\frac{cp x dx}{2r}$, ilość, której

całką jest $\frac{cp x^2}{4r} + C$, albo $\frac{cp x}{2r} \times \frac{x}{2} + C$, al-

bo (położywszy zamiast px wartość onego

yy), $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Jeżeli bryłowość ma

poczynać się od punktu A , to w takim ra-

zie, z przyczyny że bryła stała się zerem
kiedy $x=0$, stateczna C powinna być tak
że zerem, a zatem bryłowatość wyraża się
tylko prosto przez $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$; lecz $\frac{cyy}{2r}$ wy-

raża płaszczyznę koła, mającego za promień
 PM , czyli podstawę paraboloidy $AMLA$;
więc paraboloida jest połową mnożności,
wynikającej z rozmnożenia twojej podsta-
wy przez wysokość x ; więc jest połową
wątka téż podstawy i téż wysokości.

Kiedy zaś bryłowatość ma się rachować
od iakiegokolwiek danego punktu K ,
takiego, ażeby było $K=e$; to natenczas, z
przyczyny że bryłowatość powinna być
zerem w punkcie K , to jest gdy $x=e$, cał-
ka powszechna w takim razie powinna być

także zerem, to jest że ma być $\frac{cpx^2}{4r} + C$,
przemieniając się na $\frac{cpe^2}{4r} + C=0$; więc $C=$
 $-\frac{cpe^2}{4r}$; a zatem na bryłowatość kawałka pa-

raboloidy, zawartego między dwiema płaszczyznami równoległymi, odległymi od
wierzchołka na x i e , wypada to wyrażenie,
 $\frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpe^2}{4r}$, które może służyć do obra-
chowania lęków powstających z wypale-
nia komory w Podkopach.

fig. 20. Jest mniemanie wielu Artylerystów
zasadzające się na doświadczeniach, że w
gruncie jednorodnym, któregoby powierzchnia
 MN (fig. 20) była poziomą, ściany
lęka czyli dołu powstającego z wypalenia pod-

* Zobacz Naukę Artyl. Tom. II.
l. 394. po 3cie na kar. 177.

podfady prochowej w Podkopach, mają
krzywość paraboloidy MAN , mającej za
środek K komory, i w której
odległość KP (nazwana *naykrótszą odpo-
rową linią*) od środka do powierzchni
płaszczyzny MN , to jest do podstawy te-
góż lęka, jest połową średnicy MN té-
ż podstawy. To założywszy, zobaczmy
iaby wyrachować bryłę $NOLM$, którą
dzielność prochu ma wyrwać.

Oznaczywszy przez a linią $KP=$
 $\frac{aa}{a+e}$ PM , z własności paraboli będzie $\frac{aa}{a+e}$
 $=4e$, gdzie rozumie się $e=AK$; skąd wy-
ciąga się $e=-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; więc $x=a$
 $+e=\frac{1}{2}a(1+\sqrt{2})$, a zatem $xx-ee=$
 $a^2\sqrt{2}$; Ze zaś mamy $p=4e$, przeto będzie
 $p(xx-ee)=2a^3\sqrt{2}(-1+\sqrt{2})=2a^3(2-\sqrt{2})$;
a zatem na bryłowatość szukaną, wyrażoną

powszechnie przez $\frac{cp}{4r}(x^2-e^2)$, wypadnie

$\frac{c}{2r}a^3(2-\sqrt{2})=\frac{355}{113} \times a^3(2-1,4142135)$
 $=1,8403012a^3$, to jest z małym uchybieniem,
 $\frac{46}{25}$ sześciannu, zrobionego z *naykrótsz* od-
porowej linii. W ten rachunek niewcho-
dzi część LAO , której wkleknienie, po
wielkiej części sprawuje naciskająca dziel-
ność prochu na dno lęka.

82. Możliwość także jeszcze
wziąć sobie za przykład *Hiperbo-
loidę*; czyli bryłę powstającą z ko-
łowrotu *Hiperboli*, około iednej z
i

iéy osiow; albo też *Ellipsoide* powstałą z kołowrotu *Ellipsy* około mniejszey osi, która zowie się *Ellipsoidą spłaszczoną*, iako przeciwnie tamta co powstała z kołowrotu około więkzey osi, nazywa się *Ellipsoidą pociągłą*. A tak znalazlibyśmy że *Ellipsoida spłaszczona* wynosi $\frac{2}{3}$ wálka na niéy opisanego; to jest że oznaczywszy przez a i b więkzszą i mniejszą oś *Ellipsy*, na bryłowatość *Ellipsoidy pociągłej*, mielibyśmy $\frac{cabb}{12r}$ a na bryłowatość *El-*

poidy spłaszczoney, $\frac{caab}{12r}$; a zatem *Ellipsoida pociągła* ma się do *Ellipsoidy spłaszczoney* :: $\frac{cabb}{12r} : \frac{caab}{12r} :: b : a$, albo iak się ma mniejsza oś do więkzey osi. I natém może nam już bydź dosyć co do brył kołowrotnych. Lecz żebyśmy przyuczyli poczynających, do poradzenia sobie w szczególém stósowaniu tych sposobów, obrachujemy ieszcze ieden przykład.

83. Niechay będzie zadano, żeby wyznaléśdź bryłowatość *klina wálkowego*, powstałego z przecięcia wálka, przez płaszczyznę nachyloną ku jego podstawie, któ-

rało

rało płaszczyznę (dla prościęyszey rachuby) rozumiemy przechodzącą przez szrodek podstawy; bryłę takową *ADBE* wyraża (fig. 21). Zmyśliwszy ją sobie poprzerzy-
naną przez płaszczyzny równoległe nie-
zmiernie bliskie iedna drugiéy, i prostopa-
dłe na podstawę *AEB* (fig. 22), takowe
przerzynki będą trójkątami sobie podobné-
mi, których zatem powierścchnie czyli płaszczyzny, mieć się będą między sobą, iak kwadraty boków sobie odpowiadających. A tak oznaczywszy przez r promień *CE* podstawy, przez h wysokość *DE*, przez y podstawę *PM* trójkąta *PMN*, będzie *CED* :

$$PMN :: rr : yy; \text{ lecz } CED = \frac{rh}{2}; \text{ więc}$$

$$PMN = \frac{rhyy}{2rr} = \frac{hyy}{2r}; \text{ a zatem oznaczywszy}$$

znowu *AP* przez x , co da dx na grubość *Pp* przerzynka czyli zrazu, zawartego między dwiema płaszczyznami przyległemi, będzie, $\frac{hyydx}{2r}$ na wyrażenie tego przerzynka.

Lecz y jest rzędną koła służącego za podstawę, przeto będzie $yy = 2rx - xx$, a zatem wyrażenie zrazika czyli przecinka składkowego, przemienia się w to $\frac{hdx(2rx - xx)}{2r}$,

albo $\frac{h}{2r} \cdot (2rx dx - xx dx)$; ilość, której całką

będzie $\frac{h}{2r} \cdot (rx^2 - \frac{x^3}{3})$, iezeli bryłowatość rachuje się od punktu *A*. Więc żeby mieć całą bryłę, nie trzeba tylko rozumiéć $x = 2r$, tak że poprzedzające wyrażenie, odmiéni się na $\frac{h}{2r} \times (4r^3 - \frac{8r^3}{3})$ albo na $\frac{2}{3} hr^2$, albo na $\frac{hr^2}{3}$.

$\frac{hr}{2} \times \frac{4}{3} r$ albo na $CED \times \frac{4}{3} AC$, albo naob-
tek na $CED \times \frac{2}{3} AB$; to jest, że bryłowa-
klina walcowego, równa się dwóm trójkom
wielościannu, mającego za podstawę trójkąt
 CED , a średnicę AB za wysokość. Ten
przykład służyć może w sążniowaniu ró-
żnych części fortyfikacyi.

O całkowaniu ilościów, zawierają-
cych w sobie Wstawy i Dostawy.

84. **C**alkowanie ilościów zawie-
rających w sobie wstawy
i dostawy, zasładza się zupełnie na
fundamencie wyżey podanym (22)
do różniczkowania takowych ilo-
ściów. Widzieliśmy tam, iako
 $d(\text{wst. } z) = dz \text{ dost. } z$, i iako
 $d(\text{dost. } z) = -dz \text{ wst. } z$; więc od-
wrotnie, całką ilości $dz \text{ dost. } z$, musi
bydź $\text{wst. } z$, albo w powszechniey-
szem wyrażeniu, $\text{wst. } z \pm C$; ilość
mająca też samę różniczkę co po-
przedzająca. Podobnie całką ilo-
ści $-dz \text{ wst. } z$, będzie $\text{dost. } z \pm C$.
I w tychto przypadkach, można zam-
knąć całkowanie wszelkich innych
ilościów składających się z *wstaw*
i *dostaw*, byleby przy tém zachować
reguły powszechne, dotąd podane
względem całkowania ilościów.
Zobaczmy to w przykładach.

Gdyby było zadano $dz \text{ dost. } 3z$; napi-
sałbym tę ilość tak, $\frac{3dz \text{ dost. } 3z}{3}$, a natén-

czas całką iey będzie, $\frac{\text{wst. } 3z}{3} \pm C$. Podo-
bnież ilość $dz \text{ wst. } 3z$, napisawszy tak
 $\frac{-3dz \text{ wst. } 3z}{-3}$, znalazłbym na całkę iey,

$\frac{\text{dost. } 3z}{-3} \pm C$. W powszechności, $\int dz \text{ wst. } mz$
(gdzie m wyraża liczbę stateczną), przemie-
nia się na $\frac{\int -mdz \text{ wst. } mz}{-m}$, i wychodzi na
 $\frac{-\text{dost. } mz}{m} \pm C$.

Gdyby zadano było $(\text{wst. } z)^n dz \text{ dost. } z$,
trzebaby uważać, że ta ilość wychodzi na
 $(\text{wst. } z)^n d(\text{wst. } z)$; lecz poczytawszy $\text{wst. } z$
za prostą odmienną, można pominioną ilość
scalkować podług reguły fundamentalney;
więc takową całką będzie, $\frac{(\text{wst. } z)^{n+1}}{n+1} \pm C$.

Gdyby różniczka była taka, $(\text{wst. } mz)^n$,
 $dz \times \text{dost. } mz$, trzebaby ją napisać tak
 $\frac{(\text{wst. } mz)^n mdz \text{ dost. } mz}{m}$, co wychodzi na

$\frac{(\text{wst. } mz)^n d(\text{wst. } mz)}{m}$, której całką jest
 $\frac{(\text{wst. } mz)^{n+1}}{m(n+1)}$. Podobnież żeby mieć cał-

kę ilości $(\text{dost. } mz)^n dz \text{ wst. } mz$, trzebaby ją
Tom III. I tak

tak napisać, $\frac{(\text{dost. } mx)^n - m dx \text{ wst. } mx}{-m}$, a na

tenczas całką ię będzie, $\frac{(\text{dost. } mx)^{n+1}}{-m(n+1)} + C$.

Gdyby znowu do scałkowania było zadano, $dx \text{ wst. } px \text{ dost. } qz$; to w takim razie należy sobie przypomnieć z (Jeom. 286), że kiedy a i b są dwa kąty iakiekolwiek, to będzie $\text{wst. } (a+b) = \text{wst. } a \text{ dost. } b + \text{wst. } b \times \text{dost. } a$; $\text{wst. } (a-b) = \text{wst. } a \text{ dost. } b - \text{wst. } b \times \text{dost. } a$; skąd wnosi się, $\text{wst. } a \text{ dost. } b = \frac{1}{2} \text{ wst. } (a+b) + \frac{1}{2} \text{ wst. } (a-b)$. Podobnież, ponieważ podług (Jeom. 287), $\text{dost. } (a+b) = \text{dost. } a \text{ dost. } b - \text{wst. } a \text{ wst. } b$, a zaś $\text{dost. } (a-b) = \text{dost. } a \text{ dost. } b + \text{wst. } a \text{ wst. } b$; więc będzie, $\text{dost. } a \text{ dost. } b = \frac{1}{2} \text{ dost. } b (a+b) + \frac{1}{2} \text{ dost. } (a-b)$; a zaś, $\text{wst. } a \text{ wst. } b = \frac{1}{2} \text{ dost. } (a-b) - \frac{1}{2} \text{ dost. } (a+b)$. Natym fundamencie, $\text{wst. } px \text{ dost. } qz$, przemienia się, na $\frac{1}{2} \text{ wst. } (px+qz) + \frac{1}{2} \text{ wst. } (px-qz)$, albo na, $\frac{1}{2} \text{ wst. } (p+q)x + \frac{1}{2} \text{ wst. } (p-q)x$; a zatem ilością zadaną do scałkowania, będzie $\frac{1}{2} dx \text{ wst. } (p+q)x + \frac{1}{2} dx \text{ wst. } (p-q)x$, którą napisałszy w ten sposób, $\frac{1}{2} \frac{(p+q)dx \text{ wst. } (p+q)x}{p+q} + \frac{1}{2} \dots$

$\frac{(p-q)dx \text{ wst. } (p-q)x}{p-q}$, na całkę wypadnie

oczywiście, $\frac{1}{2} \text{ dost. } (p+q)x - \frac{1}{2} \text{ dost. } (p-q)x + C$.

Podobnymże sposobem scałkowałyby się ilość, $dx \text{ wst. } px \text{ dost. } qz \text{ wst. } rz$, i. t. d.; przemieniwszy te mnogości na wstawy i dostawy, odpowiadające summie i róż-

różnicy łuków px, qz, rz , i. t. d., a to podług tychże samych fundamentów.

Gdyby także ieszcze było zadano, $dx (\text{wst. } x)^n$ przemieniłbym tę ilość na, $dx \text{ wst. } x (\text{wst. } x)^2$; lecz $(\text{wst. } x)^2$ albo $\text{wst. } x \times \text{wst. } x$ podług fundamentu wzwyż założonego, jest $= \frac{1}{2} \text{ dost. } (x-x) = \frac{1}{2} \text{ dost. } (x+x) = \frac{1}{2} \text{ dost. } 0 = \frac{1}{2} \text{ dost. } 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ dost. } 2x$, z przyczyny że $\text{dost. } 0 = 1$; więc będzie, $\text{wst. } x (\text{wst. } x)^2 = \frac{1}{2} \text{ wst. } x - \frac{1}{2} \text{ wst. } x \times \text{dost. } 2x$. Więc $dx (\text{wst. } x)^2 = \frac{1}{2} dx \text{ wst. } x - dx \text{ wst. } x \text{ dost. } 2x$. A zatem przemieniwszy takowe wyrażenie $\text{wst. } x \text{ dost. } 2x$, tak iak uczyniło się z wyrażeniem $\text{wst. } px \text{ dost. } qz$, żądane scałkowanie da się łatwo wykonać. A stąd pokazuje się, iakby sobie trzeba postąpić, w scałkowaniu ilości $dx (\text{wst. } x)^n$, gdzie n rozumieć się bydz liczbą całą twierdzącą. Podobnież obęszdżby się należało z ilością, $dx (\text{dost. } x)^n$. A zatem na tychże samych fundamentach dopiero wyłożonych, można całkować ilości takież postaci, iak $dx (\text{wst. } px)^m (\text{dost. } qz)^n (\text{wst. } rz)^s$ i. t. d., wykładniki m, n, s , rozumiejąc bydz liczbami całymi twierdzącymi. Słowem, przy pomocy tych fundamentów, i tego co już poprzedziło wyżej o całkowaniu ilościów, można zawższe scałkować wszelkie ilości zawierające w sobie wstawy i dostawy, kiedy tylko mogą mieć całkę Algebraiczną; ieżeliby zaś w zadane różniczki wchodziły i Styczne, to takowe trzeba naprowadzić do wyrażenia różniczek wstawnych i dostawnych, uważając że $\text{Stycz. } x = \frac{\text{wst. } x}{\text{dost. } x}$.

O Obyczaju całkowania w sposób przybliżony, i niektóre użycia tego sposobu.

85. **T**o co ma nastąpić, niemożę należyć do różniczek iedno-
flownych, bo takowe zawsze łatwo
całkują się, iak widzieliśmy wyżej;
ale służyó ma do różniczek wielo-
flownych, nieumieszczonych mię-
dzy przypadkami dotąd wyliczone-
mi. Sztuka całkowania ilościów
w sposób przybliżony, zależy na tém,
ażeby ilość zadaną rozłożyć w rząd
ilościów iednoflownych, coraż w
mniejszy wartości po sobie na-
stępujących; a natenczas każdy wy-
raz całkuje się bardzo łatwo, z któ-
rych dosyć bywa wziąć pewną li-
czbę wyrazów, żeby żadaney całki
mieć wartość dostateczną. Reguła
przepisana w Algebrze (128) do
wyniesienia ilości iakiéykolwiek do
stopnia zadanego, służąca niemniéj
i do ilościów wielo-
flownych, posłu-
ży nam za sposób, takowego cał-
kowania w sposób przybliżony.
Przystąpmy do przykładów.

86. Niechay będzie zadano, żeby wy-
fig. 17. naléśdź długość łuku kołowego AM (fig. 17),
przy

przy pomocy iego wstawy odwrotnéj. Uwa-
żając łuk Mm iako niezmiérnie mały, ieże-
li poprowadzi się linia Mr równoległa li-
nii AP , i promień CM ; trójkąty podobne
sobie CPM , Mrm , dadzą $PM : CM :: Mr$
: Mm . Lecz oznaczywszy AP przez x ;
średnicę AB przez a , albo (dla prostszego
wyrażenia) przez 1; będzie $Mr = dx$; CM
 $= \frac{1}{2}$, a $PM = \sqrt{(x - xx)}$. Więc $\sqrt{(x - xx)}$
 $= \frac{\frac{1}{2} dx}{\frac{1}{2}}$; więc $Mm = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$; a

zatem $AM = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$. Ta ilość nie-
może być całkowana przez reguły po-
przedzające; dla czego przemieniam ją na
 $\int \frac{\frac{1}{2} dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 - x)}}$, a potem na $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$.

Wyraz $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ rozkładam w rząd podług
(Alg. 128); i znajduję po uczynioném zebra-
niu, $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \text{t.d.}$;
więc $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \times$
 $(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \text{t.d.}) = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx +$
 $\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} dx + \text{t.d.} = \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$
 $+ \frac{\frac{3}{16} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32} x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \text{t.d.} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{40} x^{\frac{5}{2}} +$
 $+ \frac{1}{112} x^{\frac{7}{2}} + \text{t.d.}$; ilość, do której niema po-
trzeby przydawać statecznéj; bo kiedy $x = 0$,
to i sama ilość wychodzi na zero, tak iak
bydź powinno; gdyż w takim razie łuk AM
wyrażony przez tę ilość, iest zerem.

Z przyczyny spólnego mnożnika $x^{\frac{1}{2}}$,
temu rzędowni wyrażającemu łuk AM , mo-
żna

zna jeszcze dać tę ostatnią postać, $x^{\frac{5}{12}} (1 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{112}x^3 + t. d.)$. Teraz uważmy, że wstawia odwrotna x , będąc zawsze mniejsza od średnicy 1, (wyjąwszy kiedy rzecz idzie o pół koła), uważmy mówię, że x musi być ułamkiem, a zatem że wartości wyrazów w rzędzie po sobie następujących, co raz zmniejszać się będą, a to tem bardziej, im będzie mniejsza wstawia odwrotna łuku danego. A przeto chcąc np. mieć długość łuku, którego wstawia odwrotna byłaby setną częścią średnicy, mielibyśmy $x = \frac{1}{100} = 0,01$, a zatem $x^{\frac{5}{12}} = 0,1$; na wartość tedy

$$\text{takowego łuku byłoby, } 0,1 [1 + \frac{0,01}{6} + \frac{3(0,01)^2}{40} + \frac{5}{112} \cdot (0,01)^3]; \text{ a że następujący}$$

dalej wyraz tego rzędu, wypadłby przynajmniej sto razy mniejszy od ostatniego wyrazu, do którego tenże poprzedzający rząd jest pociągnięty, bo każdy z tych wyrazów jest więcej jak sto razy mniejszy od swego poprzedzającego; więc zastanowiwszy się nad wartością wyrazu $\frac{5}{112} (0,01)^3$, i wzięwszy setną część tej wartości, można osądzić o stopniu dokładności, z jaką mielibyśmy wyrażony ten łuk, przeistając na takowych czterech pierwszych wyrazach. Lecz wyraz $\frac{5}{112} (0,01)^3$, wychodzi na $\frac{5}{112} \cdot (0,000001) = \frac{0,000005}{112} = 0,000000446$, które to liczby setną częścią jest 0,00000000446; więc każdy wyraz następnego rzędu, możemy bezpiecznie pociągnąć aż do dziesięciu dziesiątych, nieobawiając się ażeby wartość łuku stąd wynikająca, miała chybiać o jedną jedność w dziesiątej dziesiątnej. A tak mieć będziemy, $\frac{5}{112} x$

$$(0,01)^3 = 0,0000000446; \frac{1}{40} (0,01)^2 = 0,0000075000; \frac{0,01}{6} = 0,0016666666; \text{ więc}$$

cały rząd wyniesie 0,1 (1,0016742112), albo naostatek 0,100167421, przeistając tylko na dziesięciu dziesiątych; lubo jeszcze można by bezpiecznie przypisać i dziesiątą

Taka tedy jest wartość łuku, którego by wstawia była setną częścią promienia. Więc gdyby było wiadomo, wiele razy liczba stopniów tego łuku, zawiera się w 360°, rozmnożywszy tę długość przez takową liczbę razy, można by mieć w przybliżony spóśób długość całego okręgu; lecz niema my wiadomego tego stosunku. Wiemy jednakże z (Jeom. 275), że wstawia od 30° jest połową promienia, i że mając znaną wstawę jakiego łuku, można łatwo dóysdż także jego wstawy odwrotnę (Jeom. 283); a zatem można by wyrachować wstawę odwrotną od 30° i położyć ją zamiast x w rzędzie wzwyż wynalezionym; a natenczas, rozmnożywszy wypadek przez 12, to jest przez liczbę razy, jaką mieszczą się 30° w 360°, wypadłaby długość okręgu przybliżona. Ale że takowy rząd byłby niebardzo znacznie *ubywaący* (convergente), tak iż trzeba by obrachować wielką liczbę wyrazów, żeby mieć wartość okręgu iakózkolwiek przybliżoną, przeto podamy tu do tego inny spóśób, który oraz służyć będzie za drugi przykład całkowania przybliżonego.

Poprowadźmy Styczną AN (fig. 23), fig. 23. sieczną CMN i sieczną niezmiernie bliską Cmn ; z środka C promieniem CN , narysujemy łuk niezmiernie mały Nr , który można poczytać za prostopadłą na linii Cn . Mały trójkącik prostokątny Nrn , będzie

dzie podobny trójkątowi prostokątnemu CAu , bo oba oprócz kąta prostego, mają nadto spólny kąt u ; będzie tedy podobny i trójkątowi CAN , iako niezmiernie mało różniącemu się od CAu ; a zatem takowe trójkąty dadzą, $CN:CA::Nu:Nr$, skąd

wnosi się $Nr = \frac{CA \times Nu}{CN}$; lecz znowu wy-

cinkł CNr , CMm podobne sobie, daią CN

: CM albo $CA::Nr$ albo $\frac{CA \times Nu}{CN}::Mm$;

więc $Mm = \frac{CA^2 \times Nu}{CN^2}$. Oznaczmywszy AN

przez x ; promień CA przez a ; mieć będziemy $Nu = dx$; a $CN = \sqrt{aa - xx}$; więc

wartość łuku Mm przemięni się na $\frac{aadx}{aa + xx}$;

to jest, że $Mm = \frac{aadx}{aa + xx}$; więc $\int Mm$ albo

$AM = \int \frac{aadx}{aa + xx}$. Ta ilość nie może być

doskonale scałkowana; ażeby zaś dała się scał-

kować w sposób przybliżony, trzeba ją na-

piśać w takićy postaci: $\int aadx(aa + xx)^{-1}$;

a natenczas, znalazłszy podług (Alg. 128), że

$(aa + xx)^{-1} = a^{-2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \text{t.d.} \right)$ będzie $\int aadx(aa + xx)^{-1} =$

$\int dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \text{t.d.} \right) =$

$\int \left(dx - \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{x^4 dx}{a^4} - \frac{x^6 dx}{a^6} + \frac{x^8 dx}{a^8} - \text{t.d.} \right)$

d.

$$d.) = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \text{t.d.}$$

$$= x \left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - \text{t.d.} \right).$$

Nieostaie nam tedy tylko wiedzieć, czy niemamy którego z łuków takiego, któryby mieścił się w okręgu znaną liczbę razy, i miał styczną znaną. Lecz łuk od 45° , jest taki; bo mieści się 8 razy w okręgu, a styczną tego równa się promieniowi (Jeom. 276). Więc zrobiwszy $x = a$, mieć będziemy na długość łuku od 45° , wartość następują-

cego rzędu, $a \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{t.d.} \right)$.

Atoli ponieważ wyrazy tego rzędu, zmniejszają się jeszcze bardzo powoli, przeto zobaczymy, czy niemoglibyśmy rozłożyć łuku od 45° na dwa inne łuki, którychby styczne były wiadome. Mało nam na tem zależy, ażeby liczba stopniów odpowiadająca tym łukom była wiadoma; byleby wynosiły 45° po wyrachowaniu ich długościów, przy pomocy stycznych; dodawszy wraz te długości, mielibyśmy długość łuku od 45° . A że takowe łuki oczywiście będą mniejsze od 45° , przeto też i styczne ich będą mniejsze od promienia, a zatem rząd wyrażający ich wartość, wypadać musi znacznię ubywaący, i łatwiejszy do ob-

rachowania. To co powiedziało się w (Jeom. 282), podaje nam sposób wynalezienia takowych dwóch łuków. Jakóż widzieliśmy tam, iż kiedy a i b są dwoma łukami iakiémikolwiek, to wy-

$$\text{pada, Stycz. } (a + b) = \frac{\text{Wst. } (a + b)}{\text{Dost. } (a + b)} = \text{Wst.}$$

Wft. a doft. b + wft. b doft. a
 Doft. a doft. b — wft. b wft. a (Jeom. 286 i
 287); więc rozdzieliwszy górą i dolęm
 przez doft. a doft. b , będzie styczn. $(a+b)$

$$\frac{\text{wft. } a}{\text{doft. } a} + \frac{\text{wft. } b}{\text{doft. } b} = \frac{\text{wft. } a \text{ wft. } b}{\text{doft. } a \text{ doft. } b}, \text{ to jest, Stycz. } (a+b)$$

Stycz. a + styczn. b
 $1 - \text{Stycz. } a \text{ styczn. } b$. Więc, przypuści-
 wszy, że $a+b=45^\circ$, w którymto razie, styczn.

$(a+b)=1$, mieć będziemy $1 - \text{stycz. } a \text{ styczn. } b$
 $=1$; zrównanie, z którego podług zwy-
 czaynych reguł, wyciąga się styczn. $b =$

$1 - \text{stycz. } a$. Daymy tedy że styczn. $a = \frac{1}{2}$
 a natenczas mieć będziemy, styczn. $b =$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Niezoftaie nam tedy, tylko wyrachó-
 wać przy pomocy rzędu poprzedzającego,
 długość łuku, któregooby styczn. x była wy-
 rażona przez $\frac{a}{2}$, to jest, która równałaby
 się połowie promienia, i długość łuku, któ-
 rego styczn. x była wyrażona przez $\frac{a}{3}$;

te dwa łuki wraz dodane, uczynią łuk od 45° .
 Położywszy tedy w poprzedzającym rzę-
 dzie, zamiast x , naprzód $\frac{a}{2}$, a potem $\frac{a}{3}$, będzie

$$\frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} - \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{13 \cdot 2^{12}} \text{ i. t. d. }, i \frac{a}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} - \frac{1}{11 \cdot 3^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{12}} \text{ i. t. d. } \right)$$

Zeby mieć wartość każdego z tych dwóch
 łuków, wyrażone bez najmniejszego uchy-
 bienia aż do dziewiątej dziesiątnej, trzeba
 wyrachować piętnaście pierwszych wyrazów
 pierwszego rzędu, a z drugiego rzędu tyl-
 ko dzieśnięć pierwszych wyrazów. Takowy
 zaś rachunek może być bardzo łatwo od-
 prawiony, uważając, że w pierwszym rzę-
 dzie następujące po sobie wyrazy, są takie,
 że każdy równa się swemu poprzedzające-
 mu, rozmnożonemu przez $\frac{1}{2^2}$, to jest każdy

wynosi $\frac{1}{4}$ poprzedzającego; potem takowy rząd
 mnoży się wyraz w wyraz, przez ten rząd, $1,$
 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ i. t. d., naostatek dodawszy z sobą
 z jednej strony wszystkie wyrazy liczby
 parzystej, a z drugiej strony wszystkie wy-
 razy liczby nieparzystej, i sumę tych o-
 statnich odjąwszy od summy pierwszych, re-
 szta rozmnoży się przez $\frac{a}{2}$. Drugiego tak-
 że rzędu rachunek niemnięj łatwo odpra-
 wi się, uważając że w nim każdy wyraz
 powstaie, z wyrazu poprzedzającego roz-
 mnożonego przez $\frac{1}{3^2}$, czyli przez $\frac{1}{9}$, to jest

że każdy wyraz jest dziewiątą częścią swe-
 go poprzedzającego; potem takowy rząd mno-
 ży się wyraz w wyraz, przez ten inny rząd
 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ i. t. d., i inne działania odbywają
 się iak z pierwszym rzędem, oprócz że na-
 ostatek wypadek zamiast $\frac{a}{2}$, ma być rozmno-
 żony

żony przez $\frac{a}{3}$. Odprawiawszy te wszystkie przepisane działania, z przybliżeniem aż do dziesięciu dziesiątych, znaleźlibyśmy na wartość pierwszego rzędu, $\frac{a}{2}$ (0,9272952180) albo a (0,4636476090), a na wartość drugiego rzędu, $\frac{a}{3}$ (0,9652516632) albo $a \times$ - - (0,3217505544); więc na łuk od 45°, który jest summa tych dwóch łuków, będzie a (0,7853981634; a zatem powtórzywszy tę wartość cztery razy, żeby mieć pół okręgu, wypadnie a (3,1415926536); więc promień ma się do pół okręgu, (albo średnica ma się do całego okręgu) :: a : a (3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536, stosunek, nieróżniący się tylko o połowę jedności dziesiątnej dziesiątego miejsca, od owego, który naznaczyliśmy indziej (Jeom. 146), a który nawet moglibyśmy bardzo łatwo wyrachować, z przybliżeniem daleko doskonałszem.

Na trzeci przykład przybliżenia, obierzmy sobie wynaleźnienie logarytmu, odpowiadającego liczbie jakiegokolwiek. Lecz nasamprzód należy sobie przypomnieć, to co już powiedziało się indziej (27), to jest, że logarytmy o których tu mówimy, nie są owe co pospolicie podają się w Tablicach. Ale wyrachowawszy te, łatwo sobie z nich będzie można wnieść tamte, iak zobaczymy niżej.

Zmy-

Zmyślam sobie liczbę zadaną rozłożoną na dwie części takie iak $a + x$, gdzie a rozumić się bydz większą częścią. Podług tego co się rzekło (27), będzie $d \log. (a + x)$

$= \frac{dx}{a + x}$, ilość niedająca się scałkować Al-

gebraicznie; trzeba ją tedy rozłożyć wrzęd; daw(zy iey pierwszy tę postać, $dx(a + x)^{-1}$. Lecz podług (Alg. 128), $(a + x)^{-1} = a^{-1} \times$

$(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} \text{ i. t. d. }) = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} +$

$\frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} \text{ i. t. d.}$; więc $dt(a + x) = dx(a + x)^{-1}$

$= \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4} \text{ i. t. d.}$; więc

scałkowawszy, będzie $l(a + x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}$

$+ \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{t. d.} + C$. Zeby naznaczyć

wartość stateczney C ; uważam że to zrównanie powinno zawsze mieć miejsce, niech będzie x iakie chce, a zatem i w ten czas kiedy by było $x = 0$; lecz w tym ostatnim przypadku, zrównanie przemienia się na $la = C$;

więc $C = la$; więc jest $l(a + x) = la + \frac{x}{a}$

$- \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \text{ i. t. d.}$ A zatem byleby

mieć logarytm jedney iakiegokolwiek liczby, to przy pomocy tego rzędu, zawsze można sobie wyrachować logarytm wszelkiy innéy liczby. Np. przypuściwszy że $a = 10$, a

$a + x = 11$, to będzie $x = 1$, a zatem $\frac{x}{a}$

$= \frac{1}{10}$; skąd wnosi się $l. 11. = l. 10 + 0,1$

$-\frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3}$ i. t. d.; zrównanie, po-
ziąca co ma być przydane do logarytmu
10ciu, żeby mieć logarytm 111tu.

Atoli ponieważ rząd powrze-
chny dopiero wynaleziony, często-
kroć niebysza dość znacznie ubywa-
jący, przeto podajemy tu jeszcze in-
ny sposób wiaki sobie postąpić można.
Niechay będzie zadano, żeby wy-
naléśdż logarytm ułamka, którego-
by licznik był większy od miano-
wnika; zobaczymy zaś wkrótce, że
można na tę drogę naprowadzić
szukanie wszelkiego logarytmu.

Oznaczmy sobie przez a , sumę li-
cznika i mianownika tego ułamka, a przez
 x onych różnicę; natenczas, podług (Jeom.
305), licznik będzie wyrażony przez $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$; a mianownik przez $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$; tak
że cały ułamek wynidzie, na $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$, albo
(wyrugówawszy spólnego czynnika $\frac{1}{2}$), na
 $\frac{a+x}{a-x}$; a zatem logarytmem tęg liczby, będzie
ilość $l. \left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, albo $l. (a+x) - l. (a-x)$;
którą różniczkówawszy, uważając a iako
stateczną, a samo x iako odmienną, * mieć
bę-

* Lubo ten ułamek, powinién wyrażać
w powszechności wszelki ułamek, to jednak by-
najmniéj nieprzeszkadza, do poczytania sumy

będziém podług (27), $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$, co wy-

chodzi, na $\frac{2adx}{aa-xx}$, albo na $2adx(aa-xx)^{-1}$.

Rozłożywszy tedy w rząd, wyraż $(aa-xx)^{-1}$
podług (Alg. 128), będzie $(aa-xx)^{-1} =$

$a^{-2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{t. d.}\right)$, więc

$2adx(aa-xx)^{-1} = 2a^{-1}dx \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} +$

$\frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \text{t. d.}\right) = 2 \left(\frac{dx}{a} + \frac{x^2 dx}{a^3} + \frac{x^4 dx}{a^5} +$

$\frac{x^6 dx}{a^7} + \frac{x^8 dx}{a^9} + \text{t. d.}\right)$; więc będzie $\int \frac{2adx}{aa-xx}$

albo $l. \frac{a+x}{a-x} = 2 \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} +$

$\frac{x^9}{9a^9} + \text{t. d.}\right) + C$. Co się dotyczy statecznéy

C ; téy wartość znajduie się iak wyżej, uwa-
żywszy na co wychodzi poprzedzające zrów-
nanie, kiedy iest $x=0$. Lecz w takim ra-

zie, mielibyśmy $l. \frac{a}{a} = C$; więc $C = l. \frac{a}{a} =$

$l. 1 = 0$; więc będzie prosto $l. \frac{a+x}{a-x} = 2 \left(\frac{x}{a} +$

$\frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \text{t. d.}\right)$; gdzie iawna iest,

iako każdy wyraż powstaie z poprzedzające-
go, rozmnożonego przez kwadrat ilości $\frac{x}{a}$,

my a wynikającéy z licznika i mianownika za
stateczną; albowiém niéma żadnego takiego
ułamka, którego by niemożna przygotować so-

to jest, przez kwadrat pierwszego wyrazu; potem bierze się pierwszy wyraz, $\frac{1}{3}$ drugiego, trzeciego, i. t. d. a naostatek summa wszystkich wyrazów powtarza się dwarazy. Zobaczmy to w przykładach.

Szukajmy np. logarytmu odpowiadającego liczbie 2. Tym umysłem przemienimy 2, w ułamek $\frac{2}{1}$, mieć będziemy $a=3$ a $x=1$; więc $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$. A zatem

łatwo będzie wyrachować sobie wszystkie wyrazy, bo nie trzeba tylko na złożenie każdego, wziąć $\frac{1}{3}$ wyrazu poprzedzającego, a tym sposobem złoży się wartość rzędu $\frac{x}{a} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^5}{a^5}$, i. t. d, tak iż mieć będziemy iak następuje.

$\frac{x}{a} = 0,33333333$	} więc	$\frac{x}{a} = 0,33333333$
$\frac{x^3}{a^3} = 0,037037037$		$\frac{x^3}{3a^3} = 0,012345679$
$\frac{x^5}{a^5} = 0,004115226$		$\frac{x^5}{5a^5} = 0,000823045$
$\frac{x^7}{a^7} = 0,000457247$		$\frac{x^7}{7a^7} = 0,000065321$
$\frac{x^9}{a^9} = 0,000050805$		$\frac{x^9}{9a^9} = 0,000005645$
$\frac{x^{11}}{a^{11}} = 0,000005645$		$\frac{x^{11}}{11a^{11}} = 0,000000513$
$\frac{x^{13}}{a^{13}} = 0,000000627$		$\frac{x^{13}}{13a^{13}} = 0,000000048$
$\frac{x^{15}}{a^{15}} = 0,000000069$		$\frac{x^{15}}{15a^{15}} = 0,000000004$

bie w ten sposób, żeby summa licznika i mianownika jego, równała się wszelkiemu iakiemu

więc summa wszystkiego, uczyni $0,346573588$; a podwójność jego, która ma być logarytmem liczby 2, będzie $= 0,693147176$, albo $0,69314718$, przeistając tylko na ośmiu dziesiętnych; bo żeby można było przypuścić i dziewiątą dziesiętną, to trzeba by było przybliżenie dalej pociągnąć.

Ponieważ 4, są kwadratem 2-óch, a 8 są sześcianiem onychże, więc podwójność tego logarytmu, będzie logarytmem 4-ech, a potrójność tegoż pierwszego logarytmu, będzie logarytmem 8-iu. Zeby mieć logarytm 3-ech, można podobnież wyrachować logarytm ułamka $\frac{1}{3}$, który odjęwszy od logarytmu 4-ech, reszta dałaby logarytm 3-ech; bo 3 nie jest co innego, tylko 4 rozdzielone przez $\frac{4}{3}$; więc $l. 3 = l. 4 - l. \frac{4}{3}$. Ale takowy logarytm ieszcze łatwiej mieć można, wyrachowawszy logarytm ułamka $\frac{2}{3}$, i odjęwszy go od logarytmu 8-iu, już teraz wiadomego; reszta będzie logarytmem 6-ciu, a tego znowu połowa będzie logarytmem 3-ech. Dodawszy logarytm 3-ech do logarytmu 2-óch, summa da logarytm 6-ciu. Zeby mieć logarytm 5-ciu, trzeba naprzód wyrachować logarytm 10-ciu; rachując logarytm ułamka $\frac{1}{2}$,
Tom III. K któ-

kolwiek liczbie która się spodoba. Np. chcąc ułamek $\frac{2}{3}$ przyprowadzić do tego stanu, żeby summa jego licznika i mianownika była $= 12$, dosyć jest, rozmnożywszy oba wyrazy przez iednęż liczbę n , co da $\frac{2n}{3n}$, dosyć jest mówić, zrobić $3n + 5n$ albo $8n = 12$, skąd wyciąga się $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, więc będzie $\frac{3}{5} = \frac{2}{15}$, ułamek, w którym summa licznika i mianownika czyli w rzeczy samej 12.

który wyrachowany i dodany do logarytmu 8^{ciu}, da logarytm 10^{ciu}. Od tego zaś logarytmu 10^{ciu} odiawszy logarytm 2^{óch}, reszta będzie logarytmem 5^{ciu}.

A stąd pokazuje się iakby sobie trzeba postąpić w wyrachowaniu innych logarytmów. Uważyć tylko należy, że daley im większych liczb logarytmu szuka się, tem krótszy rachunek wypada, tak iż mając wyrachowane pierwsze logarytmy aż do 10^{ciu}, dalsze aż do 1000 można rachować, nie używając tylko trzech pierwszych wyrazów rzędu, kiedy ma się przestać na ośmiu dziesiątych; pominąwszy zaś tę liczbę, aż do tyfiąca dosyć będzie na dwóch pierwszych wyrazach, a daley po 10000, dosyć jest na samym pierwszym wyrazie.

88. Teraz żeby wiedzieć, iak z tych logarytmów wnoszą się logarytmy te, co znaydują się w pospolitych Tablicach, do tego trzeba naprzód mieć logarytm 10^{ciu}. Wyrachowawszy tedy przez formułę poprzedzającą logarytm ułamka $\frac{1}{10}$, mieć będziemy $\log. \frac{1}{10} = 0,22314355$; do którego przydawszy logarytm 8^{ciu}, powstaiały z potrójności logarytmu 2^{óch} wyżej wynalezionego, będzie $\log. 10 = 2,30258509$.

To założywszy, przypomniemy sobie, że zrównanie $dx = \frac{dy}{y}$, na którym

rém

rém (27) zasadza się niniejszy rachunek logarytmów, nienależy tylko temu układowi, gdzie pomiar rozumie się być $= 1$; zrównanie zaś należące w powszechności wszelkim układom logarytmów iakie tylko być mogą, jest to: $dx = \frac{m dy}{y}$; a zrównanie należące także wszelkim układom logarytmów, ale w którychby pierwszym wyrazem a progressyi Geometryczney fundamentalney, była iedność, jest $dx = \frac{m dy}{y}$. Z tych zrównań pierwsze, to jest $dx = \frac{dy}{y}$, po scałkowaniu, daie $x = ly$; a trzecie, to jest $dx = \frac{m dy}{y}$, daie $x = ml.y$; skąd pokazuje się, że ponieważ x wyraża logarytm, przeto żeby logarytmy bezśrzednie z rachunku wypadające, doprowadzić do takiego układu logarytmów, w którymby było pomiarem m , trzeba logarytmy bezśrzednie z rachunku wypadające rozmnożyć przez pomiar m . Lecz logarytmem 10^{ciu}, w Tablicach pospolitych jest 1; a widzieliśmy dopiero, że logarytmem 10^{ciu}, bezśrzednie

K 2

z

z rachunku wypadającym, jest 2,30258509; więc będzie $m \times 2,30258509 = 1$; więc na pomiar w Tablicach pospolitych wypada, $\frac{1}{2,30258509}$, co po rozdzieleniu wychodzi na 0,43429448.

Więc, żeby logarytmy beśrzednie z rachunku wynalezione, naprowadzić do logarytmów iakie znajdują się w pospolitych Tablicach, trzeba rozmnożyć pierwsze przez 0,43429448. A odwrotnie, żeby logarytmy, iakie znajdują się w pospolitych Tablicach, naprowadzić do logarytmów beśrzednie z rachunku wypadających, trzeba tamte rozdzielić przez 0,43429448, albo (co wygodniysza a na jedno wychodzi) rozmnożyć je przez 2,30258509.

I tak, jeżeli rozmnożymy wypadek 0,69314718 wyżey wynaleziony na logarytm odpowiadający liczbie 2, jeżeli go mówię rozmnożymy przez 0,43429448, znajdziemy 0,3010300 na logarytm 2óch, właśnie taki, iaki znajduje się w pospolitych Tablicach.

89. Chcąc zaś powrócić do samej liczby, trzeba tak sobie począć.

Widzieliśmy wyżey, że oznaczywszy liczbę iakąkolwiek przez $a + x$, wypada

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \text{ i. t. d.};$$

$$\text{więc } l(a+x) - la \text{ albo } l \frac{a+x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \text{ i. t. d., gdzie } a \text{ rozumie}$$

się bydź liczbą iakąkolwiek upodobaną, ale taką, że logarytm iey mało różni się od logarytmu danego, który rozumie się należyć do $a + x$. Zróbmy dla prościyszego wyrażenia $l \frac{a+x}{a} = z$, a mieć będziemy

$$z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \text{ i. t. d., idzie tedy o to, ażeby mieć wartość ilości } \frac{x}{a} \text{ wyrażoną w } z.$$

Daymy tedy, że takowa wartość może bydź wyrażona w tém zrównaniu, $\frac{x}{a} =$

$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 \text{ i. t. d., gdzie } A, B, C, \text{ i. t. d. byłyby współczynnikiami statecznemi, których wartość dopiero ma bydź wynaleziona. Bedzie tedy:}$

$$z = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{t. d.}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{A^2}{2} z^2 - \frac{2AB}{2} z^3 - \frac{BD}{2} z^4 \\ & + \frac{A^3}{3} z^3 - \frac{2AC}{2} z^4 \\ & + \frac{3A^2B}{2} z^4 \\ & - \frac{A^4}{4} z^4 \end{aligned}$$

Lecz kiedy to zrównanie ma mieć miejsce, z niechay będzie jakie chce, trzeba ióć ażeby było $A=1$; zre ażeby summa wyrazów mnożących każdy stopień glo-

ski z w następujących kolumnach po Az , była zerem. Będzie tedy $B - \frac{A^2}{2} = 0$, $C - \frac{AB + \frac{A^3}{3}}{2} = 0$, $D - \frac{BD}{2} - AC + \frac{A^2 B}{2} - \frac{A^4}{4} = 0$; skąd wyciąga się $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{1.2}$, $D = \frac{1}{1.2.3}$; gdyby zaś by-

ła jeszcze większa liczba wyrazów, takich jak Ez^5 , Fz^6 , to podobnymże sposobem znalazłoby się byż $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, $F =$

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ i. t. d.; wypada tedy $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \text{t. d.}$ Więc $1 + \frac{x}{a}$ albo $\frac{a+x}{a} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \text{t. d.}$

W użyciu tej formuły, odéymuie się od logarytmu zadanego, to jest od logarytmu ilości $a+x$, logarytm najbliższy znany, któremu odpowiadająca liczba poczyna się za a . Wypadła reszta, będzie wartością wyrazu $l \cdot \frac{a+x}{a}$ albo z , którą położywszy w formule poprzedzającej, wypadek pokaze wartość ilości $\frac{a+x}{a}$; skąd potem łatwo

two wynaydzie się $a+x$; bo a jest już wiadome.

Chąc wiedzieć iakię liczbę odpowiada logarytm 1, w tym układzie logarytmów o którym tu mowa, trzeba rozumieć $l \frac{a+x}{a}$ albo $z=1$; a tak będzie $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + 1 +$

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \text{t. d.} =$

2,7182818, przeistając tylko na siedmiu dziesiętnych. Liczba której logarytmem jest 1, zdarza się bardzo często w rachunkach, jak zobaczymy w dalszym przeciągu, dla tego też tu do wyrachowania ię podał się sposób.

Ponieważ tu mówi się o logarytmach, w których pomiarém jest jedność, przeto gdyby logarytm zadany należał do natury logarytmów znajdujących się w pospolitych Tablicach, trzeba by począć od przemienienia go, iako też i tego coby się wziął za logarytm ilości a , na logarytmy niniejsze, albo też tylko trzeba by przemienić różnicę takowych dwóch logarytmów, a to sposobem wyżey podanym (88).

90. Można także mieć infze wyrażenie liczby, przy pomocy ię logarytmu; które iż bywa w częstém używaniu, przeto należy nam dać go tu poznać.

Niechay będzie x takową liczbą, a $lx = z$. Jeżeli druga część tego zrównania rozmnoży się przez e , (przez takowe e rozumiejąc liczbę, której logarytmem byłoby 1), to będzie $lx = ze$, przez co nieodmienna się

K 4

nic;

nic; bo $le=1$. Tym sposobem, z natury logarytmów, zrównanie $lx = xle$ przemieni się na $lx = le^x$; skąd wyciąga się $x = e^x$; bo kiedy logarytmy są sobie równe, to i liczby odpowiadające im muszą także być sobie równe. A zatem podług tego co okazało się wyżej (§9), jeżeli jest $lx = x$, to będzie

$$x = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{t. d.}$$

A że oraz mamy $x = e^x$, więc będzie także $e^x = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{t. d.}$

Prze- 91. Sposób, który tu podał się
swoja, do wniesienia sobie wartości głoski

x z równania $z = \frac{x}{a}$ — t. d. nazywa

się *sposób odwrótny* rzędów; zależy na tém iak widać, ażeby rozumieć odmienną (której szuka się wartości), wyrażoną w takim rzędzie, w którymby druga odmienna, miała wykładniki rosnące w progresji arytmetycznej, i w którymby każdy wyraz, miał współczynnika statecznego nieokreślonej wartości.

Gdyby było wiele wyrazów zawierających w sobie x i z w iednymże równaniu, byleby x i z niebyły między sobą rozmnożone, to rząd wykładników znajdzie się, zrobiwszy

wszy wykładnika pierwszego wyrazu rzędu szukanego, równym najmniejszemu wykładnikowi téż odmiennéy położonéy w zrównaniu; na różnicę zaś spólną między wykładnikami tegóż rzędu, trzeba by wziąć największego spólnego dzielnika wykładników należących do téż odmiennéy w zrównaniu.

Np. gdybym miał $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^3 + \text{t. d.}$; zrobiłbym $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} + Dz^{\frac{5}{3}} + Ez^2 + \text{t. d.}$; bo najmniejszym wykładnikiem głoski z jest ułamek $\frac{2}{3}$, a największym spólnym dzielnikiem wykładników $\frac{2}{3}$ i 1 należących do z , jest $\frac{1}{3}$.

Ale gdyby x i z były między sobą rozmnożone, to natenczas trzeba by udać się do sposobu, którego wyszczególnienie do zamiaru naszego nie należy; ale który zobaczyć sobie można w dziełach *Newtona*, i w *Rozbiorze linii krzywych* przez *Kramera*.

Użycia przybliżeń poprzedzających do całkowania różnych ilościów.

92. Ponieważ już mamy wyrachowane Tablice różnych części koła i logarytmów, przeto kiedy trafi

trafi się do całkowania iaka różniczka, dająca naprowadzić się do koła albo do logarytmów, to byłoby rzeczą niepotrzebną, takowe różniczki rozkładać w rzędy. Pożyteczniey tedy w téj materyi zda nam się, spomiędzy takowych różniczek dać poznać te, co zdarzają się najczęściej, i pokazać iak wynaydują się łuki koła, albo logarytmy które są całką onychże. Zobaczymy to w przykładach.

93. Widzieliśmy wyżey (86), że $\frac{1}{2}adx$

fig. 17. wyraża składkę łuku kołowego AM (fig. 17) w którym a byłoby średnicą, a x odcin-

kiem, tak że całką téj ilości, albo $\int \frac{1}{2}adx$

jest łuk AM . Daymy tedy, że ma być szukana wartość téj całki, odpowiadająca pewney wartości określoney głoski x ; w takim razie, trzeba odjąć od CA albo $\frac{1}{2}a$ znaną wartość głoski x albo AP , żeby mieć CP ; to zaś mając, w trójkącie prostokątnym CPM , będzie znanomy kąt prosty, przeciwprostokątna $CM = \frac{1}{2}a$, i bok CP , a zatem będzie można wyrachować kąt ACM ; a znalazłszy takowy kąt ACM , czyli liczbę stopniów odpowiadającą łukowi AM , i mając wiadomy promień iego CM , łatwo da się wyrachować długość takowego łuku, podług (Jeom. 149).

94. Gdyby było zadano $\frac{hdx}{\sqrt{(ghx - pxx)}}$ gdzie

gdzie h, g, p , i k , rozumieją się bydz ilościami znanymi, to takową różniczkę można by zrobić podobną poprzedzającą, rozdzielwszy górą i dolęm przez $\sqrt{p}$; co by nam

$$\text{dało } \frac{\frac{h}{\sqrt{p}} dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}, \text{ albo } \frac{h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}.$$

Lecz w tém wyrażeniu, gdybyśmy wzięli na mnożnika wyrazu dx , połowę ilości $\frac{gk}{p}$, która mnoży x pod znakiem pierwiastkowym, to natenczas ta różniczka byłaby podobna różnicze poprzedzającą (93); uczynmy tedy tak, rozmnożywwszy, a oraz i rozdzielwszy przez $\frac{1}{2}$, $\frac{gk}{p}$, albo przez $\frac{gk}{2p}$, a

$$\text{mieć będziemy } \frac{\frac{h}{\sqrt{p}} \times \frac{gk}{2p} dx}{\frac{gk}{2p} \sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}, \text{ albo } \frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \cdot \frac{\frac{gk}{2p} dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}.$$

W téj postaci można roznać bez trudności, że całką nazęy różniczki, jest łuk koła, którego by średnicą było $\frac{gk}{p}$, a odcinkiem x , jest mówię ten łuk rozmnożony przez $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$; a zatem żądana całka łatwo da się naznaczyć, podług tego co poprzedziło.

95. Gdyby zamiast rachowania odcinków od punktów A , rachowaliśmy je raczej od środka C , oznaczywwszy promień CA

CA przez b , a odcinek CP przez x , mielibyśmy na składkę łuku AM to wyrażenie,

$-b dx$; które łatwo wynayduie się, przy-

stosówawszy ieden do drugiego trójkąty podobne sobie CPM , Mm , i uważając że $PM = \sqrt{(bb - xx)}$, iako też dawszy na to baczenie, że różniczka powinna wypadać przeczącą, z przyczyny że im bardziey CP albo x pomnaża się, tém bardziey zmniejsza się łuk AM . A tak w terażniejszym przypadku, mielibyśmy na różniczkę, ilość

$\frac{k dx}{\sqrt{(gh - pxx)}}$, która odmienia się iak wyżey na $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p} - xx)}}$; a że tu przez $\frac{gh}{p}$ wyraża

się bb ; więc ilość $-b$ mająca znaydować się w liczniku, będzie wyrażona przez $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; więc rozmnożywszy a oraz i rozdzieliwszy

przez $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$ mieć będziemy, $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p} - xx)}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}} \cdot \sqrt{(\frac{gh}{p} - xx)}}$

Więc rozumiejąc bydź $CA = \frac{gh}{p}$, a $CP = x$,

wypadnie na całkę, $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$, albo po-

wszechniey, $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM \mp C$, albo $\frac{-k}{\sqrt{gh}} \times$

$\times AM \mp C$. Co się dotyczy stateczney C , takowa wynayduie się z warunków szczerzego zagadnienia, co dowiodło do różniczki o której mowa; łuk zaś AM wynayduie się, iak nauczylismy wyżey (93); to iest przez obrachowanie trójkąta CPM i. t. d.

96. Widzieliśmy indziey (86), że $\frac{a dx}{aa \mp xx}$,

wyraża łuk kołowy, w którymby a było promieniem, a x styczną; łuk, którego wielkość odpowiadającą iakięy pewney określony wartości główki x , można naznaczyć, wyrachowawszy kąt ACN w trójkącie prostokątnym ACN (fig. 23), i długość łuku AM , przy pomocy liczby stopniów kąta ACN , i przy pomocy promienia a .

Mając tedy daną ilość $\frac{k dx}{gb^2 \mp hxx}$ rozdzieliłbym ją górą i dołem przez h ; co by mi dało $\frac{k}{h} \cdot \frac{dx}{\frac{gb^2}{h} \mp xx}$; potem rozmnoży-

wszy górą i dołem przez $\frac{gb^2}{h}$, miałbym

$\frac{\frac{k}{h} \cdot \frac{gb^2}{h} dx}{\frac{gb^2}{h} \mp xx}$, albo $\frac{k}{gb^2} \times \frac{\frac{gb^2}{h} dx}{\frac{gb^2}{h} \mp xx}$, ilość,

którey całkę znalazłbym, wyrachowawszy długość łuku, mającego za styczną x , a za promień $\sqrt{(\frac{gb^2}{h})}$, i rozmnożywszy przez $\frac{k}{gb^2}$.

97. Te tedy trzy różniczki całkują się przez łuki kołowe. Zobaczmy ielżcze te, co mogą być całkowane

ne przy pomocy powierzchni kołowej. Składkę półodcinka APM (fig. 17), jest $dx \sqrt{ax - xx}$, oznaczwszy AP przez x ; bo $y = \sqrt{ax - xx}$, a zatem $y dx$ albo $P_{pm} M = dx \sqrt{ax - xx}$; więc wszelka różniczka, mająca podobną postać, albo która mogłaby być wzwyż wskazanemi przygotowaniami do niey naprowadzona, może być scałkowana przy pomocy półodcinka kołowego, w którym odcinkiem liniowym byłoby x , a średnicą a ; odcinek zaś kołowy łatwo da się ob rachować, iużto przy pomocy tego co poprzedziło, iuż też w sposób podany na inżem miejscu (Jeom. 149).

98. Np. chcąc mieć powierzchnią półodcinka eliptycznego APM (fig. 24); będzie $y = \frac{b}{a} \sqrt{ax - xx}$; więc $y dx$ albo $d(APM) = \frac{b dx}{a} \cdot \sqrt{ax - xx}$; lecz $dx \sqrt{ax - xx}$, wyraża składkę półodcinka kołowego APM ; rozumiejąc opisanie koło na AB iuż na średnicy; więc będzie $d(APM) = \frac{b}{a} d(APM_{ko})$; a scałkowawszy, będzie $APM = \frac{b}{a} \times APM_{ko}$; skąd wnośi się $APM : APM_{ko} :: b : a$; to jest, że powierzchnia półodcinka eli-

liptycznego, ma się do powierzchni półodcinka kołowego odpowiadającego, iak się ma mniejsza oś do większey ośi; a stąd znówu wynika, że cała powierzchnia ellipsy, ma się do całej powierzchni koła opisanego na większey ośi, iak się ma mniejsza oś do większey ośi.

99. Gdyby zamiast rachowania odcinków od punktu A (fig. 17), rachowaliśmy fig. 17. ie od środka C ; to natenczas oznaczwszy CA przez b , a CP przez x , na składkę półodcinka APM , mielibyśmy $-dx \sqrt{bb - xx}$; bo w takim razie $y = \sqrt{bb - xx}$, i odcinek APM umniejsza się, tym czafem gdy x przybywa, przez co różniczka ilości APM staje się przeczącą. Zobaczmy teraz przykład różniczki przypadający do tęg postaci.

Niechay będzie zadano, żeby wynaleśdź powierzchnią ellipsoidy pociągłey. Formula powszechna wyrażająca powierzchnie

tęgo rodzaju, iest ta, $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (74);

zrównanie zaś należące do Ellipsy daie, $yy =$

$\frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$; więc $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}$,

a $dy = -\frac{b}{a} \times \frac{x dx}{\sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}}$; więc $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2$

$+ dy^2}$, przemienia, się na $\frac{cb}{ra} \times \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}$

$\times \sqrt{dx^2 + \frac{bb}{aa} \times \frac{x^2 dx^2}{\frac{1}{4}aa - xx}}$, albo po odby-

ciu wskazanego mnożenia, po zebraniu, i po wyciągnięciu ilości dx^2 spod znaku pier-

wiastkowego, $\frac{cb dx}{ra} \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx + \frac{bbxx}{aa})}$, al-

bo

bo $\frac{cbdx}{ra} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4 - a^2xx + b^2xx}{aa}\right)}$. Lecz jeżeli oznaczymy przez k , odległość CF od środka pału F (fig. 25), mieć będziemy $kk = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, albo $4kk = aa - bb$ (Alg. 230); więc poprzedzające wyrażenie składki powierzchni, odmienna się na $\frac{cbdx}{ra} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx}{aa}\right)}$, albo na $\frac{cbdx}{raa} \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx\right)}$. Teraz rozdzielmy ilość zamkniętą pod znakiem pierwiastkowym przez $4kk$, a zewnątrz rozmnożmy przez pierwiastek tego dzielnika, to jest przez $2k$, a mieć będziemy $\frac{2cbkdx}{raa} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4}{kk} - xx\right)}$ ilość, której trzeba dać znak $-$, ażeby wyrażała powierzchnię poczynającą się od punktu A ; bo kiedy x rośnie, powierzchnia umniejsza się; a tak mieć będziemy naostatek $-\frac{2cbkdx}{raa} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4}{kk} - xx\right)}$. Przytóżowawszy tedy tę ilość do ilości $-dx \sqrt{(bb - xx)}$, wyrażający (jak widzieliśmy) półodcinek kołowy, w którymby promieniem było b , wnieśliśmy stąd, że całą ilość $-dx \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4}{kk} - xx\right)}$, jest półodcinek kołowy OPM , w którymby promieniem było $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, a x odcinkiem liniowym wziętym ze środka; że mówię ta całka równałaby się temu odcinkowi kołowemu, pomnożonemu o pewną ilość stateczną. A zatem, jeżeli promieniem $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$ to jest takim, któryby był trzecią proporcjonalną li-

niiom CF i CA , narysuje się koło ONR , to będzie $\int -dx \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4}{kk} - xx\right)} = OPM$

$$+ C; \text{ więc } \int -\frac{2cbkdx}{raa} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4}{kk} - xx\right)} = \frac{2cbk}{raa} \times OPM + \frac{2cbk}{raa} \times C.$$

Zeby zaś wynaleść wartość stateczną C , trzeba uważać, że powierzchnia szukana mająca poczynąć się w punkcie A , musi być zerem w tymże punkcie: lecz w punkcie A odcinek OPM wychodzi na OAN ; więc będzie $= \frac{2cbk}{raa} \times OAN + \frac{2cbk}{raa} C$; skąd wyciąga się $C = -OAN$; tak iż na zupełną całkę wypadnie, $\frac{2cbk}{raa} \times OPM - \frac{2cbk}{raa} \times OAN$ albo $\frac{2cbk}{raa} (OPM - OAN)$, albo naostatek, $\frac{2cbk}{raa} (APM - N)$. Więc powierzchnię Pół-ellipsoidy będzie, $\frac{2cbk}{raa} (ACRN)$, albo z przyczyny że $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, a zatem że $\frac{2k}{aa} = \frac{1}{2CO}$ takową powierzchnią, będzie $\frac{c}{r} \times \frac{b}{2CO} \times ACRN$, albo $\frac{c}{r} \times \frac{CD}{CO} \times ACRN$; więc powierzchnią całej ellipsoidy, byłaby też ilość wzięta dwa razy.

Co się dotyczy sposobu wynalezienia promienia CO , ten jest bardzo prosty; trzeba naprzód z punktu C jako ze środka
Tom III. L pro-

promieniem CO , narysować łuk AL , który by w punkcie L , przeciał prostopadłą FL , podniesioną na linii CA z punktu F ; potem przedłużyć się linią CL aż się spotka w punkcie N z prostopadłą AN , podniesioną z punktu A , co nam da CN na szukaną wartość promienia CO , albo ilości $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$. Ja-
kóż, trójkąty CFL , i CAN podobne sobie, dają $CF : CA :: CL : CN$, albo $k : \frac{1}{2}a :: \frac{1}{4}a : CN = \frac{\frac{1}{4}aa}{k} = CO$.

100. Co się zaś tycze ilościów ściągających się bezśrzednie do logarytmów, do tych liczby należą te wszystkie ilości, w których zadana różniczka, albo jest albo może być uczyniona takim ułamkiem, w którymby licznik był różniczką mianownika, bądźto samą przez się, bądź też różniczką rozmnożoną albo rozdzieloną przez jaką liczbę stateczną.

Kiedy licznik jest doskonałą różniczką mianownika, to całką ilości, będzie logarytm tegoż mianownika.

$$\text{I tak: } \int \frac{dx}{x} = l x + C; \int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C; \int \frac{2xdx}{aa+xx} = l(aa+xx) + C.$$

Ale

Ale kiedy licznik, będzie różniczką mianownika, rozmnożoną albo rozdzieloną przez jaką liczbę stateczną; to w takim razie, różniczkę zadaną trzeba rozłożyć na dwa czynniki, z którychby jeden był ułamkiem, mającym za licznika doskonałą różniczkę mianownika, a z których drugi czynnik byłby liczbą stateczną. Natenczas całką takięw ilości, będzie logarytm mianownika odmiennego, rozmnożony przez czynnika statecznego.

Np. żeby scałkować $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$; ponieważ różniczką ilości a^3+x^3 jest $3x^2dx$, przeto trzeba mi zadaną różniczkę tak sobie przygotować, ażebym miał w liczniku $3x^2dx$, co wykonam, napisawszy $\frac{a}{3} \cdot \frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$; ilość, której całką jest $\frac{a}{3} l(a^3+x^3) + C$.

Podobnież $\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{1}{-1} \cdot \frac{-1dx}{a-x} = -l(a-x) + C = 0 - l(a-x) + C = l x - l(a-x) + C = l \frac{x}{a+x} + C$. Takóż, $\int \frac{xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2} l(aa+xx) + C$.

$C = l \sqrt{aa+xx} + C$. Naostatek $\int \frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n} =$

$$= \int \frac{a}{bn} \cdot \frac{nbx^{n-1} dx}{k + bx^n} = \frac{a}{bn} \cdot l(k + bx^n) + C$$

$$= l(k + bx^n)^{\frac{a}{bn}} + C.$$

Zeby zaś naznaczyć wartość liczebną takowych całek, trzeba postąpić sobie w ten sposób. Daymy że idzie o wartość całki $l(a + x)$, gdzie rozumie się $a = 5$, a $x = 2$. Trzeba mi tedy szukać logarytmu 7^{miu}; tym umyślem biorę z Tablic pospolitych log. 7^{miu}, którym jest 0,8450980, i rozmnożywszy go podług (88) przez 2,30258509, albo przez 2,3025851, mam 1,9459100, albo 1,94591, na wartość ilości $l(a + x)$, albo na wartość całki, odpowiadającej różnicce $\frac{dx}{a + x}$, kiedy $a = 5$, a $x = 2$.

101. Trafiają się czasem różniczki, które chociaż niedadają się tak przygotować iak poprzedzające, iednakże mogą być scalkowane prosto przez logarytmy; np. ilość $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$, iest taka. Udaie się częstokroć dać iey postać różniczki logarytmowey, rozmnożywszy ją przez związek głoski x , taki, ażeby mnogość stała się różniczką tegoż związku, albo samą przez się albo też rozmnożoną lub rozdzieloną przez iaką liczbę stateczną.

A natenczas rozdzieliwszy różniczkę przez takowy związek, zadana różniczka przemieni się oczywiście w różniczkę logarytmową.

Stosując to do ilości $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$, mnożę ją

przez $x + \sqrt{xx-1}$ i mam $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}} + dx$ ilość, która w rzeczy samej iest różniczką wyrazu $x + \sqrt{xx-1}$ tak iż mieć będę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{xx-1}} = \frac{\int dx + \sqrt{xx-1}}{x + \sqrt{xx-1}} = l[x + \sqrt{xx-1}] + C.$$

Podobnież możnaby znaleźć całkę ilości $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, rozmnożywszy górą i dolęm przez $\sqrt{-1}$, co by mi dało $\frac{dx \sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$; ilość, której całką (podług tego co się dopiero rzekło), byłoby $\sqrt{-1} l[x + \sqrt{xx-1}] + C$.

102. Obiecaliśmy indziéy (60) wytłómaczyć, iak się to dzieie, że reguła fundamentalna, podana do całkowania ilościów iednostłownych, daie ilość niezmierną na całkę wyrazu $\frac{dx}{x}$, kiedy takową całką iest lx albo przynajmniéy $lx + C$.

Calka wyrazu $\frac{dx}{x}$, może być pomierną albo niezmierną, podług części téj calki iaka się bierze. Zebyśmy to objaśnili, uważ-

my naprzód, że wzięść calkę ilości $\frac{dx}{x}$, nie-
 jest co innego, tylko skwadrować hiperbole
 pospolitą, uważoną względem swoich kón-
 cotycznych. Jakóż zrównanie należące do
 téj linii krzywéy, jest $xy = aa$, albo $xy = 1$, ro-
 zumiejąc dla prościęyszego wyrażenia $a = 1$.

Lecz z tego zrównania wyciąga się $y = \frac{1}{x}$;
 więc składka $y dx$ powierzchni, przemienia się
 na $\frac{dx}{x}$; więc chcąc mieć rozległości rachowane

fig. 26. od kóncotycznéy AZ (fig. 26), calka wy-
 razu $\frac{dx}{x}$ albo $1x + C$ powinna być taka, że-
 by się stawała zerém, kiedy punkt P przy-
 pada na punkt A , to jest kiedy $x = 0$; bę-
 dzie tedy w takim razie $1 \cdot 0 + C = 0$, a za-
 tém $C = -1 \cdot 0$, więc na calkę wypadnie $1x$
 $- 1 \cdot 0$, albo $1 \cdot \frac{x}{0}$; to jest, że rozległości ZA

PMV rachowane od kóncotycznéy, są nie-
 zmienne, gdzie Z i V rozumieją się być
 kóncami kóncotycznéy, należący do odpo-
 wiadającego ramienia hiperboli; w czém ni-
 ma wcale nic dziwnego.

Ale kiedy punkt O jest wierzchołkiem
 hiperboli, (w którymto przypadku odpo-
 wiadający odcinek $AN = 1$), żeby mieć w
 takim razie rozległości rachowane od pun-
 ktu N , trzeba uważać że calka $1x + C$, po-
 win-

winna być taka, ażeby stała się zerém, kie-
 dy punkt P przypadnie na punkt N , albo
 kiedy $x = 1$; będzie tedy $1 \cdot 1 + C = 0$, a za-
 tém $C = -1 \cdot 1 = 0$; więc rozległości $NOMP$,
 są wyrażone przez $1x$. A stąd pokazuje się
 iód Ze logarytmy bezśrzednie z rachunku
 wypadające, wyrażają rozległości hiperbo-
 liczne zawarte między kóncotyczną i linią
 krzywą, poczynając się od wierzchołka O
 téjże linii krzywéy. 2re Ze jeżeli calka
 ilości $\frac{dx}{x}$ albo $x^{-1} dx$, wzięta podług reguły

fundamentalnéy jest niezmierną, to w takim
 razie wyraża rozległości rachowane od po-
 czątku kóncotycznych. Zobaczmy niżej
 przykłady całkowania przez logarytmy.

*O sposobie naprowadzenia (kiedy to
 być może), całkowania zadanéy ró-
 żniczki dwustownéy, do całkowania
 innéy Różniczki także dwu-
 stownéy znanéy.*

103. **K**idey po zastanowieniu się
 nad różniczką dwustowną
 zadaną, podług (68 i 70), dla roze-
 znienia jeżeli da się całkować albo
 nie, kiedy mówię pokaże się być
 niezgodną do całkowania, to jeszcze
 nie trzeba kwapić się do przedsięwzię-
 cia z nią sposobów przybliżonych, o
 których mówiło się wyżej (85 i da-
 léy). Ale raczy trzeba spróbować,
 L4 czy

czy Różniczka zadana, niemożliwy
bydź naprowadzona do wyrażenia
innéy różniczki dwuślownéy prost-
széy, któręy całka przybliżona, by-
łaby już wiadoma. Znaki zaś po
których to poznaie się, są takie.

Niechay będzie $ax^m dx (b + cx^n)^p$ róż-
niczka zadana; a $ex^r dx (b + cx^n)^p$, różnicz-
ka do któręy pierwsza ma bydź napro-
wadzona; to jest, że te dwie różniczki nie-
różnią się między sobą, tylko w spółczyn-
nikach a, e , i w wykładniku głoski x położo-
néy zewnątrz nawiasów; r rozumie się bydź
mniejszy iak m , ale jednakowego znaku.
Naprowadzenie tedy téy pierwszéy różnicz-
ki do drugiéy, będzie podobne w ten czas, kie-
dy $\frac{m-r}{n}$ będzie liczbą całą twierdzącą. Ze-
by to zaś wykonać, trzeba rozumieć $\int ax^m dx$.

$$(b + cx^n)^p = (b + cx^n)^{p-1} (Ax^{m-n+1} + Bx^{m-2n+1} + Cx^{m-3n+1} + \text{t. d.}) + Q$$

$\int ex^r dx (b + cx^n)^p$, biorąc tyle wyrazów wię-
céy jednym, do rzędu $Ax^{m-n+1} + \text{t. d.}$,
ile będzie jednościów w wyrazie $\frac{m-r}{n}$.

Potém dla wynalezienia wartości czynników
 A, B, C i. t. d. różniczkuję się zrównanie, a
rozdzieliwszy przez $(b + cx^n)^p$, przenoszą się
wszystkie wyrazy do jednéy części; naosta-
tek każda summa wyrazów mnożących ied-
négo stopień głoski x , równa się się z ze-
rém, skąd wyniknie tyle zrównań służą-
cych

cych do wynalezienia niewiadomych A, B, C ,
i. t. d. ile znajdować się będzie tychże nie-
wiadomych.

Np. mając zadaną do scalkowania ilość
 $\frac{x^6 dx}{a^5} (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$; widzę podług tego co

się rzekło (68 i 70), że ta różniczka niepod-
pada scalkowaniu. Ale że postać ilości okry-
téy znakiem pierwiastkowym, jest też sama co
owa, która wyraża łuk koła, przeto uważam
czy różniczka zadana, niemożliwy iakim spo-
sobem zależy od ilości $adx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$,
wyrażając łuk koła, mającego za promień
 a , a x za odcinek wzięty od środka. Wi-
dząc podług reguły dopiero wyżéy podanéy,
że $\frac{m-r}{n}$ albo $\frac{6-0}{2}$, czyni liczbę całą twier-
dzącą 3; skąd sobie wnoszę, że całka zada-
néy różniczki, w rzeczy saméy zależy od
wzmiankowanego łuku koła. Zebym tedy

doszedł téy całki, rozumiem bydź $\int \frac{x^6 dx}{a^5} \times$

$$(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} (Ax^5 + Bx^3 + Cx)$$

+ $Q \int adx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, co po zróżniczkó-
waniu da mi

$$\frac{x^6 dx}{a^5} (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} (Ax^5 + Bx^3 + Cx) \cdot \\ [-x dx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}] \\ + (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} (5Ax^4 \\ + 3Bx^2 + C) dx \\ + Q adx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

A rozdzieliwszy przez $dx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, bę-

$$dzie $-\frac{x^6}{a^5} = -Ax^6 - Bx^4 - Cx^2 + (aa - xx)$.$$

$(5Ax^4 + 3Bx^2 + C) + Qa$; po odprawieniu
zaś wskazanego mnożenia i po przestawie-
niu, wypadnie:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{a^5} x^5 + Bx^4 + Cx^2 - Qa \\ & + Ax^6 + 3Bx^4 + Cx^2 \\ & + 5Ax^6 - 5Aa^2x^4 - 3Ba^2x^2 - Ca^2 \end{aligned} \right\} = 0.$$

A że to zrównanie zawſze powinno mieć miéyſce, chociażby było x iakie chce, więc trzeba ażeby każda ſumma wyrazów mnożących iednę ſtopień głoſki x , była zerem;

$$\text{a zatém mieć będiem } 6A + \frac{1}{a^5} = 0, -5Aa^2$$

$$+ 4B = 0, 2C - 3Ba^2 = 0, -Qa - Ca^2 = 0.$$

Wyciągnąwszy z tych zrównań wartości czynników niewiadomych A, B i. t. d., po-

$$\text{każe ſię } A = -\frac{1}{6a^5}, B = -\frac{5}{24a^3}, C = -\frac{5}{16a}, Q = \frac{5}{16}.$$

A zatém całką iłoſci $\frac{x^6 dx}{a^5}$

$$(aa - xx)^{-\frac{1}{2}}, \text{ będiem } (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{x^5}{6a^5} - \frac{5x^3}{24a^3} - \frac{5x}{16a} \right) + \frac{5}{16} \int adx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$$

+ C . Lecz $\int adx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ wyraża łuk koła, mającego za promień a , a za odcinek x , więc wartość téy iłoſci znajdzie ſię łatwo.

104. Gdyby różnica $m - r$, między dwóma wykładnikami należącemi do x , połozonego zewnątrz nawiaſów, rozdzielona przez wykładnika n , należącego do x zamkniętego między nawiaſami, niebyła liczbą całą twierdzącą, nienależałoby ieſzcze ſtąd wnosić, że naprowa-

dze-

dzenie iednéy różniczki, do poſtaci drugiéy różniczki znaio méy, ieſt niepodobne. Ale w każdéy różniczce, wykładnika zamkniętego między nawiaſami zrobiwszy prze-
czącym, ieżeli różnica między dwóma nowemi wykładnikami, położonemi zewnątrz nawiaſów, rozdzielona przez wykładnika zamkniętego między nawiaſami, daie liczbę całą twierdzącą, to znak że takowe naprowadzenie iednéy różniczki do drugiéy, będiem podobne.

Np. gdyby zapytano było, czy iłoſć $x^{-8} dx (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$, niezależy od iłoſci dx .

$$(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}; \text{ widzę wprowadzić, że } \frac{m-r}{n} \text{ albo } = \frac{-8-0}{4}, \text{ niedaie mi na wieloraz liczby}$$

cały twierdzącą, atoli niewnoſząc ſobie ieſzcze ſtąd, ażeby te dwie różniczki niezależały iedna od drugiéy, przemieniam ie na, $x^{-10} dx (a^4 x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ i $x^{-2} dx (a^4 x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$;

$$\text{a w takiéy poſtaci widzę, że } \frac{m-r}{n} \text{ albo } = \frac{-10+2}{4}, \text{ daie mi na wieloraz liczbę całą}$$

twierdzącą; ſkąd dopiero wnoſzę ſobie, że te dwie różniczki zależą iedna od drugiéy. A zatém żeby ie ſcałkować, działam z niemi iak wyżej, nieiuż w téy poſtaci iak były zadane, ale w takiéy w iaką przemieni-

ły

ły się, po zrobieniu wykładnika przeczącym. A zatem zrobiłbym $\int x^{-1} dx (a^4 x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ $(a^4 x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} = (a^4 x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}} (Ax^{-5} + Bx^{-1}) + Q \int x^{-2} dx (a^4 x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}}$, i dokonałbym tak wyżej, dla znalezienia wartości współczynników A, B, Q .

105. Może zdarzyć się w pewnych przypadkach, że różniczka iaka, podpada w rzeczy samej całkowaniu, lubo przez tę lub przez ową z dwóch reguł przepisanych, zdawałaby się zależeć od różniczki zadanej. Ale oprócz tego, że rozumie się już poprzedzone doświadczenie z tą ilością, podług reguły (68 i 70) czy może być całkowana lub nie, nadto w takim razie, współczynnik Q dany różniczce, do której ma być doprowadzona różniczka zadana, zawsze pokaże się być $= 0$.

Np. gdyby było zapytano, jeżeli różniczka $x^{-4} dx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$, zależy od różniczki $dx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$; uważam, że to być nie może w pierwszym przypadku z dwóch poprzedzających; ale w drugim przypadku, to jest przemieniwszy dane różniczki na $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ i $x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, znalazłbym że $\frac{m-r}{n}$ albo $\frac{-5+1}{-2}$, jest liczbą całą twierdzącą, co mi znać daje że pierwsza różniczka może zależeć od

drugiej. A przecież różniczka $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ może być całkowana, podług (68). Lecze to sprzeczniństwo nie jest tylko pozorne; bo jeżeli na tej zasadzie że $\frac{m-r}{n}$ rów-

na się liczbie całej twierdzącej, zechcemy w rzeczy samej, różniczkę $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, naprowadzić do różniczki $x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ i zrobimy $\int x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}} = (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}} (Ax^{-2} + B) + Q \int x^{-1} dx \times (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ to szukając wartości współczynników A, B, Q , iak wyżej, znajdziemy być $Q = 0$; co nam okazuje, że ilość $\int x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, równa się ilości zgoła Algebraicznej.

106. Daymy teraz, że dwie ilości dwuflowne, wchodzące w różniczkę o których tu mowa, mają różnych wykładników; tak że różniczkę zadaną byłoby $hx^s dx (a + bx^n)^r$, a różniczkę do której pierwsza ma być doprowadzona, byłoby $x^m dx \times (a + bx^n)^p$, gdzie p rozumie się mieć wartość liczebną mniejszą od r . Jeżeli r jest ilością twierdzącą, to trzeba przemienić różniczkę $hx^s dx \times (a + bx^n)^r$, na tę, $hx^s dx (a + bx^n)^{r-p} \times (a + bx^n)^p$. Natenczas, jeżeli $r-p$, będzie liczbą całą twierdzącą, to można ilość $hx^s dx (a + bx^n)^{r-p}$

$(a \pm bx^n)^p$ rozłożyć w rząd wyrazów takiéy postaci: $A'x^s \pm B'x^{s+n} \pm C'x^{s+2n} \pm \text{t.d.}$ $dx (a \pm bx^n)^p$, z których każdy może bydź naprowadzony do ilości, $x^m dx (a \pm bx^n)^p$ w sposób poprzedzający, jeżeli $m-n$ jest rozdzielné przez n ; żeby zaś do niéy naprowadzić całe wyrażenie, trzeba sobie postąpić słowo w słowo tak, iak przepisało się w tym sposobie, rozumiejąc przez t ilość którą oznaczyliśmy przez s , naywiększego wykładnika głoski x , w złożonéy wartości tego wyrażenia, $hx^s dx (a \pm bx^n)^{r-p}$

Np. gdyby trzeba było, ilość $\int x^2 dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ naprowadzić do ilości $\int dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$; przemienilibym $\int x^2 dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ na $\int x^2 dx (bb - xx) (bb - xx)^{-\frac{1}{2}}$, albo na $\int (bbx^2 dx - x^4 dx) (bb - xx)^{-\frac{1}{2}}$, a natenczas, zamiast s powiniénem tu wziąć 4. Robię tedy stósownie do przepisanego sposobu, $\int (bbx^2 dx - x^4 dx) (bb - xx)^{-\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{1}{2}} (Ax \pm Bx^3) \pm \int R dx (bb - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

Gdyby przeciwnie wartość głoski r wypadła przecząca, to różniczkę do której zadana różniczka ma bydź naprowadzona, trzebaby przygotować sobie w tén sposób, $x^m dx (a \pm bx^n)$

$bx^n)^{p-r} \times (a \pm bx^n)^r$; gdzie jeżeli $p-r$ będzie liczbą całą, (bo twierdzącą koniecznie bydź musi; gdyż r rozumié się ilością przeczącą, i większą od p , niechayby było p iakie chce), to ilość $x^m dx (a \pm bx^n)^{p-r}$, $(a \pm bx^n)^r$ można rozłożyć w rząd okréślony wyrazów, takiéy postaci: $(A'x^m \pm B'x^{m+n} \pm C'x^{m+2n} \pm \text{t.d.}) (a \pm bx^n)^r$. A natenczas trzeba sobie postąpić tak, iak gdyby rzecz szła o naprowadzenie téy rozłożonéy ilości, do postaci ilości, $x^s dx (a \pm bx^n)^r$ to jest, że trzeba postąpić sobie w sposób właśnie podobny tamtemu, co przepisał się do przypadku, w którym r było twierdzące.

Np. gdyby trzeba było naprowadzić ilość $\int gx^{-2} dx (aa \pm xx)^{-2}$ do tego wyrażenia $\int dx (aa \pm xx)^{-1}$ albo $\frac{dx}{aa \pm xx}$, którego całką podług (86), jest łuk koła, mającego x za styczną a a za promień; przemienilibym $\int dx (aa \pm xx)^{-1}$ na $\int (aa \pm xx) dx (aa \pm xx)^{-2}$; a że naymniéyszym wykładnikiem głoski x , położonéy zewnątrz ilości dwusłownéy, $aa - 2$, więc rozumiéć będę $\int R(aa \pm xx) dx (aa \pm xx)^{-2} = (aa \pm xx)^{-1} (Ax^{-1} \pm Bx) \pm \int gx^{-2} dx (aa \pm xx)^{-2}$; a wreszcie dokonczę iak wyżej, dla wynalezienia współczynników A , B , i R ; skąd po przedstawieniu, miałbym wartość ilości $\int gx^{-2} dx (aa \pm xx)^{-2}$, w którejto wartości naostatek przemienilibym $\int R(aa \pm xx) dx (aa \pm xx)^{-2}$ na $\int R dx (aa \pm xx)^{-1}$;

Gdyby $p-r$ niebyło liczbą całą, to naprowadzenie iednój różniczki do drugiej, niemogłoby mieć miéysca.

O uławkach niepiérwiaſtkowych (*rationnelles*).

107. **W**szelka ilość różniczkowa niepiérwiaſtkowa, zawsze może bydź ſcalkowana, albo Algebraicznie, albo przez łuki kołowe, albo przez logarytmy, albo przez te wszystkie trzy sposoby razem, albo téż tylko przez dwa z nich. Może zawsze bydź ſcalkowana Algebraicznie, kiedy w sobie niebędzie miała mianownika odmiennego, chybaby był iednoſłowny, a w takim razie, trzeba ieſzcze wyłączyć przypadek, kiedyby takowy mianownik znajdował ſię bydź wynieſiony do ſtopnia iedności. Niezoſtaie nam tedy tylko pokazać prawdę podania naszego w innych przypadkach; to ieſt, kiedy zadana różniczka ma mianownika niepiérwiaſtkowego, wieloſłownego.

Trzeba rozumieć że w liczniku ułamka różniczkowego zadanego, odmienna znajduje ſię w niſzszym ſtopniu iak w mianowniku. Gdyby

zaś

zaś tak niebyło; to możnaby ią do tego ſtanu przyprowadzić, dzieląc licznika przez mianownika póty, ażby zoſtający ſtopień zrobił ſię mniéyszym iak w mianowniku.

Np. gdybym miał ſcalkować $\frac{x^3 dx}{aa + 3ax + xx}$; rozdzieliłbym naprzód $x^3 dx$ przez $xx + 3ax + aa$; i miałbym na wieloraz xdx , a na reſztę $-3ax^2 dx - aax dx$; potém tę reſztę rozdzieliłbym znowu przez tegoż mianownika, i miałbym na wieloraz $-3adx$; a na reſztę $+8a^2 x dx + 3a^3 dx$; a dopiero zamiast $\frac{x^3 dx}{aa + 3ax + xx}$, wziąłbym $xdx - 3adx + \frac{8a^2 x dx + 3a^3 dx}{aa + 3ax + xx}$.

Zeby dóyſdź ſposobu, w jaki mogli byſmy ſcalkować ułamki różniczkowe, niepiérwiaſtkowe, przypomniemy sobie, że ponieważ różniczką logarytmu odpowiadającego iakiéy ilości, ieſt różniczka téżże ilości, rozdzielona przez téż ſamę ilość, to ieſt ponieważ zawsze ieſt ułamkiem, przeto naturalnie dorozumiewać ſię można, że ſcalkowanie uławków niepiérwiaſtkowych, może częſtokroć zależeć od Logarytmów. Weźmy na przykład, $2a \log. (a + x) - 2a \log. (2a + x)$; zróżniczkowawſzy mieć będiem, $\frac{2adx}{a+x} - \frac{2adx}{2a+x}$, albo (przywiódſzy do ſpólne-go mianownika) $\frac{2aadx}{2aa + 3ax + xx}$. Lecz iawna ieſt, iż ażeby ſcalkować tén ułamek, nie trzeba tylko rozłożyć go na dwa ułamki, z którychby ieden miał za mianownika

Tom III.

M

a

$a+x$, a drugi, $2a+x$, a w których liczniki, byłyby liczbami statecznemi rozmnożonemi przez dx ; a zatem te dwa ułamki, mogą być scałkowane przez logarytmy.

108. Mając tedy całkować ułamki tego rodzaju, rzecz naturalna że trzeba próbować, rozłożyć je na tyle ułamków osobnych, ile może mieć czynników mianownik, i z których każdy miałby za mianownika jednego z takowych czynników, i w rzeczy samej zawsze tego sposobu trzymać się należy, kiedy wszystkie czynniki, z których mianownik mógł być złożony, będą nierówne.

109. Ale jeżeli między czynnikami składającymi mianownika, znajdować się będą niektóre równe sobie, to w takim razie, nie trzeba sobie obiećować, żeby się udał ten sposób; bo natenczas całkowanie niebędzie zależyc od samych logarytmów. Jakóż,

gdybyśmy mieli np. ułamek $\frac{dx}{(a+x)^2}$, w

którym mianownik składa się z dwóch równych czynników $a+x$ i $a+x$; znaleźliśmy podług (66), że całką téj ilości, albo ilości $dx(a+x)^{-2}$ która równa się pierwszej, byłoby $-(a+x)^{-1} + C$; wyrażenie wcale niezależące od logarytmów. Lecz oraz iawna jest, że gdybyśmy zróżniczkowali ilość taką, iak $\frac{aa}{a+x} + 2a \frac{(a+x)}{aadx} + \frac{2adx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{a+x}$

$2a(2a+x)$, mielibyśmy $-\frac{aa}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{a+x}$

$+ \frac{2adx}{2a+x}$ albo $\frac{(aa+2ax)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x}$, albo (przywiódłszy wszystko do spólnego mianownika), $\frac{4ax^2dx + 9a^2xdx + 4a^3dx}{(a+x)^2(2a+x)}$; ilość,

której całka, oczywiście musi zawierać w sobie ilość Algebraiczną i ilości logarytmowe. Lecz żeby powrócić nazad do téj całki, trzeba by różniczkę powrócić po-

stać poprzedzającą, $\frac{aa+2ax}{(a+x)^2} dx + \frac{2adx}{a+x}$, to

jest rozłożyć ją na dwa ułamki, z których pierwszy, miałby za mianownika wszystkich czynników równych, a w liczniku wszystkie stopnie głoſki x , ażeby były niższe od najwyższego stopnia téż głoſki w mianowniku; drugie zaś ułamki, każdy z nich, powinny mieć za mianowników czynniki nierówne, a w licznikach trzeba ażeby x nie było do żadnego stopnia podniesione. Al-

bowiem natenczas, wyraż $\frac{aa+2ax}{(a+x)^2} dx$, scał-

kuje się łatwo, podług reguł podanych, a wyraż $\frac{2adx}{a+x}$ scałkuje się przez logarytmy.

Zawsze zaś można w ten sposób rozłożyć każdy ułamek niepiętrałkowy; a zatem téż zawsze tak czynić będiem, przynajmniej ile razy w mianowniku niebędzie zmyślonych czynników; przypadek w który wéyżrzemy na inſzém miéyſcu.

I tak daymy, że $\frac{(a+bx+cx^2+\dots+kx^{n-1})dx}{M+Nx+Px^2+\dots+Tx^n}$

wyraża w powſzechności wszelki ułamek niepiętrałkowy; jeżeli przypuścimy, że

M 2

mia-

mianownik ma liczbę m czynników, równających się ilości $x + g$, a liczbę p czynników równających się ilości $x + h$, i. t. d. i liczbę jakiegokolwiek czynników nierównych, oznaczonych przez $x + i$, $x + q$, $x + r$, i. t. d.; w którymto razie ułamek zadany, przemieniliby się na

$$(a + bx + cx^2 + \dots + kx^{n-1})dx$$

$(x+g)^m (x+h)^p \times \text{i. t. d.} \times (x+i) (x+q) (x+r) \times \text{i. t. d.}$
to żeby scałkować ten ułamek, trzeba rozumieć

$$(a + bx + cx^2 + \dots + kx^{n-1})dx$$

$$(x+g)^m (x+h)^p \times \text{i. t. d.} \times (x+i) (x+q) (x+r) \times \text{i. t. d.}$$

$$\frac{Ax^{m-1}dx + Bx^{m-2}dx + \dots + Rdx}{(x+g)^m}$$

$$+ \frac{Ax^{p-1}dx + Bx^{p-2}dx + \dots + Rdx}{(x+h)^p} \dots \text{i. t. d.}$$

$$+ \frac{Ldx}{x+i} + \frac{Mdx}{x+q} + \frac{Ndx}{x+r} \dots \text{t. d., gdzie } A,$$

B, C , i. t. d., rozumieją się być spólczynnikami statecznemi nieokreślonymi. Natenczas, byleby jakimkolwiek bądź sposobem naznaczyć wartość takowych spólczynników, to łatwo będzie można mieć całkę zadanej ilości. I to jest oczywista względem ułam-

$$\text{ków } \frac{Ldx}{x+i}, \frac{Mdx}{x+q}, \frac{Ndx}{x+r}, \text{ i. t. d. których całka}$$

mi są $Ll(x+i)$, $Ml(x+q)$, $Nl(x+r)$, i. t. d.; co zaś dotyczy się ułamków

$$\frac{Ax^{m-1}dx + Bx^{m-2}dx + \dots + Rdx}{(x+g)^m}, \text{ w tych,}$$

dla prościęjszego wyrażenia, trzeba zrobić $x+g=z$, skąd będzie $x=z-g$, a $dx=dz$. Po-

Położywszy te wartości zamiast pierwszych, całe wyrażenie przemieni się w rząd ilościów jednoślownych, dających się łatwo scałkować, spomiędzy których tylko jeden będzie takię postaci $\frac{dz}{z}$, to jest całkujący się przez

logarytmy. Podobnież w ułamkach $\frac{Ax^{p-1} + Bx^{p-2} + \dots + Rdx}{(x+h)^p}$, trzeba by

zrobić $x+h=z$.

A zatem niezostało nam tylko dwie rzeczy do rozebrania; pierwsza, iak wynaydują się czynniki składające mianownika zadanego ułamka różniczkowego; a druga iak wynaydują się spólczynniki nieokreślone.

III. Zeby wynaléśdź czynniki składające mianownika, trzeba sobie tak postąpić, iak w rozwiązaniu zrównania, którebyśmy mieli; zrównawszy tegóż mianownika z zerem; bo podług (Alg. 143), rozwiązać zrównanie, jest to szukać czynników dwuślownych, z których rozmnożenia, to zrównanie powstało.

III. Co zaś do sposobu wynaleziénia spólczynników A, B, C , naynaturalnię zdaie się, żeby wszystkie ułamki, w które wchodzi takowe czynniki, przywiéśdź do mianownika spólnego; bo natenczas, ponie-

waż obie części zrównania powsta-
jącego z ułamka zadanego i z tych
nowych ułamków, mieć będą spól-
nego mianownika, przeto można
będzie odrzucić go z obu części; a
przeławiwszy wszystko do iednój
części, ażeby zrównanie miało mié-
fće, (bez żadnego względu na wár-
tość głoſki x , iakażkolwiek byłaby
takowa wartość), trzeba ażeby sum-
ma wyrazów mnożących iedenże
stopień głoſki x , była zerem. Tén
warunek da tyle zrównań, ile będzie
spółczynników nieokreślonych, z
których wyciągnie się wartość tych-
że czynników. Zobaczmy to w
przykładach.

Daymy, że ma bydź scałkówna ilość
 $\frac{dx}{aa-xx}$; ruzumiéć będiém $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{A dx}{a+x} + \frac{B dx}{a-x}$,
bo dwóma czynnikami składającé-
mi mianownika $aa-xx$, są $a+x$ i $a-x$.
Naténczas, przywiódłszy wszystko do spól-
nego mianownika, będzie $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{(Aa - Ax + Ba + Bx) dx}{aa-xx}$,
a wyrugówawszy
spólnego mianownika, rozdzieliwszy przez dx ,
i przeławiwszy będzie $\begin{cases} 1 + Ax \\ -Aa - Bx \\ -Ba \end{cases} = 0$;

więc $1 - Aa - Ba = 0$, i $A - B = 0$; skąd fa-
two wnoſi się $A = \frac{1}{2a}$, i $B = \frac{1}{2a}$; a zatém bę-

dzie $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{\frac{1}{2a} dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{2a} dx}{a-x}$; ilość, któ-
rą całką iest $\int \frac{dx}{aa-xx} = \frac{1}{2a} \log(a+x) - \frac{1}{2a}$

$\log(a-x) + C = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C$.

Obierzmy sobie na drugi przykład, ułamek
 $\frac{4axx + 9a^2x + 4a^3}{(a+x)^2(2a+x)} dx$, który nam dało (109)

zróżniczkowanie ilości $\frac{aa}{a+x} + 2a \log(a+x)$
+ $2a \log(2a+x)$. Rozumiéć tedy będiém,
 $\frac{4axx + 9a^2x + 4a^3}{(a+x)^2(2a+x)} dx = \frac{Ax + B}{(a+x)^2} dx + \frac{C dx}{2a+x}$;
przywiódłszy wszystko do spólnego miano-
wnika, a potém po wyrugowaniu takowe-
go spólnego mianownika, po rozdzieleniu
przez dx , i po poprzestawieniu, będzie

$$\left. \begin{aligned} 4ax^2 + 9a^2x + 4a^3 \\ - Ax^2 - Aax - 2Ba \\ - Cx^2 - Bx - Caa \\ - 2aCx \end{aligned} \right\} = 0;$$

więc $4a - A - C = 0$, $9a^2 - 2Aa - B$,
 $- 2aC = 0$, $4a^3 - 2Ba - Caa = 0$; skąd wy-
ciąga się $A = 2a$, $B = 2a^2$, $C = 2a$; tak iż
zadana różniczka, przemieni się w tę,
 $\frac{2ax + aa}{(a+x)^2} dx + \frac{2a dx}{2a+x}$; gdzie ostatniego wy-
razu całką, oczywiſcie iest $2a \log(2a+x)$.
Co zaś dotyczyé się pierwszego wyrazu, ro-
bię $a+x = z$, i mam $x = z - a$, a $dx = dz$.
M 4 Któ-

Które to wartości położywszy w wyrażeniu $\frac{2ax + aa}{(a + x)^2} dx$, mieć będziemy, $\frac{2az - aa}{xz} dz$, albo $\frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{xz}$; ilość, której całką jest $2a \log. z + \frac{aa}{z}$, albo $2al(a + x) + \frac{aa}{a + x}$; więc na zupełną całkę będzie, $\frac{aa}{a + x} + 2a \log. (a + x)$, $2a \log. (2a + x)$, tak iak by być powinno.

112. Tén sposób jest powszechny. Ale wynaydowanie spółczynników, iefzcze wielorako ułatwić sobie można. Np. uważając czynniki ułamków prostych, bez względu iednych na drugie, można mieć takowe czynniki w tén sposób. Niechay będzie $\frac{Ndx}{M}$ dany ułamek; $hx + a$ niechay będzie iednym z czynników składających mianownika, a P niechay będzie wielorazem, wynikającym z rozdzielenia ilości M przez $hx + a$. Zmyślmy sobie $\frac{Ndx}{M}$, rozłożone na $\frac{Adx}{hx + a} + \frac{Qdx}{P}$, albo $\frac{N}{M} = \frac{A}{hx + a} + \frac{Q}{P}$; natenczas, przywiódłszy wszystko do spólnego mianownika, i pomniąc

na owo przypuszczenie że $P = \frac{M}{hx + a}$, albo $PX(hx + a) = M$, będzie $N = AP + Q(hx + a)$. Zróżniczkowawszy zrównanie $(hx + a)P = M$, mieć będziemy $hPdx + (hx + a)dP = dM$.

Lecz że to zrównanie, iako téż i zrównanie $N = AP + Q(hx + a)$, zawsze powinny mieć miéysce, niechayby było x iakie chce, więc głosząc x możemy tu dać wartość iaka nam się spodoba. Obierzmy sobie tedy taką, któraby dała nayprościéyszy wypadek; to iest położmy zamiast x ,

wartość $-\frac{a}{h}$, wynikającą z tego przypuszczenia, że mianownik $hx + a = 0$; skąd mieć będziemy $hPdx = dM$ i $N = AP$. Położywszy w drugim zrównaniu wartość $P = \frac{dM}{hdx}$, wyciągniętą z pierwszego, będzie

$A = \frac{hNdx}{dM}$; to iest, że ażeby mieć licznika

A , iednego któregokolwiek z ułamków prostych, trzeba rozdzielić licznika Ndx ilości zadanej, przez różniczkę dM mianownika téżże ilości, a położywszy zamiast x wartość iego, wypadającą stąd, kiedy mianownik ułamka prostego zrówna się z zerem, trzeba wszystko rozmnożyć, przez spółczynnika głoski x , znaydujący się w tymże mianowniku prostym.

Np. żeby mieć liczniki A i B , ułamków $\frac{Adx}{a + x} + \frac{Bdx}{a - x}$, na które wyżey rozłożył się

się był ułamek $\frac{dx}{aa - xx}$; różniczkuję naprzód mianownika $aa - xx$, i mam, $-2xdx$; potem dzielę licznika dx ilości zadanej przez $-2xdx$, co mi daie $-\frac{1}{2x}$; gdzie kładąc ko-
leyno zamiast x , $-a$ i a , (wartości, wypa-
dające po zrównaniu z zerem każdego z
mianowników $a+x$ i $a-x$, należących do
ułamków cząstkowych) i rozmnożywszy
przez wartości 1 i -1 , głoski h , znajdę na
wartość liczników A i B , te ilości $\frac{1}{2a}$ i $-\frac{1}{2a}$, iak
było wyżej.

Możnaby też podobnie naznaczyć re-
guły powszechne, na wynalezienie czynni-
ków mnożących liczniki ułamków cząstko-
wych, mających za mianownika mnogość
złożoną z pierwiastków równych; ale to
pomijamy.

113. Lubo reguły dopiero
przepisane do całkowania ułamków
niepierwiastkowych, są powszechne,
atoli kiedy niektóre z czynników
składających mianownika, będą ilo-
ściami zmyślonemi, to i całka bę-
dzie złożona z ilościów zmyślonych,
która niemniéj przeto będzie rze-
telna, ale niezawsze wygodnie da
się naprowadzić do postaci rzete-
lnej; w takim razie, trzeba naprzód
wyciągnąć z mianownika wszystkie
czynniki rzetelne, a potem resztę

10-

rozłożyć na czynniki, nieiuż pier-
wszego stopnia, ale drugiego, które
zawsze są rzetelne. A natenczas na
odpowiadanie każdemu czynnikowi
drugiego stopnia, (który zawsze mo-
że być wyrażony przez $ax^2 + bx + c$), składa się ułamek takiéy po-
staci, $\frac{Axdx + bdx}{ax^2 + bx + c}$, a na reszcie czyn-
niki wynayduią się iak wyżej.

Np. gdyby do całkowania był za-
dany ułamek $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3}$; znalazłbym naprzód,
zrównawszy z zerem mianownika $a^3 - x^3$,
że $a - x$, jest jednym z czynników jego;
a potem rozdzieliwszy $a^3 - x^3$ przez
 $a - x$, miałbym na wieloraz $a^2 + ax + x^2$,
ilość, zawierającą w sobie inne dwa czyn-
niki; lecz zrównawszy ją z zerem, dla wy-
nalezienia takowych czynników, po odby-
tém działaniu pokazałoby się, że są zmyślane.
Zaczém niekuszając się o rozłożenie ilości
zadanej na trzy ułamki, mające za miano-
wniki, trzy czynniki składające ilość $a^3 - x^3$,
rozkładam ją tylko na dwa ułamki, z których
jeden, miałby za mianownika, jednego z czyn-
ników to jest $a - x$, a drugi drugiego, to jest
 $a^2 + ax + x^2$; a po takowém rozłożeniu, ro-
bie $\frac{x^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{A dx}{a - x} + \frac{B x dx + C dx}{a^2 + ax + x^2}$. Przy-
wiódłszy wszystko do spólnego mianowni-
ka, rozdzieliwszy przez dx , i przedstawivszy,
będzie $\left. \begin{array}{l} a^4 - Aax - Ax^2 \\ - Aa^2 + Cx + Bx^2 \\ - Ca - Bax \end{array} \right\} = 0$.

Zrównawszy z zerem sumę wyrazów mnożących iedenże stopień gloski x , będzie $B - A = 0$, $C - Aa - Ba = 0$, $a^4 - Aa^2 -$

$$Ca = 0; \text{ skąd wyciąga się } A = \frac{a^2}{3}, B = \frac{a^2}{3},$$

$$C = \frac{2a^3}{3}. \text{ A zatem będzie } \frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{\frac{a^2}{3} dx}{a - x}$$

$+ \frac{\frac{a^2}{3} x dx + \frac{2a^3}{3} dx}{a^2 + ax + x^2}$. Całka pierwszego z dwóch ułamków składających drugą część zrównania, jest oczywista stąd co poprzedziło; drugiego zaś ułamku całka, znajdzie się podług tego co następuje.

114. Jeżeli pomiędzy czynnikami drugiego stopnia, znajdować się będą niektóre równe sobie, to na odpowiadanie każdej wiązce czynników równych, trzeba złożyć ułamek takiej postaci,

$$\frac{Ax^{2n-1} dx + Bx^{2n-2} dx + \dots Q dx}{(ax^2 + bx + c)}, \text{ gdzie}$$

n oznacza liczbę czynników $ax^2 + bx + c$, równych sobie.

Np. gdyby było zadano do całkowania, $\frac{x^4 + 5ax^3 + 4a^2x}{(aa + ax + xx)(x^3 - a^3)} dx$; znaleźli-

byśmy, że mianownik może być rozłożony na te trzy czynniki, $x - a$, $x^2 + ax + a^2$, i $x^2 + ax + a^2$. Niekusząc się o rozłożenie tych ostatnich czynników na czynniki proste, które wypadłyby zmyślane, trzeba je wziąć do użycia takie iakie wynikiły z pier-

pierwszego rozłożenia; ale że są sobie równe, przeto zamiast dania ich z osobna za mianowniki dwóm ułamkom, daę mnogość ich $(x^2 + ax + a^2)^2$ za mianownika tylko jednemu ułamkowi, w którego liczniku wszystkie stopnie gloski x , byłyby niższe od najwyższego stopnia téżże gloski położony w mianowniku; to jest, iak w niniejszym przykładzie gdzie najwyższym stopniem gloski x w mianowniku jest x^4 , wszystkie stopnie téżże gloski x w liczniku powinny być niższe od x^4 . A za-

$$\text{tém rozumieć będziemy } \frac{Ax^3 dx + Bx^2 dx + Cx dx + D dx + E dx}{(x^4 + 5ax^3 + 4a^2x^2)(x^3 - a^3)}$$

$$= \frac{Ax dx}{x - a} + \frac{Bx^2 dx + Cx dx + D dx + E dx}{(aa + ax + xx)^2},$$

a wynalazłszy współczynniki w sposób wzwyż przepisany, zadana ilość całkuje się iak następuje.

115. Teraz niezoście nam więcej, tylko pokazać iak całkują się takowe ilości. Powróćmy na przód do pierwszój, która była, $\frac{Ax dx + B dx}{ax^2 + bx + c}$. Rozumiemy ją, dla

prostsze wyrażenia, przyprowadzoną do téj postaci, $\frac{A'x dx + B' dx}{x^2 + a'x + b'}$,

co zawsze może być wykonano, rozdzieliwszy górą i dolęm przez a . Potem, trzeba wyrugować drugi wyraz mianownika, zrobiwszy $x + \frac{1}{2}a' = z$, skąd będzie $x = z - \frac{1}{2}a'$,

a $dx = dz$; położywszy te wartości w pierwszym wyrażeniu, wypadnie ilość téj postaci, $\frac{Cxdz + Ddz}{xx + qq}$; któręj pierwsza część $\frac{Cxdz}{xx + qq}$, całkuje się przez logarytmy (99); a druga przez łuk koła, którego promieniem byłoby q , a stycznią z .

Co zaś dotyczy się ilościów téj postaci $Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \dots Qdx$; w

tych trzeba także wyrugować drugi wyraz z mianownika, skąd wyniknie ilość takiej postaci, $\frac{Mx^{2n-1}dz + Nx^{2n-2}dz + \dots Tdz}{(xx + qq)^n}$,

która całkuje się, usiłując naprowadzić całą summy wyrazów w których x ma wykładniki parzyste, usiłując je mówić naprowadzić do tego wyrażenia $\frac{dz}{xx - qq}$ podług

(103). Wyrazy zaś, w których wykładniki głośki z byłyby nieparzyste, całkują się podług przepisów wyżey danych (68). A tak wszelki ułamek niepiérwiastkowy, albo może być całkowany doskonale, albo też nawięcey kiedy zależy od łuków kołowych i od logarytmów.

O niektórych przemianach ułatwiających całkowanie.

116. W téj materji niemożna podać reguł powszechnych. Wéy-

Wéyżrzenie na ilości, wprawa, i zručność, powinny w każdéj okazyi nauczyć co trzeba czynić. Zamiar przemian o których tu mówimy, jest ten, ażeby zadane różniczki zrobić niepiérwiastkowemi; bo te już wiemy iak się całkują. Do czego mogą służyć następujące uwagi.

117. Jeżeli ilości piérwiastkowe są tylko jednoślowne, to naprzód trzeba im dać postać ilościów mających wykładniki ułamkowe, które potem wszystkie przyprowadzają się do spólnego mianownika. Na-

temczas, jeżeli $x^{\frac{k}{l}}$ wyraża iednę z ilościów

przygotowanych, to trzeba zrobić $x^{\frac{1}{l}} = z$;

skąd wypadnie $x = z^l$, a $dx = lz^{l-1}dz$. Położywszy takowe wartości zamiast piérwszych, zadana ilość piérwiastkowa, przemieni się w niepiérwiastkową.

Np. gdyby mi była zadana różniczka

$$\frac{dx \sqrt{x} + adx}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}; \text{ napisałbym ją tak } \frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{2}} + x^{\frac{1}{2}}};$$

potem przemieniłbym ją w tę $\frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{2}{6}}}$.

Zrobiwszy tedy $x^{\frac{1}{6}} = z$; miałbym $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$; a zatem $\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^2}$, ilość, któ-

ra wychodzi na $\frac{6z^5dz + 6az^2dz}{z + 1}$, i łatwo

da

da się scałkować podług tego co przepisało się względem ułamków niepiérwiałkowych.

118. Wszelka ilość, w której nieznayduie się tylko ieden piérwiałtek wielosłowny, nieprzechodzący drugiego stopnia, i w której głoska odmienna, położona pod znakiem piérwiałkowym, podobnież nieprzechodzi drugiego stopnia, takowa mówię ilość, może zawżze przemienić się na ilość niepiérwiałkową, iednym z dwóch sposobów następujących. 1^o Oswoobodziwszy kwadrat odmienny położony pod znakiem piérwiałkowym, trzeba zrównać ténże piérwiałtek z tą odmienną, pomnożoną albo zmniejszoną o inną głoskę także odmienną. 2^o Albo téż, ilość okryta znakiem piérwiałkowym, rozkłada się na dwa czynniki; a tak rozłożona równa się z iednym z tych dwóch swoich czynników, rozmnożonym przez nową odmienną.

Np. gdybym miał $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, mógł zrobić $\sqrt{(xx-aa)} = x-z$; skąd miałbym $\frac{xx+aa}{2z}$; więc $dx = \frac{(xx-aa)dz}{2xz}$, a $\sqrt{(xx-aa)} = \frac{aa-zx}{2z} = -\frac{(zx-aa)}{2z}$; a zatem

$$\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = -\frac{dz}{z}, \text{ ilość łatwa do scałkowania.}$$

Mógłbym téż w tymże przykładzie, zrobić, $\sqrt{(xx-aa)}$, albo $\sqrt{[(x-a)(x+a)]} = (x-a)z$; a natenczas skwadrówawszy, i rozdzieliwszy przez $x-a$, miałbym $x+a = (x-a)z$; skąd wnosi się $x = \frac{a+az}{z-1}$;

$$\sqrt{(xx-aa)} = \frac{2az}{z-1}; dx = \frac{-4azdz}{(z-1)^2}; \text{ więc}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{-2dz}{z-1}, \text{ ilość, która całkuje się podług reguł wzwyż przepisanych do ułamków niepiérwiałkowych.}$$

Te sposoby możnaby przyścisłować do sprostowania parabol, które składka $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, iest, $\sqrt{(dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{p})}$, albo $dy \sqrt{(1 + \frac{4y^2}{p^2})}$. W tém wyrażeniu, trzeba naprzód oswoobodzić y^2 , pisząc $\frac{2dy}{p} \sqrt{(\frac{p^2}{4} + y^2)}$, a potem zrobić $\sqrt{(\frac{p^2}{4} + y^2)} = y+z$.

119. Kiedy w ilości zamkniętej pod znakiem piérwiałkowym, niema drugiego wyrażu, to piérwiałtek można zrównać z nową odmienną, rozmnożoną przez piérwiałną odmienną.

Np. gdybym miał $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; mógłbym zrobić $\sqrt{(aa-xx)} = xz$. A choćby

w pierwiastku znajdował się i drugi wyraz, to jeszcze możnaby użyć téj przemiany, wyrugowawszy wprzód takowy drugi wyraz.

120. Naostatek, dla doświadczenia, czy zadana ilość nie dałaby się przemienić w niepiérwiastkową, można próbować, i zrównać niewiadomą, lub iakikolwiek związek nie wiadomý, z nową odmienną albo z iakim związkiem nowéj odmiennéj, w którój zostać się powinno co nieokreślonego, służyć mającego do zamiaru naszego.

Np. chcąc wiedzieć, w iakich przypadkach ilość $x^m dx (a + bx^n)^p$, może być przemieniona w niepiérwiastkową; zrobilibym $(a + bx^n)^p = z^q$, (gdzie, q , rozumie się być ilością nieokreśloną); skąd miałbym $a + bx^n$

$$= z^{\frac{q}{p}}; x^n = \frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}; x = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}; x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}}; dx = \frac{q}{npb} z dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{1}{n} - 1};$$

$$\text{więc } x^m dx (a + bx^n)^p = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} + q - 1} \times$$

$$dz \cdot \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1}, \text{ ilość, która mo-}$$

że byź scalkowana, niech będzie q iakie chce, byleby $\frac{m + \frac{1}{n}}{n} - 1$, było liczbą całą twierdzącą albo zerém; i która byź może przemieniona w niepiérwiastkową, zrobiwszy $q = p$, kiedy będzie $\frac{m + \frac{1}{n}}{n} - 1$, liczbą całą przeczącą. A ieżeliby wartością głoski p było $\pm \frac{k}{2}$, gdzie przez k rozumie się liczba cała nieparzysta, to możnaby ilość naprowadzić do przypadku wyżéj wzmiankowanego (118), zrobiwszy $q = k$, ieżeli $\frac{m + \frac{1}{n}}{n}$, ma na wartość $\pm \frac{k'}{2}$, gdzie k' rozumie się byź liczba cała nieparzysta.

121. Niemyślimy tu zabawiać się dłużéj przemianami tego rodzaju, uważmy tylko, że częstokroć można ułatwić pewne całkowania, zrównawszy odmienną z ułamkiem takim, iak $\frac{1}{z}$.

Np. gdybym miał $\frac{x^{15} dx + a dx}{x^{20} + x^{18}}$; zrobi-

wszy $x = \frac{1}{z}$, miałbym $\frac{-z^3 dz - a z^{18} dz}{1 + z z}$,

ilość, dająca rozłożyć się w rząd ilości iednostownéj, przez rozdzielenie, i napro-

wadzić się do takiéj postaci $\frac{Adz}{1 + z z}$, którój

całkę iuż teraz mamy znaną.

O całkowaniu ilościów wykładniczych.

122. **D**o całkowania ilościów tego rodzaju, niemamy innych reguł, iak tylko próbować ażeby je rozłożyć na dwa czynniki, z których jeden byłby różniczką logarytmu drugiego czynnika, albo był iaką częścią jego stateczną (28); a natenczas trzeba rozdzielić przez różniczkę logarytmu tego drugiego czynnika.

I tak widzę, że $xy \left(dylx + \frac{ydx}{x} \right)$, da się całkować; bo czynnik $dylx + \frac{ydx}{x}$, jest różniczką wyrazu ylx , który jest logarytmem ilości xy ; mieć tedy będę na całkę:

$$\frac{xy \left(dylx + \frac{ydx}{x} \right)}{d(lxy)} + C; \text{ to jest } x \frac{y \left(dylx + \frac{ydx}{x} \right)}{dylx + \frac{ydx}{x}}$$

+ C, albo $xy + C$. Taż sama reguła uczy mnie, że $dx e^{ax}$ może być całkowane; bo dx jest różniczką logarytmu ilości e^{ax} , rozdzieloną przez ilość stateczną. Mić tedy będę, $\int dx e^{ax} = \frac{dx e^{ax}}{adxle} = \frac{e^{ax}}{ale}$. W ten czas zaś kiedy e jest liczbą mającą za logarytm 1, reguła wychodzi na rozdzielenie różniczki zadanej, przez różniczkę wykładnika głośki e .

Gdy

Gdyby było zadano do całkowania $x^m dx e^{ax}$, gdzie e rozumie się być liczbą mającą za logarytm 1, można to wykonać, jeżeli m jest liczbą całą twierdzącą, zrobiwszy $\int x^m dx e^{ax} = e^{ax} (Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2} + \dots + t.d. + k)$. Np. mając $x^2 dx e^{ax}$, robię $\int x^2 dx e^{ax} = e^{ax} (Ax^2 + Bx + E)$. Zróżniczkowawszy (28), i rozdzieliwszy przez $dx e^{ax}$, będzie $x^2 = \frac{Aax^2 + aBx + aE}{1 + 2Ax + B}$; więc $Aa = 1$, $aB + 2A = 0$, $aE + B = 0$; to jest $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{2}{a}$, $E = \frac{2}{a^2}$; więc całką

ilości $\int x^2 dx e^{ax}$, jest $e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + C$.

Liczby e , mającý za logarytm 1, można użyć bardzo pożytecznie do całkowania wielu ilościów, osobliwie tych, co zawierają w sobie logarytmy.

Np. gdybym miał $x^n dx (lx)^m$, zrobiłbym $lx = z = zle$; więc $x = e^z$, $dx = dz e^z$; a zatem $x^n dx (lx)^m = z^m dz e^{(n+1)z}$, ilość, która może być całkowana, w tymże przypadku i tymże samym sposobem, co poprzedzająca.

O całkowaniu ilościów o dwu lub więcej Odmiennych.

123. **P**rzypomniawszy sobie regułę wyżej przepisaną, do różniczkowania ilościów z wielą odmiennymi, łatwo z nię wnieść sobie można, iż mając całkować ta-

N 3

ko-

ków różniczek z wielą odmiennymi (kiedy to jest rzeczą podobną), trzeba zgromadzić wszystkie wyrazy zawierające w sobie różniczkę iednąże odmienną, i scalkować je, iak gdyby niebyło innéy odmiennéy tylko ta, to jest iak gdyby wszystkie inne wyrazy były ilościami statecznymi. Natenczas, zróżniczkowawszy takową całkę, biorąc z kolei za odmienną, wszystkie odmienné, a wypadek odiaawszy od zadanéy różniczki, wynaleziona całka (przydawszy do niéy stateczną), będzie prawdziwą całką, jeżeli po odieciu nic niezostanie. Jeżeli zaś zostanie się reszta, to takowa już niebędzie zawierać w sobie téy odmiennéy, względem której całkowało się; z tą resztą potém, należy tak obéysdz się, iak w pierwszym razie, i tak dalej względem każdéy odmiennéy.

Np. gdybym miał $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$; wyciągnąłbym z téy ilości dwa wyrazy zawierające w sobie dx , to jest, $3x^2ydx + y^5dx$, i scalkowałbym je, iak gdyby y było stateczne; skąd miałbym $x^3y + y^5x$. Zróżniczkowawszy tę całkę względem x i y , a wypadek odiaawszy od różniczki zadanéy, nic mi niezostaie, skąd wnoszę, że szukaną całką jest $x^3y + y^5x + C$.

Gdy-

Gdybym miał $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xxdx + xdx + y^2dy$; zgromadziwszy wszystkie wyrazy zawierające w sobie dx , i scalkowawszy, biorąc y i z za stateczne, miałbym $x^3y + x^3z + \frac{x^2}{2}$. Lecz odiaawszy

różniczkę téy ilości, w którejby x , y i z poczytane były za odmienné, odiaawszy ją mówię od różniczki zadanéy, zostaié mi y^2dy ; biorę tedy całkę téy reszty y^2dy , to jest $\frac{y^3}{3}$, dodaię ją do pierwszéy całki, i mam na żadaną całkę (przydawszy stateczną), $x^3y + x^3z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$.

124. Lecz że niezawsze każda różniczka z wielą odmiennymi, da się scalkować, przeto nie od rzeczy będzie, przepisać tu znaki, służące do rozeznania kiedy to bydz może.

125. Tym końcem trzeba uważać, że jeżeli w ilości Q , powiązanéy czyli połączanéy iak się spodoba, z dwiema innemi ilościami x i y , położy się naprzód zamiast x ilość iakakolwiek p , a potém jeżeli w wypadku położy się zamiast y ilość q , rzecz wynidzie na to samo, iak gdyby naprzód położyło się było q zamiast y , a potém p zamiast x ; i to jest oczywiste.

126. Stąd następuje, że zróżniczkowawszy ilość iakakolwiek Q , złożoną z ilościów x , y i z statecznych,

N 4

cznych, niebiorąc naprzód tylko samo x za odmienną, a potem wynikły stąd wypadek znowu zróżniczkowawszy, niebiorąc tylko samo y za odmienną, rzecz wynidzie na to samo, iak gdyby w pierwszym różniczkowaniu, poczytało się było y za odmienną, a w drugim, x .

Jakóż zmyślny sobie, że położywszy naprzód $x + dx$ zamiast x , Q przemieniło się w Q' ; to na różniczkę wypadłoby $Q' - Q$. Zmyślny sobie znowu, że w tym wypadku, położywszy $y + dy$ zamiast y , Q' przemieniło się w Q'' , a Q przemieniło się w Q''' ; to tak że $Q' - Q$, zamieniło się w $Q'' - Q'''$, to na drugą różniczkę wypadłoby $Q'' - Q''' - Q' + Q$. Postąpmy sobie teraz w sposób odwrotny; a ponieważ położywszy $y + dy$ zamiast y , w ilości Q , Q przemieniło się w Q''' , więc na pierwszą różniczkę wypadnie $Q''' - Q$, biorąc y za odmienną. Teraz jeżeli w téj ilości położymy $x + dx$ zamiast x , Q przemieni się w Q' , iak wyżej; a Q''' (125) w Q'' , tak że $Q''' - Q$, zamięni się w $Q'' - Q'$; więc drugą różniczką będzie $Q'' - Q' - Q''' + Q$, ilość, właśnie taż sama co pierwéj.

To założywszy na przód, pozwólmy na to, że jeżeli A wyraża ilość składającą się z głosek x i y , to $\frac{dA}{dy} dy$, wyrażać będzie różniczkę ilości A , w którejby poczytało się za odmienną samo y ; a $\frac{dA}{dx} dx$, wyrażać znowu będzie różniczkę téjże ilości A , w któ-

którę poczytałoby się za odmienną samo x .

Podobnież $\frac{ddA}{dx dy} dx dy$ wyrażać będzie, że naprzód zróżniczkowała się ilość A , poczytując za odmienną samo x , a potem zróżniczkował się wypadek, poczytując w nim za odmienną samo y .

127. Na tych fundamentach, gdyby $Adx + Bdy$, była różniczką doskonałą, a M gdyby była iéy całką; to będzie $\frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy = Adx + Bdy$; więc $\frac{dM}{dx} = A$, a $\frac{dM}{dy} = B$; więc także $\frac{ddM}{dx dy} dy = \frac{dA}{dy} dy$; a $\frac{ddM dx}{dy dx} = \frac{dB dx}{dx}$; albo $\frac{ddM}{dx dy} = \frac{dA}{dy}$, a $\frac{ddM}{dy dx} = \frac{dB}{dx}$; lecz okazaliśmy dopiero wyżej (126), że $\frac{ddM dx dy}{dx dy} = \frac{ddM dy dx}{dy dx}$; więc $\frac{ddM}{dx dy} = \frac{ddM}{dy dx}$; więc także $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; to jest, że jeżeli $Adx + Bdy$ jest różniczką zupełną, to różniczką ilości A , w którejby poczytałoby się za odmienną y rozdzieliłoby się przez dy , powinna równać się różniczce ilości B , w którejby samo x poczytałoby się za odmienną, i rozdzieliłoby się przez dx .

I tak poznać, że $\frac{1}{2}y^2dx + xy^2dy$, jest różniczką zupełną; bo $\frac{d(\frac{1}{2}y^2)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$.
 Jakóż pierwsza część równania wychodzi na $\frac{y^2dy}{dy}$, a druga na $\frac{y^2dx}{dx}$. Przeciwnie wi-
 dzie, że $xydx + 2xdy$, nie da się scałkować;
 bo różniczką $\frac{d(xy)}{dy}$, nierówna się różnicze-
 $\frac{d(2x)}{dx}$.

128. Jeżeli w różniczkę zadaną wcho-
 dzi więcej nad dwie odmiennie, to jest, ie-
 żeliby była téj postaci, $A dx + B dy + C dz$,
 to ażeby takowa ilość mogła być scałko-
 wana, trzeba aby było $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Jakóż można uważać ko-
 lejno z , y i x jako stateczne, a różniczką
 która w takim razie nie miałaby tylko dwa
 wyrazy, (bo z pozwolenego przypuszczenia
 wynika albo $dz=0$, albo $dy=0$, albo też
 $dx=0$), ta różniczką mówię, niemniej po-
 winna być różniczką zupełną, jeżeli ro-
 żniczką zadaną jest taką; więc w każdym
 z tych przypadków, powinna mieć własno-
 ści różniczek zupełnych o dwu odmiennych.
 Podług tego, łatwo będzie wynaleść sobie
 warunki stosowne większej liczbie odmién-
 nych.

O równaniach różniczkowych.

129. **K**iedy zadane równanie ró-
 żniczkowe, niezawiera w
 sobie tylko dwie odmiennie x i y ; i
 kie-

kiedy w iednèy części równania
 znajduje się bydz położone x i dx ,
 a w drugiéy y i dy ; to natenczas cał-
 kowanie każdéy części wykonywa
 się, podług reguł przepisanych do
 różniczek z iedną odmienną.

I tak, gdyby było $ax^myndx = byqxr dy$;
 wyrażenie mogące nam oznaczać wszelkie
 równania różniczkowe o dwu wyrazach;
 to takowe równanie, w którém głoski nie-
 określone, zaraz oddzielaia się po rozdzie-
 leniu przez y^n i przez x^r , przemieni się w
 to, $ax^{m-r}dx = byq^{-n}dy$; a całką jego o-
 czywiście będzie $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{byq^{-n+1}}{q-n+1} + C$.

130. Ale ponieważ trafić się
 może, że iedna albo druga albo też
 obie części równania różniczkowe-
 go, mającego już w pominiony spo-
 sób oddzielone głoski odmiennie, nie-
 dadzą się scałkować Algebraicznie,
 lubo równanie może bydz Alge-
 braiczne, albo przynajmniej może
 bydz naprowadzone do postaci Al-
 gebraicznèy, przeto niebędzie od
 rzeczy zażtanować się tu nad temi
 przypadkami, które zdarzaią się -
 najczęściej.

Np.

Np. gdybyśmy mieli w równaniu poprzedzającym, $m-r=-1$, i $q-n=-1$, równanie różniczkowe wyszłoby na $\frac{adx}{by} = \frac{1}{x}$, którego każdej części niemożna mieć inaczej całki, tylko przez logarytmy, tak iż będzie $ax = by + lC$. * Lecz to równanie może przemienić się na Algebraiczne, napisawszy go tak, $lx^a = ly^b + lC$, albo $lx^a = lCy^b$; iawna zaś jest, że jeżeli dwa logarytmy są sobie równe, to i dwie ilości onym odpowiadające, muszą także być sobie równe; więc będzie $x^a = Cy^b$; równanie Algebraiczne.

Gdyby zaś było tylko $q-n=-1$, to równanie różniczkowe, wyszłoby na $ax^{m-r}dx = \frac{b dy}{y}$, którego całką jest $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = bly + lC$; ale temu równaniu można dać postać Algebraiczną, rozszywwszy pierwiastek część przez le , gdzie e oznacza liczbę mającą za logarytm 1; bo tym sposobem w równaniu nic się nieodmieni. Będzie tedy $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} le = bly + lC$, albo (zrobiwszy $m-r+1=p$), będzie $\frac{ax^p}{ax^p} le^p = lCy^b$; a zatem $e^p = Cy^b$. Odtąd zawsze oznaczać będziemy przez e , liczbę mającą za logarytm 1.

* Wolno nam jest, przydaną stałą rozumieć być logarytmem.

131. Obierzmy sobie na drugi przykład równanie $ndx = \frac{dz}{\sqrt{(1-zx)}}$; druga część wyraża składkę łuku kołowego, w którym z byłoby wstawą, a 1 promieniem; z tedy jest wstawą ilości $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zx)}}$, to jest ilości $\int ndx$, albo ilości $nx + C$. A zatem wypadnie na całkę, $z = \text{wst.}(nx + C)$. Takóż, z równania $ndx = \frac{-dz}{\sqrt{(1-zx)}}$, wniosłoby się $z = \text{dost.}(nx + C)$.

132. Podobnież, ponieważ $\frac{dz}{1+zx}$, wyraża składkę łuku kołowego, w którym z byłoby styczną, a 1 promieniem; więc gdyby było $ndx = \frac{dz}{1+zx}$, wniosłoby się $z = \text{stycz.}(nx + C)$. Lecz mając $ndx = \frac{bdx}{a+fxz}$; żeby to równanie naprowadzić do postaci poprzedzającej, trzeba by zrobić $z = mu$, gdzie przez m rozumieć się spółczynnik stałeczny; natenczas, byłoby $ndx = \frac{bmdu}{a+fm^2u^2}$; a rozumiejąc znowu $fm^2 = a$, byłoby $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$; a zatem $ndx = \frac{\sqrt{\frac{a}{f}} du}{a+auu}$; skąd wyciąga się $\frac{du}{1+uu} = \frac{n}{b} dx \sqrt{af}$; więc u , albo $\frac{z}{m}$, albo $z \sqrt{\frac{f}{a}} = \text{stycz.}(\frac{n}{b} x \sqrt{af} + C)$. Więc $z = \sqrt{\frac{a}{f}} \cdot \text{stycz.}(\frac{n}{b} x \sqrt{af} + C)$.

133. W wyrażeniach, wst. $(nx \pm C)$, stycz. $(nx \pm C)$ dopiero wy-
nalezionych, $nx \pm C$ oznacza dłu-
gość bezwzględną łuku, wyrażoną
w częściach promienia 1. Ale że
wygodniéj jest używać liczby sto-
pniów, aniżeli samych długościów,
przeto kiedy zdarzą się takowe wy-
rażenia, trzeba oszacować łuki na
stopnie, w czém niema żadnëj tru-
dności, rozdzieliwszy przez liczbę
części promienia, zawartych w ie-
dnym stopniu, to jest przez
0,0174533, albo (co na iedno wy-
chodzi), rozmnożywszy przez
57,2974166.

I tak wstawia łuku, którego długość
byłaby wyrażona przez b , albo wstawia łuku
mającego za miarę liczbę stopniów, wy-
rażoną przez $b \times 57,2974166$, oba wyraże-
nia znaczą też samę rzecz.

134. Gdybyśmy mieli $\frac{ndx}{\sqrt{(1-xx)}} =$
 $\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, zrównanie w którém dwie czę-
ści, wyrażają składki dwóch łuków, mają-
cych się ieden do drugiego $:: 1 : n$, i kto-
rych wstawami są x i y . Zeby scałkować
to zrównanie, trzeba obie części naprowa-
dzić do postaci niepięciastkówëy, zro-
bimy, co do pierwszëj części, $\sqrt{(1-xx)} =$
 $x\sqrt{(-1)} - x$; a co do drugiey, $\sqrt{(1-yy)}$
 $= y\sqrt{(-1)} - t$. Natenczas poprzedzające
zró-

zrównanie przemieniliby się w to, $\frac{ndx}{x} = \frac{dt}{t}$;
którego całką jest, $n \ln x = t + C$, skąd wy-
ciąga się $Ct = x^n$; a położywszy zamiast x i t
onych wartości, będzie $C[y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)}]$
 $= [x\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-xx)}]^n$; zrównanie wy-
rażające w powłzeczności stosunek między
wstawami x i y dwóch łuków wielokrotnych
iedn względem drugiego.

Ale chcąc użyć tego zrównania, trze-
ba wprzód naznaczyć wartość statecznëj C .
Rozumiemy tedy, (iako nam to jest wolno),
że te dwa łuki mają ténże sam początek; a
w takim razie x i y powinny być razem ze-
rami; lecz w tym przypadku, zrównanie
przemienia się w to, $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, al-
bo $-C = (-1)^n$; wyraż zaś $(-1)^n$, jest wart
 ± 1 albo -1 , podług tego iak n będzie liczbą
parzystą albo nieparzystą, więc będzie
 $-C = \pm 1$, i $C = \mp 1$; gdzie znak wyższy
służy do przypadku, kiedy n jest liczbą pa-
rzystą; a niższy, kiedy toż n byłoby liczbą
nieparzystą, więc naostatek będzie $\mp [y\sqrt{-1} -$
 $-\sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$.

W każdym przypadku szczególnym,
można zawsze wyrugować ilości zmyślone;
ale żeby to wykonać nayprościej drogą,
trzeba, (po przestawieniu wżyskiego do
iednëj części), zrównać z zerem sumę ilo-
ściów rzetelnych; natenczas pokaże się, że
pozostałe zrównanie będzie rozdzielne przez
 $\sqrt{(-1)}$, i będzie toż samo, co owo które wy-
nikło z porównania z zerem summy ilościów
rzetelnych. Np. zrobiwszy, $n = 2$, będzie
 $-y\sqrt{(-1)} \pm \sqrt{(1-yy)} = -xx - 2x\sqrt{(-1)}$.
 $\sqrt{(1-xx)} \pm 1 - xx$, albo $\sqrt{(1-yy)} \pm 2xx - 1$
 $\pm$

$\pm 2x\sqrt{-1} \cdot \sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$; a porównawszy z zerem sumę ilościów rzetelnych, będzie $\sqrt{(1-yy)} \pm 2xx - 1 = 0$; tak że całe zrównanie wynidzie na $2x\sqrt{(-1)}$, $\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{(-1)} = 0$; które będąc rozdzielone przez $\sqrt{(-1)}$, da $2x\sqrt{(1-xx)} - y = 0$, albo $y = 2x\sqrt{(1-xx)}$; skwadrówawszy zaś to zrównanie, i to drugie $\sqrt{(1-yy)} \pm 2xx - 1 = 0$, albo raczej $\sqrt{(1-yy)} = 1 - 2xx$, mieć będziemy tenże sam wypadek.

Można także tymże sposobem wynaleźć dostawę i styczne łuków wielokrotnych. Co się dotyczy tych ostatnich, dałoby się całkować zrównanie $\frac{ndx}{1 \pm xx} = \frac{dy}{1 \pm yy}$, rozłożywszy $1 \pm xx$ na $(1 \pm x\sqrt{-1})(1 - x\sqrt{-1})$, $\sqrt{(-1)}$, a $1 \pm yy$ na $(1 \pm y\sqrt{-1})(1 - y\sqrt{-1})$; z resztą trzeba sobie postąpić, jak przepisało się względem ułamków niepiérwiastkowych.

135. Kiedy już przypadliśmy do téj matéryi, pokażemy za iedną drogą sposób, w iaki wyraża się wstawę i dostawę łuku, co nam może być przydatno.

Niechay tedy będzie $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ zrównanie wyrażające stosunek między łukiem x i iego wstawą y . Jeżeli zrobimy $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - z$, to będzie $dx = \frac{-dz}{2\sqrt{(-1)}}$, albo $\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{(-1)}$, zrównanie, którego całką jest, $lz = -x\sqrt{-1} + C$, albo $lz = -x\sqrt{-1}e + C$; skąd wnosi się $z = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$; a położywszy zamiast z war-

wartość onego, będzie $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)} = Ce^{-x\sqrt{(-1)}}$. Co się dotyczy statecznéj C , ta wynaydzie się, uważywszy, że łuk x i iego wstawę powinny wraz stawać się zerem; co nam daie $-\sqrt{1} = C$; więc $y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)} = -e^{-x\sqrt{(-1)}}$; a zatem $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{(-1)} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$; po skwadrówaniu i po zebraniu będzie $y = \frac{1 - e^{-2x\sqrt{-1}}}{1 - e^{-2x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{-1}}$; więc ponieważ y jest wstawą łuku x , będzie, wft. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{-1}}$.

Jeżeli w drugiey części zrównania $\sqrt{(1-yy)}$ $= y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{(-1)}}$, położymy zamiast y wartość iego dopiero wynalezioną, to mieć będziemy $\sqrt{(1-yy)}$ to jest dost. $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2} + e^{-x\sqrt{(-1)}} = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$; więc dost. $x = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$. A teraz powróćmy nazad do całkowania zrównań.

136. Kiedy ilości nieokreślone w zadaném zrównaniu różniczkowym, nie są oddzielone w osobnych częściach, to natenczas wprzód nim

przedsięwzięcie się takowe oddzielenie, trzeba spróbować, jeżeli jakim przypadkiem, zrównanie nie dałoby się całkować w tym stanie w jakim znajduje się. To zaś można rozstrząsać podług (127), uważwszy jeżeli $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$, rozumiejąc że $A dx + B dy = 0$, wyraża takowe dane zrównanie. Jeżeli ten warunek ma miejsce, to z całkowaniem trzeba obchodzić się podług przepisu (123).

137. Atoli mogłoby zdarzyć się, że ten warunek nie będzie miał miejsca, a zrównanie jednak niemniej przeto podpadać będzie całkowaniu; kiedy rozmnoży się przez czynnik przyzwoitego, złożonego z x z y i z statecznych.

Niechay będzie P , takim czynnikiem. Natenczas $A P dx + B P dy = 0$, musi być różniczką doskonałą. Trzeba tedy ażeby było $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. A zatem cała rzecz od tego zależy, ażeby na wartość czynnika P , wynaléśdż taki związek składający się z x , z y i z statecznych, któryby uczynił zadość temu zrównaniu. A że to potrzebuje długiego szpérania i rozbioru; przeto przesłaniemy tu na szukaniu téj wartości P , tylko w takim przypadku, kiedy

tén

tén czynnik składać się ma z samych x i z statecznych tylko, albo téż z samych y i z statecznych tylko. Daymy tedy że P niema zawierać w sobie tylko same x ; natomiast będzie prosto $P \frac{dA}{dy} = B \frac{dP}{dx} + P \frac{dB}{dx}$;

skąd wyciąga się $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)}{B} dx$; a zatem łatwo będzie można mieć P , jeżeli $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$, wychodzi na iaki związek głoski x , iak tego trzeba, kiedy ma być, podług przypuszczenia, związkiem samej tylko głoski x .

Można iefzcze znaléśdż tego czynnika, jeżeliby miał składać się z związku głoski x , rozmnożonego albo rozdzielonego przez związek głoski y , znanoméy postaci.

138. I tymto sposobem, można powszechnie całkować wszelkie zrównanie takiéy postaci, $Xy^q dy + X'y^{q+r} dx + X''y^r dx = 0$, gdzie przez X, X', X'' są oznaczone iakiekolwiek związki głoski x ; a przez q i r wykładniki także iakiekolwiek.

Mógłbym próbować, czy to zrównanie podpada całkowaniu, mnożąc przez czynnika takiéy postaci $P y^n$; gdzie P rozumie się być związkiem głoski y , a n wykładnikiem

O 2

kiem

kiem nieokreślonym; i znalazłbym że to bydz może, rozumiejąc $n = -r$. Ale prościęy będzie naprowadzić zaraz zrównanie do téy postaci, $y^{q-r} dy + Fy^{q-r+1} dx + F'dx = 0$, rozdzieliwszy przez X i przez y^r , a wielorazy $\frac{X'}{X}$ i $\frac{X''}{X}$ oznaczywszy przez

F i F' . Natenczas żeby scałkować to zrównanie, rozumiem P bydz czynnikiem, złożonym z związku głoski x . Mieć tedy będę

$P y^{q-r} dy + F P y^{q-r+1} dx + F' P dx = 0$. Lecz jeżeli P , jest związkiem głoski x , to $F' P$ także nim będzie; a zatem $\int F' P dx$, przypada do sposobu całkowania ilościów z iedną odmienną. Nieidzie tedy o nie wię-

cę, tylko ażeby $P y^{q-r} dy + F P y^{q-r+1} dx$ zrobić różniczką doskonałą; do tego zaś trze-

ba, ażeby było $\frac{d(P y^{q-r})}{dx} = \frac{d(F P y^{q-r+1})}{dy}$;

to jest, ażeby było $y^{q-r} \frac{dP}{dx} = (q-r+1) \times$

$y^{q-r} F P$; skąd wyciąga się $\frac{dP}{P} = (q-r+1) \cdot$

$F dx$; a scałkowawszy, $\ln P = \int (q-r+1) F dx$

$= \int (q-r+1) F dx$. le; więc $P = e^{\int (q-r+1) F dx}$.

Położywszy tę wartość czynnika P w zrówna-

niu $P y^{q-r} dy + t. d.$ i scałkowawszy, będzie

$\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1} e^{\int (q-r+1) F dx} + \int F' dx \times$

$e^{\int (q-r+1) F dx} + C = 0$.

W całkowaniu zrównania z którego

wynikło P , nieprzydaliśmy stateczney, bo

nie-

niemając żadnego warunku służącego do naznaczenia ięy, wolno nam było poczytać ią za nic.

Obierzmy sobie iaki przykład, i daymy że ma bydz scałkowano $dy + \frac{ay dx}{x} + (bx^2 +$

$cx + f) dx = 0$. Rozmnożywszy przez czyn-

nika P , mieć będziem, $P dy + \frac{ay P dx}{x} +$

$P(bx^2 + cx + f) dx = 0$; trzeba tedy ażeby

było $\frac{dP}{dx} = \frac{d(\frac{ay P}{x})}{dy} = \frac{aP}{x}$; więc $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$;

więc $\ln P = \ln x$, albo $P = x^a$. Zrównanie te-

dy przemienia się na to, $x^a dy + ax^{a-1} y dx$

$+ bx^{a+2} dx + cx^{a+1} dx + fx^a dx$, którego

całką jest, $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1}$

$+ C = 0$.

139. Zrównanie powszechnie

dopiero scałkowane, trafia się dosyć

często; a sposób któregośmy tu uży-

li może służyć w wielu innych przy-

padkach.

Np. gdybyśmy mieli te dwa zrówna-

nia, $dx + a dy + (bx + cy) T dt = 0$, $k dx +$

$a' dy + (b'x + c'y) T dt = 0$, gdzie przez $x, y,$

i t , są oznaczone trzy odmiennie, przez $a, b,$

c, a' i t. d. ilości stateczne, a przez T , zwią-

zek iakikolwiek głoski t ; scałkowanie tych

dwoch zrównań możnaby naprowadzić do

sposobu poprzedzającego, iak następuje. Mno-

żę iedno z tych dwóch zrównań, np. pier-

O 3

włze,

wfze, przez spółczynnika nieokreślonego a
statecznego g; i dodawszy takowe pierwsze
zrównanie z drugim, mnożę wszystko przez
czynnika P, którego rozumiem być jakim
związkiem głoski t; skąd mieć będę, $(gP + kP)dx + (gaP + a'P)dy + [(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y] Tdt = 0$. Teraz daymy że
to zrównanie jest doskonałą różniczką; to
trzeba podług (128), ażeby było iód

$$\frac{d(gP + kP)}{dt} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dx} T; \text{ 2re}$$

$$\frac{d(gaP + a'P)}{dy} = \frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dy} T;$$

$$\text{3cie} \quad \frac{d(gP + kP)}{dx} = \frac{d(gaP + a'P)}{dy} T; \text{ Lecz rozumie}$$

jąc P, byż związkiem głoski t, to ostatecznie
zrównanie ma miejsce, bo wychodzi na o

$$= 0; \text{ a dwa pierwsze dają, } (g + k) \frac{dP}{dt} = (gb + b') PT, \text{ i } (ga + a') \frac{dP}{dt} = (gc + c') PT;$$

skąd wyciąga się $\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k} Tdt$ i $\frac{dP}{P} = \frac{gc + c'}{ga + a'} Tdt$; więc zrównawszy z sobą te
dwie wartości ilości $\frac{dP}{P}$ i rozdzieliwszy

przez Tdt, będzie $\frac{gb + b'}{g + k} = \frac{gc + c'}{ga + a'}$, zró-
wnanie, w którym g znajdzie się byż pod-
niesione do drugiego stopnia, i które po ro-
związaniu da na tóż g dwoiaką wartość.

Rozumiejąc tedy g, już znaiome, ła-
two będzie można wynaléśdż P; bo zró-

$$\text{wnanie } \frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k} Tdt, \text{ daie } P = \dots$$

e

$$\int \frac{gb + b'}{g + k} Tdt.$$

Lecz ponieważ zrównanie $(gP + kP)dx + t.d.$ już teraz jest doskonałą róż-
niczką, więc scałkowawszy go, będzie $(gP + kP)x + (gaP + a'P)y + C = 0$; a zatem
jeżeli g oznacza pierwszą wartość głoski g,
wypadła z zrównania drugiego stopnia - -
wzwyż wzmiankowanego, oznaczywszy
przez g' drugą wartość tegoż g, a przez P'
oznaczywszy to w co przemienia się P, po-
łożywszy g' zamiast g, mieć będziem, $(g'P' + kP')x + (ga'P' + a'P')y + C' = 0$, gdzie
C' wyraża nową stateczną. Jakóż niema
tu żadney przyczyny, któraby nas przymu-
szała do użycia raczy téy aniżeli owéy z
dwóch wartościów głoski g. A dopiero z
tych dwóch zrównań łatwo będzie wycią-
gnąć wartości głosek x i y, które znajda
się byż wyrażone w t i w statecznych.

140. Kiedy dane zrównanie
różniczkowe, nieprzypada do żadne-
go z przypadków dotąd opisanych,
to w takim razie trzeba uważać,
jeżeli ilości nieokreślone niedałyby
się rozłączyć. Częstoć nietrze-
ba do tego więcej, tylko użyć po-
spolitych reguł Algebraicznych; cza-
fém zaś trzeba się udać do przemian.
Atoli bywa wiele takowych zró-
wnań, względem których, niemożna
wiedzieć iaka odmiana właśnie była-
by przyzwoita.

O 4

Zró-

Zrównanie $ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy x$ ($e + fx^h$), rozłącza się prosto przez rozdzielanie; bo wychodzi na toż, samo, co ($a + by^q$) $x^n dx = y^k dy (e + fx^h)^r$, które przemienia się, na $\frac{x^n dx}{(e + fx^h)^r} = \frac{y^k dy}{a + by^q}$; a tego całka, zależy od ilościów dwuflownych z jedną odmienną.

Gdybym zaś miał, $gx dx = ax^4 y dy + zabx^2 y^3 dy + abby^5 dy$; naprzód łatwo postrzegam, że to zrównanie mogę tak napisać, $gx dx = (x^4 + 2bx^2 y^2 + bby^4) ay dy$; a potem widzę iż mogę dać mu tę postać, $gx dx = (x^2 + by^2)^2 \times ay dy$. A tu dołożywszy cokolwiek uwagi, rozeznawam że mi uda się rozłączenie, jeżeli zrobię $x^2 + by^2 = z$; iakoż natenczas mieć będę $x^2 = z - by^2$; i $x dx = \frac{1}{2} dz - by dy$; więc używszy tych wartości, będzie $\frac{1}{2} g dz - by dy = az z dy$. Zrównanie, z którego wyciąga się, $\frac{\frac{1}{2} g dz}{bz + azz} = y dy$, co łatwo da się scałkować.

141. Ponieważ do takowych przemian niemożna przepisać reguł powszechnych, przeto przestaniemy tu tylko na niektórych przypadkach ogólnych, w których wiadomo jest że rozłączenie uda się.

Ogółem, rozłączenie może mieć miejsce w wszelkich zrównaniach iednorodnych o dwu odmiennych; to jest

jest w takich gdzie dwie nieokreślone x i y , czyto znajdujące się razem czy też położone osobno, w każdym wyrazie mają iednakową sumię wymiarów.

Jakoż zmyślmy sobie że $Adx + Bdy = 0$, jest zrównaniem iednorodnem, rozdzielwszy wszystko przez stopień głoski x , taki ażeby wykładnik jego równał się liczbie oznaczającej wymiary zrównania, łatwo da się poymować, że w czynnikach A i B , znajdować się niebędą tylko stopnie ilości $\frac{y}{x}$, i stateczne; tak iż zrównanie wynidzie, na $Fdx + Fdy = 0$, gdzie F i F' rozumieją się być złożone z związków ilości $\frac{y}{x}$ i z statecznych. To założywszy na przód, ponieważ $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xx}$, więc będzie $dx = \frac{-xx}{y} d\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{x}{y} dy$; więc zrobiwszy $\frac{y}{x} = z$, będzie $dx = -\frac{y dz}{zz} + \frac{dy}{z}$; położywszy tedy zamiast $\frac{y}{x}$ i zamiast dx onych wartości, będzie $-\frac{Fy dz}{zz} + \frac{Fdy}{z} + Fdy = 0$, gdzie czynniki F i F' rozumieją się teraz być złożone z związków głoski z i z statecznych. Skąd wnosi się $\frac{dy}{y} = \frac{Fdz}{Fz + Fzz}$, zró-

zrównanie wcale rozłączone, bo czynniki F i F' niezawierają w sobie innéj odmiennéj tylko z .

Np. gdybym miał $y^3 dx + y^2 x dy + bx^3 dy = 0$, zrównanie iednorodne, w którym liczbą wymiarów jest 3; rozdzieliłbym przez x^3 , i miałbym $\frac{y^3}{x^3} dx + \frac{y^2}{x^2} dy + b dy = 0$; zro-

biwszy tedy $\frac{y}{x} = z$, albo $x = \frac{y}{z}$, miałbym

$$dx = \frac{z dy - y dz}{z^2}; \text{ a położywszy te wartości}$$

w zrównaniu zadaném, wypadnie mi, $z^2 dy - y z dz + x^2 dy + b dy = 0$; skąd wyciągam

$$\frac{dy}{y} = \frac{z dz}{2z^2 + b}, \text{ zrównanie, którego całką jest}$$

$$\ln y = \frac{1}{4} (2z^2 + b) + C, \text{ a zatem będzie } y =$$

$$C(2z^2 + b)^{\frac{1}{4}}, \text{ albo } y^4 = C^4 (2z^2 + b), \text{ albo na-}$$

ostatek $y^4 = C^4 \left(\frac{2y^2}{x^2} + b \right)$, położywszy na-
zad zamiast z wartość iego $\frac{y}{x}$.

142. Byłoby tedy rzeczą po-
żyteczną, gdyby można było każde
zrównanie zrobić iednorodném. Ale
na to niéma sposobu powszechnego;
trzeba tylko uciekać się do przemian.
Spomiędzy których te co obiecują
pomyślny skutek, zależą na tém, aże-
by iedną z odmiennych, albo związek
iaki téj odmiennéj, albo téż związek
obu odmiennych zrównać z nową
od-

odmienną, mającą wykładnika nie-
określonego. Potém takowe wy-
kładniki wynaydują się przy pomo-
cy tego warunku, aby zrównanie
przemienione było iednorodném.

Np. mając zrównanie, $ax^m dx + by^n x^q dy$
 $+ cy^k dy = 0$, w którym może być wyrażo-
ne w powszechności wszelkie zrównanie o
trzech wyrazach, gdybym chciał dóysć w
iakiich przypadkach, dałoby się uczynić ie-
dnorodném, zrobiłbym $x = z^h$; a tak miał-
bym $ahz^{mh} + h - 1 dz + by^n z^{qh} dy + cy^k dy = 0$.
Lecz kiedy to zrównanie ma być
iednorodném, trzeba ażeby było $k = qh + n$,
i $k = mh + h - 1$, skąd wyciąga się $h = \frac{n + 1}{m - q + 1}$,
i $k = \frac{mn + q + n}{m - q + 1}$, a zatem jeżeli wykładni-

ki k, q, m i n są takie, że to ostatnie zrówna-
nie może mieć miéysce, to zadane zrównanie
można uczynić iednorodném, a zatem można
w niem rozłączyć głoski odmiénne.

O Ilościach i o Zrównaniach różnicz-
kowych drugiego, trzeciego i. t. d.
porządku.

143. Wolność którą mamy (19),
obrać sobie w różnicz-
kowaniu za stateczną iedną którą-
kolwiek z różniczek piérwzych, do
ułatwiénia całkowania w wielu przy-
padkach może nam znacznie dopo-
modz

móże. Ale ponieważ przytrafić się może, że w różniczkowaniu obierze się za stateczną taką różniczkę, która nie jest najspółobnieyszą do tego końca, przeto naprzód pokazać mamy, jakim sposobem, zrównanie różniczkowe, w którym poczytała się za stateczną ta lub owa różniczkę, doprowadzić do innego zrównania, nie mającego żadnej statecznej; a potem wolno będzie poczytać sobie za stateczną, która się z nich spodoba.

Niech będzie $Adx^2 + Bdx dy + Cdy^2 + Dddy = 0$, zrównanie różniczkowe o dwu odmiennych, drugiego porządku, w którym pierwsza różniczkę dx iedną z odmiennych, poczytała się za stateczną. Takowe zrównanie rozdzieliwszy przez dx , trzeba go tak napisać, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + Dd(\frac{dy}{dx}) = 0$, które w rzeczy samej jest toż samo co pierwsze; bo kiedy dx rozumie się być stateczne, to musi być $d(\frac{dy}{dx}) = \frac{ddy}{dx}$. Lecz nie chcąc żeby dx było stateczne, to natenczas musi być $d(\frac{dy}{dx}) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; zrównanie tedy przemienia się na $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}) = 0$, w którym już niema żadnej różniczki statecznej.

Niech

Niech znowu będzie $Adx^3 + Bdx^2 dy + Cdy^2 dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$, zrównanie różniczkowe trzeciego porządku, w którym dx rozumiało się zawsze stateczne. Trzeba rozdzielić przez dx^2 , co da, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} +$

$E\frac{ddy}{dx} + F\frac{dyddy}{dx dx} + G\frac{d^3y}{dx^2} = 0$, zrównanie,

dające się napisać w ten sposób, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + Ed(\frac{dy}{dx}) + F\frac{dy}{dx}d(\frac{dy}{dx})$

$+ Gd[(\frac{1}{dx})d(\frac{dy}{dx})] = 0$; gdzie w różniczkowaniach wskazanych poczytawszy wszystko za odmiennie, powstanie stąd nowe zrównanie, niezawierające w sobie żadnej różniczki statecznej.

Przystępujemy to do przykładu. Niechay będzie $dx^2 dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, zrównanie, w którym dx poczytało się za stateczne. Na pierwsze wężrzenie niewiadać iakby to zrównanie mogło być całkowane, ale kiedy poczytamy dx za odmienną, pisząc, $dx dy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)d(\frac{dy}{dx})$,

to w różniczkowaniu wskazanem, możemy wziąć za stateczną dy , skąd mieć będziemy,

$dx dy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$, a po ze-

braniu, będzie, $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$, zrównanie, którego całką jest, (jak łatwo widzieć się daie), $xdx + adx - ydy + Cdy = 0$, przydawszy stateczną Cdy tegoż porządku co całka. To zrównanie znowu powtórnie całkowane, da naostatek $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C' = 0$.

144.

144. Reguła wyżey podana (123), do całkowania ilościów różniczkowych z wielą odmiennymi, służy do wszystkich ilościów różniczkowych wszelakiego porządku, poczytawszy różniczki ddx, ddy, d^3x, d^3y , i. t. d. za tyleż różnych odmiennych.

I tak gdyby było zadano całkować $x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + (2x^2y + 3y^2x^2) dx dy + 2y^2xdx^2$, ilość w której dx poczytało się za stateczne; całkowałbym naprzód poczytawszy samo ddy za odmienną, i miałbym x^3y^2dy . Potem biorę różniczkę tej ilości całkowanej, którą jest $3x^2y^2dxdy + 2x^3ydy^2 + x^3y^2ddy$, i odęmuje ją od różniczki zadanej, skąd na resztę mieć będę $2x^2ydx dy + 2y^2xdx$. Całkuję znowu, poczytając za odmienną samo y , i wypada mi x^2y^2dx . Różniczkuję tę ilość, i odęmuje od pierwszey reszty, różniczkę $2x^2ydy dx + 2x^2y^2dx$ stąd wynikającą; ponieważ nic mi niezośtaie, wnoszę stąd, że całką ilości zadanej, jest $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$, przędawszy stateczną Cdx tegoż porządku co całka.

145. Co się tycze zrównań różniczkowych, te całkują się podobnie, kiedy to bydy może w takim stanie w jakim są zadane; co poznaie się po tem, jeżeli przystępując do całkowania, iak powiedziało się dopiero wyżey, na ostatnią resztę wypada zero.

Ale

Ale chociażby ostatnia reszta niebyła zerem, to iednakże nienależałoby ieszcze stąd sobie wnosic o niepodobieństwie całkowania. Bo iż nieznosi się równość, mnożąc albo dzieląc obie części zrównania przez tę samą ilość, dla tego może znaleźć się taka ilość, przez którą będąc rozmnożone zrównanie, uczyni się sposobnem do całkowania. Wynalezienie wzmiankowanego czynnika w sposób powszechny, jest taką rzeczą, którą tu zatrudniać się niemożemy. Przychodzi się do znalezienia go w wielu przypadkach dosyć rozległych, ale my przestaniemy tylko na tem, iż damy pojęcie iak sobie trzeba postąpić tylko w iednym przypadku, często zdarzającym się w Zagadnieniach Fizyczno-Matematycznych. Idzie tu o zrównanie takię postaci, $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$, albo $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, albo w powszechności $d^n y + ad^{n-1} y dx + ba^{n-2} y dx + \dots mydx^n + Xdx^n = 0$, gdzie dx rozumie się bydy stateczne, a, b, c i. t. d. rozumieją się bydy współczynnikami statecznymi, a X , związkiem iakimkolwiek głoski x . Te wszystkie zrównania, stają się sposobne do całkowania, będąc rozmnożone przez czynnik złożonego z x i z statecznych. Owóż teraz iak znajduie się ten czynnik.

Daymy że idzie o zrównanie, $ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$; trzeba naprzód rozłożyć wyraz $adydx$ na dwa inne $kdydx$ i $(a-k)dydx$, przez co odmieni się poprzedzające zrównanie w to, $ddy + kdydx + (a-k)dydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$. Rozumie się że k jest ilością stateczną nieokręśloną; temu tedy zrównaniu, żeby mogło bydy całkowane nic więcę niebrakuie, tylko aby

go

go rozmnożyć przez czynnik P , któryby był związkiem składającym się z x i z sta-
tecznych.

To założywszy na przód, jawna jest, iż zrównanie $Pddy + Pkdydx + P(a-k)dydx + Pbydx^2 + PXdx^2 = 0$, podług poprzedza-
jącego przypuszczenia, powinno być zgo-
dne do całkowania. Piszę go tedy tak:
 $Pddy + Pkdx dy + [P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]dx = 0$. Lecz żeby to zrównanie
podpadało całkowaniu podług. (128), musi
być róż $\frac{dP}{dy} = \frac{d(Pkdx)}{ddy}$; zresztą $\frac{dP}{dx} = \frac{d[P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]}{ddy}$; 3cie.

$$\frac{d(Pkdx)}{dx} = \frac{d[P(a-k)dy + Pbydx + PXdx]}{dy}$$

Z tych trzech równań pierwsze daje, o
 $= 0$, na fundamencie tego przypuszczenia,
że czynniki P i k niezawierają w sobie tyl-
ko y i dy ; drugie na fundamencie tegoż przy-
puszczenia, daje $\frac{dP}{dx} = P(a-k)$; a trzecie da-

$$\text{je } \frac{Pdk + kdP}{dx} = Pb, \text{ albo tylko } \frac{kdP}{dx} = Pb;$$

bo k rozumie się być stałeczną. Z każde-
go z tych równań wyciągnąwszy wartość
ilości $\frac{dP}{P}$, będzie $\frac{dP}{P} = (a-k)dx$, i $\frac{dP}{P} =$
 $\frac{b}{k}$; a zrównawszy te dwie wartości jedną

z drugą, będzie $a-k = \frac{b}{k}$, albo $kk - ak +$
 $b = 0$. Wynajdzie się tedy k , przy pomo-
cy równania drugiego stopnia, to jest że
czynnik k mieć będzie dwoiaką wartość.

Oznaczmy sobie te dwie wartości przez m
i m' , co nam da róż $\frac{dP}{P} = \frac{b dx}{m}$, a zatem

$$\log. P = \frac{bx}{m}, \text{ albo } P = e^{\frac{bx}{m}}; \text{ zrównanie tedy}$$

$Pddy +$ t. d. przemieni się w to, $ddy e^{\frac{bx}{m}} +$
 $m dy dx e^{\frac{bx}{m}} + (a-m) dy dx e^{\frac{bx}{m}} + by dx^2 e^{\frac{bx}{m}} + X dx^2 e^{\frac{bx}{m}}$
 $= 0$. Teraz przystępując do całkowania, bio-

nę naprzód (144) całkę wyrazu $ddy e^{\frac{bx}{m}}$, po-
czytając samo ddy za odmienną; i mam

$dy e^{\frac{bx}{m}}$. Zróżniczkowawszy, i tę nową ró-
żniczkę odiaawszy od poprzedzającego zróż-
wnania, wypada mi na resztę $(m + a - \frac{b}{m} - m) \times$

$\frac{bx}{m} + by dx^2 e^{\frac{bx}{m}} + X dx^2 e^{\frac{bx}{m}}$. Lecz zrów-
nanie $kk - ak + b = 0$, które nie jest co in-
nego, tylko $mm - am + b = 0$, daje $a - \frac{b}{m} -$
 $- m = 0$, więc pozostała ilość do całko-

wania będzie, $m dy dx e^{\frac{bx}{m}} + by dx^2 e^{\frac{bx}{m}} + X dx^2 e^{\frac{bx}{m}}$;
które wzięwszy całkę, poczytając za od-

mienną samo y , mieć będziemy $my dx e^{\frac{bx}{m}}$
na drugi wyraz szukaney całki. Zróżnicz-
kowawszy, i odiaawszy od pierwszey reszty,

zostanie $Xdx^2 e^{\frac{bx}{m}}$, ilość, której całka w powszechności, da wyrazić się przez

$dx \int Xdx e^{\frac{bx}{m}}$, i która niezawierając w sobie tylko jedną odmienną, zależy od sposobów przepisanych do ilościów z jedną odmienną;

a zatem całką będzie, $dye^{\frac{bx}{m}} + mydx e^{\frac{bx}{m}} +$

$dx \int Xdx e^{\frac{bx}{m}} = C$, albo $dy + mydx +$

$dxe^{\frac{bx}{m}} \int Xdx e^{\frac{bx}{m}} = Ce^{\frac{bx}{m}}$. Ale że nie mamy żadnej przyczyny przymuszającej do użycia raczej tej aniżeli owej wartości k , więc używszy drugiej oznaczonej przez m' , podobnież mielibyśmy $dy + m'ydx +$

$dxe^{m' \frac{bx}{m}} \int Xdx e^{m' \frac{bx}{m}} = C'e^{m' \frac{bx}{m}}$, oznaczywszy przez C' stałą, odpowiadającą całce, wynikającej z przypuszczenia nowęj wartości m' wziętęj zamiast k .

Zrównawszy z sobą dwie wartości ilości dy , wyciągnięte z tych dwóch równań, wznosi się naostatki

$$y = \frac{Ce^{\frac{bx}{m}} - C'e^{\frac{bx}{m'}} + e^{\frac{bx}{m}} \int Xdx e^{\frac{bx}{m}}}{m - m'} - \frac{e^{\frac{bx}{m'}} \int Xdx e^{\frac{bx}{m'}}}{m - m'}$$

146. Gdyby zrównanie było trzeciego porządku, trzeba by sobie postąpić w podobny sposób. Np. mając $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, napisałbym; $d^3y + kddydx + (a-k)ddydx + k'dydx^2 + (b-k')dydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, gdzie przez k i k' rozumiemy się ilości nieznacone, ale stateczne, tudzież że do scałkowania, temu zrównaniu niebrakuje, tylko aby było rozmnożone przez czynnik P , niezawierającego w sobie tylko x i stateczne; to jest, że zrównanie $Pdy^3 + Pkddydx + P(a-k)dydx + Pk'dydx^2 + P(b-k')dydx^2 + Pcydx^3 + PXdx^3 = 0$, byłoby sposobne do scałkowania. Dawszy mu postać następującą: $Pd^3y + Pkdxddy + [P(a-k)ddy + Pk'dydx] \times dx + [P(b-k')dydx + Pcydx^2 + PXdx^2]dx = 0$, z warunku sposobności tego zrównania do scałkowania, wyniknęłoby podług (128) sześć równań, które dla uczynionego przypuszczenia względem k , k' i P , wyszłyby na trzy; a ostateczne zrównanie dałoby na k trzy wartości, i znowu inne trzy wartości odpowiadające na k' i na P . Postępując sobie tedy w sposób poprzedzający, mielibyśmy trzy równania, wyrażone w y , x , dx , dy i ddy . Z których wyrugowawszy ddy i dy , wypadłaby wartość pomierenna głoski y , wyrażona w x i w statecznych.

147. A teraz łatwo domyślić się można, co trzeba by czynić z równaniami wyższych porządków.

Tenże sposób służyć i jeszcze może, chociażby znajdowała się większa liczba odmiennych, byleby takowe nieprzechodziły pierwszego stopnia, i między sobą rozmnożone niebyły, ani też przez jaką z różniczek tych odmiennych, chybaby przez różniczkę, która poczyta się za stateczną.

Np. gdybyśmy mieli te dwa równania, $addx + bddx + cdydx + edzdx + fydx^2 + gdx^2 + Xdx^2 = 0$, i $a'ddy + b'ddx + c'dydx + e'dzdx + fydx^2 + g'dx^2 + X'dx^2 = 0$. Naprzód oba równania złączyłbym w jedno, dodawszy pierwsze do drugiego, rozmnożonego przez czynnik nieokreślonego a statecznego q . Potem w całym równaniu, wyraż w który wchodzi dy , i wyraż w który wchodzi dz , rozdzieliłbym na dwie części, jak zrobiliśmy wyżej; a naostatek rozmnożyłbym przez takiego czynnika, którego rozumiałbym być złożonym, z związku głoski x i z statecznych.

148. Całą rzecz o równaniach różniczkowych zakończymy tą uwagą, że kiedy w równaniu o dwu odmiennych, niedostaie iednocy z odmiennych pomiernych, to zawsze można takowe równanie naprowadzić do różniczek porządku bezśrzednie poprzedzającego; a to zrównawszy różniczkę pierwszą iednocy z odmiennych; z różniczką drugą rozmnożoną przez nową odmienną.

Np. gdybym miał do całkowania to równanie, $\frac{ddy}{dy} \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} = (ay + b) dx$, w którym dx rozumie się być stateczne, i w którym niedostaie odmiennocy x . Zrobiłbym $dy = p dx$, i miałbym $ddy = dp dx$, a zatem $\frac{dp}{p} \sqrt{(1 + pp)} = (ay + b) \cdot \frac{dy}{p}$, albo $dp \sqrt{(1 + pp)} = (ay + b) dy$; równanie, którego druga część całkuje się Algebraicznie. a pierwsza część przez logarytmy, przemieniwszy wyraż $\sqrt{(1 + pp)}$, na ilość niepierwiastkową, w sposób już indziej przepisany (117).

PO-

POWSZECHNE FUNDAMENTA MECHANIKI.

WIADOMOŚCI POPRZĘDZAJĄCE.

149. Pod imieniem *Mechaniki* zawieramy naukę o Ruchu i o Równowadze. Ciało rozumie się być w ruchu, kiedy albo całe, albo niektóre części jego, są przeniesione z iednego miéysca na drugie. Ciało czyli skupienie wielu części materyalnych, niemoże samo przez się dać sobie ruchu. Niemoże być poruszone tylko przez jaką przyczynę, lubo bez niéy może mieć bytność swoię. Ta przyczyna (niech ona będzie iaka chce) która jest zdolna do poruszenia ciała, jest to, co my nazywamy *siłą*. Równowaga, jest taki stan ciała, albo skupionych części materyalnych, albo *układu* ciała

P 3

(sy)

(systeme), kiedy to ciało jest nagabane od wielu sił, które są zniszczające od iakich zawad, albo też które psują się wzajemnie jedna drugą.

Spoczynek, jest taki stan ciała, w którym części jego, nietylko nie są z miysca poruszone, ale nawet od żadney siły nie są nagabane.

Dla ustanowienia fundamentów Ruchu i Równowagi, zmyślmy sobie naprzód, iakoby w naturze nieznaydowało się nic więcej, tylko ciała o których mówić mamy, i siły które rozumiemy do tych ciał bydź przyłożone. A tak uważać będziemy naprzód ciała, iakoby niebyły ważne, ale owszem iakoby były doskonale wolne czyli swobodne; rozumiejąc iż w naturze niemasz ani powietrza, ani ważności, ani tarcia, ani żadney innéj przeszkody. Potém dopiero mieć będziemy wzgląd na te przeszkody; ale ażeby można było oszacować ich skutki, trzeba nam naprzód uważać rzeczy, w tym stanie iak się namiénito.

150. Na fundamencie tych zasad, iakwna jest, że ieżeli ciało odebrało ruch od iakiéykolwiek bądź przyczyny, to powinno trwać w tym stanie ruchu, bez żadney przerwy i pomnożenia, bez żadnego zboczenia, póty, póki taż albo nowa siła niebędzie czynić przeciwko niemu. Jakóż, powiedziało się dopiero, że ciało niemoże samo sobie dać ruchu; więc niemoże też ani go sobie odiać, bobyto było dać go sobie w rozumieniu przeciwném; a do tego rozumiemy, że niema na zawadzie żadney przeszkody.

szkody. A zatém ruch jest naturalnie równy, czyli iednokształtny, i prostoliniowy. Zastanówmy się tedy naprzód nad własnościami tego Ruchu.

O Ruchu iednokształtnym (*uniforme*).

151. **R**uch tedy *iednokształtny* jest taki, w którym ciało ruchu się w sposób statecznie iednakowy; to jest kiedy ciało przebiega zawżze iednakową rozległość miysca, w iednakowym przeciągu czasu. Zeby przystosować ieden do drugiego ruchu dwóch ciał ruchaiących się iednokształtnie, trzeba mieć wzgląd na rozległość iaką każde ciało przebiega w iednymże iakowym pewnym czasie, iakoto w minucie piérwszém, wtóréj, i t. d. Takowa rozległość jest to, co nazywamy *szypkością*.

152. Szypkością tedy ciała, mówiąc właściwie, jest rozległość, iaką to ciało może przebieżyć iednokształtnie, w péwnym przeciągu czasu, który my nazwiemy *iednością czasu*.

I tak w ruchach iednokształtnych dwóch ciał, ieżeli czas rachować będziemy w minutach wtórych, i ieżeli iedno ciało przebiega 5 ft. w téjże minucie wtóréj, to powiem, że

szypkość pierwszego ciała jest na 5*ft.* a szypkość drugiego ciała, na 6*ft.* Ale (biorąc zawsze jedną minutę wtórą za jedność czasu), gdyby mi powiedziano, że ciało iakowe przebiegło 100*ft.* w 5 minutach wtórych, to takowe 100*ft.* niewyrażałyby mi szypkości, ale widzę, że to ciało w każdej minucie wtórej, przebiegłoby piątą część wszystkiego albo 20*ft.*; to jest że chcąc mieć znaną szypkość, dzielę liczbę 100. wyrażającą liczbę części rozległości przebieżonej, przez 5, czyli przez liczbę jednościow czasu upłynionych.

153. Wiec ogołóm, szypkość równa się rozległości rozdzielonej przez czas, to jest oznaczywszy przez *V* szypkość, przez *E* rozległość przebieżoną w czasie iakim oznaczym przez *T*, będzie $V = \frac{E}{T}$; wyrażenie, które jest jedną spomiedzy fundamentalnych zasad Mechaniki.

154. Zrównanie $V = \frac{E}{T}$; daie nie tylko pomiar szypkości, ale też rozległości i czasu. Jakóż poczytając z kolei, *E* i *T* za niewiadome, podług pospolitych reguł Algebraicznych mieć będziemy $T = \frac{E}{V}$ i $E = VT$. A zatem, Zeby mieć czas, trzeba rozdzielić rozległość przez szypkość; żeby zaś mieć rozległość, trzeba rozmnożyć szypkość przez czas. Wreszcie jeżeli tu używamy wyrażenia Algebraicznego, to dzieie się nie żeby tego

tego potrzeba wyciągała dla łatwości zrozumienia tych prawd początkowych, ale tylko dla poratowania pamięci. Jakóż z tego przykładu pokazuje się, że kiedy raz ta pierwsza zasada utwierdzi się w pamięci, to zawsze łatwo będzie wynaléśdź sobie z niéy dwie inne, pośapiwszy sobie z tą pierwszą zasadą wyrażoną Algebraicznie, podług reguł zwyczajnych.

155. Już tedy teraz łatwo przystósować możemy, ruchy iednokształtne dwóch lub więkšzéy liczby ciał, iedne do drugich.

Np. gdyby mnie zapytano, w iakim stosunku znajdują się między sobą szypkości dwóch ciał, przebiegających rozległości znaiome *E* i *e*, w czasach znaiomych *T* i *t*. Oznaczywszy przez *V* i *u*, szypkości tych dwóch ciał, mieć będę $V = \frac{E}{T}$, i $u = \frac{e}{t}$. . . (153); więc $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; to jest, że szypkości są między sobą iak rozległości rozdzielone przez czasy.

Słowém czyto szypkości, czy rozległości, czy czasy, mają bydź iedne do drugich przystósowane, to zasada dopiero założona (153) zawłze da wyrażenie każdéy z tych rzeczy, względém każdego ciała: nietrzeba tylko z tych wyrazén złożyć stosunek.

Np. jeżelibym chciał przystósować rozległości, zasada fundamentalna daie mi $V = \frac{E}{T}$, skąd wyciągam $E = VT$; więc co do

do drugiego ciała, mieć będą podobnie $e = ut$; więc $E:e :: VT:ut$; to jest, że rozległości mają się między sobą, jak szypkości rozmnożone przez czasy.

156. Z tych trzech rzeczy, jakie są rozległość, czas, i szypkość, chcąc dwie przystosować do siebie, kiedy trzecia w obu ciałach jest jednakowa, nie trzeba więc, tylko poszukać wyrażenia téj trzeciéj rzeczy, odpowiadającego każdemu ciału, i przystosować jedno do drugiego.

Np. gdybym chciał mieć stosunek między rozległościami, kiedyby szypkości były jednakowe, uważam iż jest $V = \frac{E}{T}$ i $u = \frac{e}{t}$,

więc ponieważ rozumiemy się $V = u$, będzie $\frac{E}{T} = \frac{e}{t}$ albo $Et = eT$; skąd wnosi się $E:e ::$

$T:t$; to jest, że jeżeli szypkości dwóch ciał są sobie równe, to rozległości mają się między sobą jak czasy. Znaleźlibyśmy podobnie, że jeżeli czasy są sobie równe, to rozległości mają się do siebie jak szypkości; i że kiedy dwa ciała mają przebiegać tę samą rozległość, to trzeba ażeby szypkości ich były odwrotnie proporcjonalne czasom. Jakóż mamy $E = VT$ i $e = ut$; więc jeżeli $E = e$, to musi być $VT = ut$, skąd wyciąga się $V:u :: t:T$. A tak to samo jedno fundamentalne zrównanie $V = \frac{E}{T}$, daie sposób wynalezienia stosunków

mię-

między wszelkimi okolicznościami należącymi do Ruchu iednokształtnego.

O Siłach i o ilości Ruchu.

157. Summa części materyalnych, z których składa się ciało, nazywa się *miąższością* (masse); ale my używając tego słowa, oznaczać będziemy przez nie, liczbę wyrażającą, z wielu części materyalnych jest złożone ciało iakowe. *Sila*, iak już powiedziało się wyżej, jest przyczyna dająca ciału ruch, albo dążąca do poruszenia go.

Ponieważ w siłach niemamy nic innego uważać tylko onych skutki, przeto siły mierzyć się powinny skutkami swými, do iakich są zdólne. Skutek zaś siły jest ten, że każdéj cząstce ciała materyalnégó udziela pewnéj szypkości. Więc jeżeli wszystkie części nabywają iednakowéj szypkości, iak tu rozumiemy (chcemy), to przyczyna poruszająca, mieć będzie za miarę, szypkość rozmnożoną przez liczbę części materyalnych ciała, to jest przez miąższość. Więc, *wymiarém siły jest szypkość, iaką ta siła nadat może miąższości iakiéj znanéméj, jest mówię, ta szypkość rozmnożona przez miąższość.*

158. Mnogość wynikająca z miąższości ciała przez szypkość, nazywa się *ilością ruchu* tego ciała. *Siły tedy mierzą się przez ilość ruchu, iaką w ciałach sprawić mogą.*

I

I tak, jeżeli oznaczmy tę mnogość przez F ; miąższość przez M ; szypkość przez V , mieć będziemy $F = MV$. To zrównanie $V = \frac{F}{M}$ i $M = \frac{F}{V}$, uczy mnie iód *Ze* mając

znaną siłę poruszającą, i miąższość ciała, można wiedzieć, jaką szypkość powinno mieć to ciało, rozdzieliwszy siłę poruszającą przez miąższość. 2re *Ze* mając znaną siłę poruszającą i szypkość, można wiedzieć jaka jest miąższość odpowiadająca tej szypkości i tej siły poruszającej, rozdzieliwszy siłę poruszającą przez szypkość. Ale należy pamiętać, że co my tu rozumiemy przez F czyli przez siłę poruszającą, jest skutek, jaki sprawić zdolna jest przyczyna dająca ruch ciała. I tento jedynie skutek wchodzić może, i trzeba ażeby wchodził w rachunek,

159. Więc, jeżeli f oznacza siłę poruszającą drugiego ciała, m miąższość jego, a u szypkość tej miąższości, to będzie podobnie $f = mu$; a zatem $F:f :: MV:mu$; to jest, że siły poruszające mają się między sobą, jak miąższości rozmnożone przez szypkości. Jeżeli zaś z każdego z tych zrównań wyciągniemy wartość głosek M i m , potem głosek V i u , to mieć będziemy stosunek między miąższościami, wyrażony w siłach i szypkościach, i stosunek między szypkościami, wyrażony w siłach i miąższościach; skąd wnosi się. iód *Ze* kiedy miąższości są sobie równe, to siły poruszające mają się między sobą jak szypkości. 2re *Ze* kiedy szypkości są sobie równe, to siły poruszające są między sobą jak miąższości. 3cie I że naostatek, jeżeli siły poruszające są sobie równe, to szypkości mają się między sobą, w stosunku odwrotnym miąższościów. O czem łatwo przekonać

nać się można, zrównawszy iedne do drugich z kolei wartości głosek M i m . V i u , naostatek F i f ; zrównania stąd wynikające przemienione w proporcją, wywodzą każde z tych podań.

160. Miąższość czyli liczba cząstek materyalnych każdego ciała, zależy od objętości i gęstości onego. Ponieważ ciała mają w sobie bardzo wiele próżnych dziurek, przeto ilość materyi w nich zawierającej się, niemoże bydz proporcjonalna ich objętości, ale pod tą samą objętością, zuaydować się musi tém więcej materyi, im ściśley będą w nię cząstki z sobą spoione; i taćto więkfsza lub mnieysza bliskość cząstek nazywa się gęstością; tak iż mówi się że to ciało jest gęstsze od tego lub owego, kiedy pod iednakową objętością piérwsze, zawiera w sobie więcej cząstek materyalnych jak drugie.

Gęstość tedy służy do oszacowania cząstek materyalnych, kiedy objętość będzie znaioma; a tak gęstość, można sobie wyobrazić, iakoby wyrażała liczbę cząstek materyalnych, zawartych w pewney iakięj objętości; a zatem kiedy się mówi że złoto jest 19 razy gęstsze od wody, to znaczy, że złoto w sobie ma 19 razy więcej cząstek aniżeli woda, zawarta w téjże objętości mięylca co złoto

to. W ten tedy sposób wyobraziwszy sobie gęstość, to jest jakoby wyrażającą liczbę części materialnych zawartych w jakiejś pewnej objętości, która bierze się za *jedność objętości*, iawna jest, iż ażeby mieć miąższość, albo sumnę wszystkich części materialnych, składających ciało wiadomej objętości, trzeba rozmnóżyć miąższość przez objętość. Np. jeżeli gęstość iednego ciała sześciennego złota, jest wyrażona przez 19, to ilość materji zawierający się w 10 ciałach sześciennych takiegoż złota, będzie wyrażona, przez 10 razy 19. A tak oznaczwszy ogołem miąższość przez M , objętość czyli bryłowatość przez S , a gęstość przez D , będzie $M = S \times D$; zrównanie, przy pomocy którego łatwo będzie wynaléśdź zachodzące stosunki, między miąższościami, bryłowatościami, i gęstościami ciał. Zobaczmy wkrótce, że miąższości ciał są proporcjonalne ich wadze, a zatem w użyciu można wziąć wagę zamiast miąższości.

O Ruchach iednokształtnie przyspieszonych.

161. **C**iało, które nieodebrało tylko ieden popęd, trwa w swoim ruchu; z tąż samą szypkością i w tymże kierunku, iaki do stało w piérwszym momencie (150). Ale jeżeli odbierze nowy popęd w témże albo w przeciwném rozumieniu, to natenczas ruchu się z szypkością równającą się summie albo

ró-

różnicy dwóch szypkościów, z kolei nabytych; i to jest oczywista.

Więc jeżeli w pewnych wymiarach czasu, ciało dostaie nowe popędy w témże rozumieniu albo w przeciwném popędowi piérwyszemu, to takowe ciało ruhać się będzie ruchem nierównym czyli odmiennym, i szypkość iego będzie coraż infsza na początku każdego wymiaru czasu. Atoli bądź co chce, szypkość takiego ciała uważona na końcu iakiegokolwiek czasu, powinna być szacowana podług rozległości, iaką przebieđz zdołałoby to ciało, w przeciągu iedności czasu, gdyby ruch iego odmiénił się w iednokształtny, rachując od tego momentu w którym uważa się pomiéniona szypkość.

Ogołem, nazywa się *siłą przyspieszającą*, wszelka siła, czyniąca przeciwko *Ruchadłu* (mobile), i sprawującą w niem ruch odmienny. Jeżeli takowa siła w równych przeciągach czasu, równo skutkuje to nazywa się *siłą iednokształtnie przyspieszającą*, albo *siłą iednokształtnie opóźniającą*; a to podług tego, iako dąży do pomnóżenia albo do umnięszczenia niniejszhey szypkości Ruchadła. Zastanówmy się teraz nad okolicznościami ruchu iednokształtnie przyspieszonego.

162. Ponieważ w takowym ruchu, siła przyspieszająca, skutkuje zawsze w iednakowy sposób, jeżeli oznaczymy przez g szypkość, iaką ta siła nadaie ciału w każdej iedności czasu, to iawna jest, że kolejnémi szypkościami Ruchadła, będą g ,

2g,

2g, 3g; tak iż po upłynioney liczbie czałow oznaczonéy przez t , szypkość nabyta powinna być wyrażona przez g , powtórzone tyle razy, ile będzie jednościów w t ; to jest, przez $g \times t$ albo przez gt .

163. Więc iód W Ruchu iednokształtnie przyspieszonym, liczby stopniów szypkości, iakiéy nabywa ruchadło, rosną iak liczby wymiarów czasu, przez których przeciąg ruch trwa; co wyraża się tak; Ze szypkości nabyte, mają się między sobą, iak czasy upłynione od początku ruchu. I tak oznaczywszy przez u szypkość, iakiéy nabyło ruchadło na końcu czasu t , będzie $u = gt$. 2re Szypkości tedy, w iakich ruchadło znajduje się kolejno przez przeciąg każdego z wymiarów czasu, ieden po drugim następującego, składają progresyją arytmetyczną $g, 2g, 3g, i. t. d.$, w któręy ostatnim wyrazem jest gt albo u , a liczbą wyrazów jest t , to jest, że liczba wyrazów jest oznaczona przez liczbę czynnościów siły przyspieszającej. 3cie A ponieważ szypkości $g, 2g, i. t. d.$ każda z nich nie jest co innego, tylko rozległość iaką ruchadło zdoła przebieść w przeciągu czasu odpowiadającym (151), więc rozległością całkowitą przebieżoną w czasie t , będzie summa wyrazów téżę progresyji arytmetycznéy; to jest podług (Alg.

271), będzie wyrażona przez $(g + u) \times \frac{t}{2}$.

Więc oznaczywszy przez e takową rozległość przebieżoną od początku ruchu, będzie $e = (g + u) \frac{t}{2}$.

164.

164. Teraz zmyślny sobie, że siła przyspieszająca skutkuje bez ustanku, albo co na iedno wychodzi, zmyślny sobie, czas t podzielony na niezmierną liczbę części niezmiernie małych, które nazwiemy chwilkami; i że na początku albo na końcu każdéy takiéy chwilki, siła przyspieszająca daie popęd ruchadłu. Zmyślny sobie nadto, że ta siła skutkuje stopniami niezmiernie małemi. Natenczas ponieważ g jest niezmiernie małe względem u , więc takowe g trzeba opuścić w zrównaniu $e = (g + u) \frac{t}{2}$, tak iż będzie tylko $e = \frac{ut}{2}$.

165. To założywszy, daymy że na końcu czasu t , siła przyspieszająca przestaie skutkować; ciało tedy (150) trwać będzie w ruchu swoim z nabytą szypkością u ; to jest że w każdéy jedności czasu, przebiegałoby rozległość $= u$ (151); więc gdyby nieustając, dalej bieżało z tą samą szypkością przez czas t , przebiegłoby rozległość $= u \times t$, to jest dwa razy tak wielką, iak e albo $\frac{ut}{2}$, którą prze-

biegło w czasie równym, mocą kolejnéy czynności siły przyspieszającej. Więc, w Ruchu iednokształtnie i nieustannie przyspieszonym, rozległość przebieżona w przeciągu pewnego czasu, jest połową téy rozległości;
Tom III. Q 165

iaką ruchadło może przebieżyć w czasie równym pierwszemu, z szybkością nabytą iednokształtnie aalę trwającą.

166. Ponieważ (163) szybkości nabyte, rosną iak czasy uplynione, więc jeżeli oznaczymy przez p szybkość nabytą na końcu iednej minuty wtórę; to po liczbie t minut wtórych, szybkość nabyta, będzie wyrażona przez pt ; tak iż będzie $u = pt$. A zatem zrównanie $e = \frac{ut}{2}$ wyżej wynalezione, przemieni się na $e = \frac{ptt}{2}$.

Więc, jeżeli oznaczymy przez E , inną rozległość przebieżoną w tenże sposób, w przeciągu czasu T , to będzie podobnie $E = \frac{pT^2}{2}$; skąd wnosi się, $e : E :: \frac{ptt}{2} : \frac{pTT}{2} :: tt : TT$; co daie znać, że rozległości przebieżone w ruchu iednokształtnie i niustannie przyspieszonym, mają się między sobą iak kwadraty czasów.

167. A ponieważ podług (163), szybkości mają się między sobą w stosunku czasów, więc rozległości przebieżone muszą także mieć się między sobą w stosunku, kwadratów szybkościów.

168. Więc, szybkości i czasy mają się między sobą, iak pierwiastki kwad-

kwadratowe rozległościów przebieżonych od początku ruchu.

169. To wszystko zarówno służy ruchom iednokształtnie opóźnionym, byleby przez czasy, rozumieć te, które zostają do upłynięcia, póki się szybkość niezniszczy; i byleby przez rozległości znowu rozumieć, te które zostają do przebieżenia póki się taż szybkość niezniszczy.

170. W zrównaniu $e = \frac{pt^2}{2}$ wyżej wynalezionem (166), ilość p , przez którą oznaczyliśmy szybkość, iaką może sprawić siła przyspieszająca, mocą kolejnę czynności swoięy, przez przeciąg iednej minuty wtórę, jest to co odtąd nazywać będziemy *siłą przyspieszającą*; bo o tęg siłę sądzić się powinno ze skutku, iaki sprawić może w ruchadle w pewnym przeciągu czasu; skutek, który niezależy na czem innem tylko na udzieleniu pewnę szybkości.

O Ruchu swobodnym ciał ważnych.

171. Do tego rodzaju ruchu którzy dopiéro uważaliśmy, należy rach ciał ważnych. Ale nim przystoiemy do niego teorią - wzwyż założoną, wprzód trzeba nam rozważyć niektóre okoliczności tyczące się ważności. Przez ważność, rozumię się ta siła, mocą którę ciało dąży do upadku w kierunku linii pionowych, albo pro-

Q 2

sto-

stopadłych względem powierzchni wód. Gdyby ziemia, albo gdyby powierzchnia wód była postaci doskonałe kulowéj, to wszystkie kierunki ważności zbiegałyby się do środka. A lubo ta powierzchnia niema doskonałej postaci kulowéj, atoli przynajmniej niewiele różni się od niéj, tak iż w tych materjach które traktować mamy, kierunki ważności uważać możemy bez znacznego błędu, iakby zbiegały się do środka ziemi.

Już indziej (Jeom 338) mieliśmy okazywać powiedzieć, że promień ziemi, uważony iakby była postaci kulowéj, wynosi 19605480 ft. A frąd łatwo wnieść sobie można, że kątowi środkowemu od iednéj minuty wtóréj, odpowiadać musi na powierzchni ziemi, rozległość od $15\frac{2}{3}$ sąż. A zatem w silni długiej na 16 sąż, do równoległości między kierónkami ważności, skutkującemi z dwóch końców téj silni, niebrakowałoby tylko kąta od iednéj minuty wtóréj. Wjéc, w iednémże miéyscu, kierónki ważności można póczytać za równoległe.

Co się tycze wielkości téj siły, to takowa (biorąc ściśle), wypada różna w różnych odległościach od *Ekwatora*, i w różnych oddaleniach od środka ziemi. Ale różnice, wynikające z różnych odległościów od *Ekwatora*, są bardzo małe, i na nich teraz nic nam nie zależy. Toż rozumieć się ma, o umniejszających się ważności, im

im bardziej oddalamy się od środka ziemi; bo to nie może uczynić znacznie odmiennego skutku, aż dopiero w odległościach daleko większych, aniżeli są te wysokości do których możemy się podnieść, albo głębokości do których możemy się spuścić. Dla czego, ważność, póczytamy tu za siłę wszędzie iednakową, to jest mocą której ciało dąży do upadku na iednaką ilość w iednakim czasie.

Tę siłę trzeba uważać iako skutkującą, równo w każdym momencie nad każdą cząstką materji. Jawna zaś jest, że jeżeli każda z cząstek ciała odbiera iednakową szypkość, to całe ciało ruchać się musi tylko z taką szypkością, iakaby miała iedna z cząsteczek oddzielona od tego ciała; tak iż szypkość, iaką nadaie ważność iakiéykółwiek miąższości, od wielkości téj miąższości wcale nie niezależy, i jest też sama w małej miąższości co w wielkiej. I lubo nie widzimy ażeby wszystkie ciała, z iednakowéj wysokości upadały w iednakim przeciągu czasu, atoli ta różność, jest iedynie skutkiem odporu powietrza, iak zobaczymy niżej; tak iż spuszczaiąc ciała w miéyscu wypróżnioném z powietrza, da się widzieć iako ciała, lubo bardzo daleko od siebie różne w miąższości, atoli z iednakowéj wysokości upadają w iednakim czasie.

A ta należy nam uczynić różnicę między skutkiem ważności i skutkiem wagi. Skutek ważności jest tén, iż takowa nadaie albo dąży do nadania każdéj cząstce materji pewnéj szypkości, która od liczby cząstek materialnych wcale niezależy. Waga zaś, równa się uśilności, iakiej trzeba użyć, chcąc przeskoczyć ażeby miąższość

iaka, niebyła posłuszną swoiemy ważności. A takowa uślisność zależy od dwóch rzeczy, to jest od szypkości, do której nadania każdej części, dąży ważność, i od liczby części, które niejako ożywia albo dąży do ich ożywienia też ważność. A że szypkość, do której nadania dąży ważność, jest w każdej części materji też sama, więc uślisność której potrzeba użyć, musi być proporcjonalna liczbie części materjalnych, to jest miąższości. *A zatem waga zawisa od miąższości, a ważność wcale od niej niezależy.* Ta uwaga względem wagi ciał, potwierdza to co już wyżej namieniliśmy (160), to jest, że miąższość jest proporcjonalna wadze.

172. Po założeniu tych wiadomości ściągających się do ważności, przystąpmy teraz do prawideł ruchu ciał ważnych. Ponieważ ważność skutkuje równo i bez ustanku, choćby ciało w jakiegokolwiek bądź odległości znajdowało się od powierzchni ziemi, (przynajmniej co do takich wysokościów do jakich tylko podnieść się możemy), przeto ta pomieniona ważność, jest statecznie przyspieszającą, nadającą co moment ruchadłu nowy stopień szypkości, który zawsze jest jednakowy w każdym jednakowym momencie czasu; tak iż podług (163 i dalej), szypkości nabyte pomnażają

ia

ią się iak czasy upłynione; rozległości przebieżone, są iak kwadraty czasów, albo iak kwadraty szypkościów; szypkości są iak pierwiastki kwadratowe rozległościów przebieżonych; i czasy są także iak pierwiastki kwadratowe tychże rozległościów przebieżonych; słowem, to wszystko co powiedziało się o silach przyspieszających statecznych, słowo w słowo fluży ważności. Byłoby uważać, że w tém wszystkim, niemamy względu ani na odpór powietrza, ani na żadną inną przeskodę.

Zeby tedy można było naznaczyć czasy, rozległości i szypkości w ruchu ciał ważnych, do tego nie trzeba więcej, tylko mieć znaiomy iaki jeden skutek ważności w pewnym iakim czasie znaiomym. Albowiem

zrównania $u = pt$ i $e = \frac{pt^2}{2}$, pokazują nam

drogę do wynalezienia czego potrzeba będzie z tych rzeczy, bylebyśmy tylko mieli znaiomą wartość głoski p . Przypomniemy więc sobie (166), że przez p rozumieliśmy szypkość iakię nabywa ruchadło na końcu jednej minuty wtorey. Tym czasem wiemy z doświadczenia, (iak to zaś było wynaleziono zobaczymy niżej), że ciało które-muby powietrze nieczyniło znacznego odporu, w pierwszej minucie wtorey upadku swego, ubiega 15 $\frac{1}{2}$ ft., albo raczy 15,098 ft.

Q 4

Skąd

Skądinąd znowu wiemy, że ruchadło, mocą szypkości nabytej od kolejnych popędów, w podobnymże czasie, mogłoby przebieżyć tyle dwójce w ruchu iednokształtnym. Więc szypkość iakię nabywa ciało na końcu pierwszej minuty wtorej, jest taka, iż gdyby ważność ustała dalej skutkować, to ubiegłoby w każdej minucie wtorej dwa razy $15\frac{1}{2}$ ft., to jest 30,2. Więc $p = 30,2$.

173. Teraz powróciwszy do zrównania $u = pt$ i $e = \frac{pt^2}{2}$; pierwsze z nich uczy nas,

iż ażeby mieć szypkość iakię nabyło ciało ważne w przeciągu upadku swego trwającego przez liczbę minut wtórych t , trzeba rozmnóżć szypkość nabytą przeciągu pierwszej minuty wtorej, przez liczbę t minut wtórych. Więc, kiedy ciało ważne trwało w upadku przez jakąkolwiek liczbę minut wtórych, to szypkość tego nabyta będzie taka, iż gdyby ważność przestała dalej skutkować, to na każdą minutę wtórą ubiegłoby tyle razy 30,2 ft. ile upłynęło minut wtórych.

I tak ciało które do upadnięcia potrzebowało siedmiu minut wtórych, na końcu takowych 7 minut, nabyłoby takię szypkości, iż mocą ię, mogłoby na jedną minutę wtórą ubieżyć 7 razy 30,2 ft. to jest 211 $\frac{1}{2}$ ft. bez wszelkiego nowego popędu.

174. Drugie zaś zrównanie $e = \frac{pt^2}{2}$, daie znać, iż ażeby mieć rozległość czyli wysokość e , z której ciało ważne upada w przeciągu liczby t minut wtórych, trzeba rozmnóżć $\frac{1}{2}p$, to jest rozległość jaką przebiega w pierwszej minucie wtorej, trzeba

ią mówię rozmnóżć przez kwadrat liczby minut wtórych. Więc, wysokość z której ciało ważne upada, w przeciągu liczby t minut wtórych, składa się z $15\frac{1}{2}$ ft. tyle razy powtórzonych, ile znajduje się iednościów w kwadracie téżże liczby minut wtórych.

I tak ieżeli ciało potrzebowało 7 minut wtórych do upadnięcia, można bydz pewnym, iż spadło z wysokości, wynoszącej 49 razy $15\frac{1}{2}$ ft. to jest wynoszącej 740 ft. z małym uchybieniem; gdzie zawsze rozumiemy że odpór powietrza niema miysca. A stąd pokazuje się, iż byleby mieć wiadomy czas upłyniony, niemasz nic łatwiejszego iak wynaléść szypkość nabytą i przebieżoną rozległość.

175. Chcąc znowu wiedzieć iak wiele czasu ciało potrzebowałoby do upadnięcia z iakięj wysokości znanoméj; trzeba uważć, iż zrównanie $e = \frac{1}{2}pt^2$, daie $t^2 = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$, a zatem $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$; to jest, że trzeba szukać wiele razy takowa wysokość e , zawiera w sobie wysokość $\frac{1}{2}p$, z której ciało ważne spada w pierwszej minucie wtorej, a potem z tego wielorazu trzeba wyciągnąć kwadratowy pierwiastek.

176. Gdyby mi zaś trzeba było docho-
dzić, z iakięj wysokości ciało ważne po-
winnoby upaść, ażeby nabyło pewnéj szyp-
ko-

kości, to jest szypkości, mocą której mogłoby przebieżyc iednokształtnie pewną liczbę stóp w iednėj minucie wtórej; to naprzód z zrównania $u = pt$, wyciągnąlbym

wartość głoski t , miałbym $t = \frac{u}{p}$, potem

kwadrat téj wartości położylbym w zrównaniu $e = \frac{1}{2}pt^2$ zamiast t^2 , skąd wypadłoby

mi $e = \frac{1}{2}p \times \frac{u^2}{p^2} = \frac{u^2}{2p}$; zrównanie, które mnie

uczy, iż: *Ażeby dōyśdź wysokości e , z której ciało ważne powinno by upaśdź, dla nabycia szypkości u , wynoszącej pewną liczbę stóp na iedną minutę wtórą, trzeba rozdzielić kwadrat takowéj liczby stóp przez podwójność szypkości, iakiéy nabywa ciało na końcu iednėj minuty wtórej, to jest przez 60,4.*

I tak, chcąc wiedziéć, z iakiéy wysokości ciało ważne powinno by upaśdź, żeby nabyło szypkości 100 st. na iedną minutę wtórą; dzielię kwadrat $100 = 10000$, przez 60,4; a wypadający wieloraz 165 $\frac{1}{2}$ pokazuje mi, iż ciało dla nabycia pomienionéj szypkości 100 st. na iedną minutę wtórą, powinno by upaśdź z wysokości wynoszącej 165 $\frac{1}{2}$ st. Jawną jest, iż podobnymże sposobém trzeba by sobie postąpić chcąc dōyśdź do iakiéy wysokości podniosłoby się ciało wyrzucone pionowó, z nadaną sobie pewną szypkością.

177. Ponieważ, (iako widziéć się daie z poprzedzających przykładów), można bardzo łatwo obrachować wszelkie okoliczności, tyjące się ruchu ciał ważnych, prze-
to

to pospolicie wszelkie inne ruchy, naprowadzają się do tego rodzaju ruchu; tak iż częstokroć, zamiast co by miała bydź zadana bezśrzednie szypkość ciała, to zadaje się tylko wysokość z której ciało powinno by upaśdź, żeby nabyło téj szypkości mocą skutkującej ważności.

Uważmy tedy na zakończenie téj materji, iż wszystkie okoliczności ruchu przypieszonego, a zatém i ruchu, ciał ważnych, zamykają się w tych dwóch zrównaniach, $u = pt$, i $e = \frac{1}{2}pt^2$; tak iż mając znaiome p , byleby była wiadoma iedna z tych trzech rzeczy, to jest, albo czas, albo rozległość, albo szypkość, zawsze można wynaléśdź dwie inne, bądźto bezśrzednie, przy pomocy tego lub owego z dwóch zrównań wzwyż ustanowionych, bądź téż przy pomocy obu razem, połączonych iedno z drugim, w sposób w który postąpiliśmy sobie wyżej (176).

O Ruchach różnokształtnych, czyli odmiennych w sposób bądź iaki chce rozmaity.

178. **K**iedy ruchadło jest poddane czynności iakiéy siły, skutkującej przeciwko niemu bez ustan-ku, ale w sposób odmieniający się co chwila, to ruch taki w powszechności nazywa się *ruchem różnokształtnym.*

tnym. Ruchu różnokształtnego mamy przykłady, w odprężeniu sprężyn, gdzie lubo szypkość, pomnaża się coraż bardziéj, ale stopnie takowego pomnażania, są coraż mniéysze. Toż rozumié się o stopniach, którém, statek płynący przychodzi do iednokształtności: czynność wiatru przeciwko żaglom, u mniéysza się tém bardziéj, im większego ruchu nabywa statek; bo takowy tém bardziéj odéymuje się pomiénionéj czynności wiatru, im większą szypkość ma statek.

179. Fundamenta służące do naznaczenia własnościów tego ruchu, mogą być łatwo wniesione stąd, co się powiedziało o ruchach iednokształtnych, i iednokształtnie pomnożonych, a to w tén sposób. *10d* Niechay będzie iaki chce ruch odmienny, jeżeli go uważać będziemy względem chwil niezmiérnie małych, to zawsze rozumiéć można, że szypkość w przeciągu takowéj chwili nieodmiénia się. Lecz szypkość iednokształtna, ma za wyrażenie, rozległość przebieżoną w czasie jakimkolwiek t , rozdzieloną przez ténże czas t ; więc kiedy takowa szypkość nie jest iednokształtną tylko przez iedną chwilkę, to na wyrażenie swoje, mieć będzie rozległość niezmiérnie małą, przebieżoną w téjże chwili, i rozdzieloną przez ténże chwilkę. A zatem oznaczywszy przez e rozległość przebieżoną, mocą ruchu odmiennego w przeciągu czasu iakiegokolwiek t , to de wy-

żać

żać będzie, rozległość przebieżoną iednokształtnie w przeciągu chwili dt ; będzie tedy $u = \frac{de}{dt}$, albo $de = udt$; pierwsze zrównanie fundamentalne, należące do ruchów różnokształtnych.

180. 2re Zrównanie $u = pt$, wyżéj wynalezione (166), wyrażające stosunek zachodzący między szypkościami i czasami w ruchach iednokształtnie przyspieszonych, daie $p = \frac{u}{t}$. To jest, że kiedy siła przyspie-

fzaiąca, albo raczéj ilość p wymierzająca takową siłę (170) jest stateczna, to na wyrażenie swoje mieć będzie, szypkość u nabytą w pewnym czasie t , a rozdzieloną przez ténże czas t . Więc jeżeli ta siła przyspieszająca p , w każdéj chwili inaczéj skutkuje, to jest jeżeli nie jest stateczną tylko przez iedną chwilkę, to powinna mieć na wyrażenie swoje, szypkość nabytą w przeciągu takowéj chwili, rozdzieloną przez ténże chwilkę; to jest że powinna mieć na swoje wyrażenie, pomnożenie szypkości, rozdzielone przez pomnożenie czasu; będzie tedy $p = \frac{du}{dt}$, albo $du = p dt$; drugie zrównanie fundamentalne, należące do ruchów różnokształtnych.

181. W zrównaniu $u = pt$, przez p (166) rozumieliśmy, szypkość iakaby ruchadłu nadać mogła siła przyspieszająca w przeciągu iakiego pewnego czasu, (iakoto iednéj minuty

ty wtóréy), mocą czynności nieustannéy i zawsze równéy. Toż samo tedy i w równaniu $du = pdt$, przez p rozumieć się powinno. Ale trzeba nam tu uważać, że ponieważ siła przyspieszająca rozumieć się bydz odmienną, przeto ilość p , przez którą oznacza się szypkość, iaką pomieniona siła mogłaby sprawić w przeciągu iednéy minuty wtóréy, gdyby skutkowała tak iak siła przyspieszająca stateczna, ta mówię ilość p odmienna się za każdą chwilką ruchu. Jakóż łatwo to daie się poiać, że kiedy siła przyspieszająca staie się mnieyszą, to i szypkość, iaką mogłaby sprawić ta siła w iednéy minucie wtóréy, mocą nieustannéy czynności swoiéy, skutkuiący równo w każdéy chwilce téż minuty wtóréy, także musi stawać się mnieyszą; i odwrrotnie.

182. Z dwóch równań, $de = udt$ i $du = pdt$, może bydz wniesione inne trzecie, niemniéy pożytecznie służące do użycia, tym sposobém. Z równania $de = udt$, wyciąga się $dt = \frac{de}{u}$; a położywszy tę wartość w równaniu $du = pdt$, po uczynioném zebraniu, będzie $pde = udu$.

183.

183. Uważmy, iż w równaniu którego użyliśmy do wynalezienia równania $du = pdt$ (180), szypkość rozumieliśmy bydz rosnącą. Gdyby zaś była ubywająca, to zamiast du , trzebaby położyć $-du$ (21); tak, iż dwa poprzedzające równania, $du = pdt$ i $pde = udu$, powinny się tak pisać, $\pm du = pdt$ i $pde = \pm udu$, gdzie znak wyższy należy do ruchu przyspieszonego, a znak niższy należy do ruchu opóźnionego.

184. Jest jeszcze i czwarte równanie wynikające z dwóch równań fundamentalnych, którego nienależy nam tu opuścić. Jest zaś takie. Z równania $de = udt$, daie $u = \frac{de}{dt}$; więc $du = d\left(\frac{de}{dt}\right)$; położywszy tę wartość w równaniu $pdt = \pm du$, będzie $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$. A poczytawszy (co zawsze wolno) ilość dt za stateczną, będzie $pdt = \pm \frac{dde}{dt}$, albo $pdt^2 = dde$. A o tém trzeba dobrze pamiętać że tu dt rozumie się bydz stateczne. Uważając zaś dt , iako odmienne, trzeba używać równania, $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Będziemy mieli okazją nieraz użyć pożytecznie tych formuł. Ale na to trzeba zawsze pomnieć, że ilość p zawierająca się w tych równaniach, wyraża szypkość odpowiadającą każdéy chwilce, iaką siła przyspieszająca, mogłaby nadać ruchadłu, w przeciągu czasu wiadomego, iakoto iednéy minuty wtóréy, gdyby przez takową minutę wtórą tak skutkowała, iak siła stateczna przyspieszająca; a zatem ponieważ ta ilość p , jest wymiarém skutku odpowiadającego każdéy chwilkę

chwilce, iaki może sprawić siła przyspię-
fzająca, przeto dla krótszego wyrażenia, od-
tąd nazywać będziemy tę ilość p siłą przy-
spieszającą.

*O Równowadze między siłami
w bręw sobie przeciwnymi.*

185. **D**otąd uważaliśmy ruch, iaki
ki powinno mieć ciało,
poddane czynności siły, skutkują-
cay przeciwko niemu zawżę w ie-
dnakowym kierunku. Ale ieszcze
nieuczyniliśmy żadney wzmianki o
sposobie, w iaki, ten ruch przecho-
dzi w ruchadło. Na rozebraniu téy
rzeczy niemało nam zależy; ale że
prawa podług których udziela się
takowy ruch; zawisły od praw na-
leżących do równowagi, iak zoba-
czymy niżej, przeto trzeba nam
wprzód załtanować się nad temi.
Teraz rzecz tu będzie, tylko o Ró-
wnowadze między siłami w bręw
sobie przeciwnymi. Gdzie siły, o-
znaczać będziemy przez skutki, do
których sprawienia są zdolne, iak iuż
uczyniliśmy wyżej; to iest każdą
oznaczymy przez ilość ruchu pe-
wnéy miąższości wiadomey. Ale
żebyśmy wiele rzeczy razem nieo-
béy-

béymowali, uważać będziemy te
miąższości, każdą iakoby w ieden
punkt zebraną, któremu w myśli
naznaczymy też samę ilość materyi
którą ma całe ciało. Jakóż zoba-
czymy niżej, iż w rzeczy samey, we
wszystkich ciałach znayduie się taki
ieden punkt, którym udziela się ruch,
tak iak gdyby w nim cała miąższość
była skupiona. Nadto uważać be-
dziemy ciała, (póki nieostrzeżemy
inaczey), iako złożone z cząstek do-
skonale twardych, i tak połączonych
iedne z drugimi, iż w położeniu
ich żadna siła nie odmiénic niemoże.

186. To założywşy na przód, zmyśla-
my sobie dwie miąższości czyli bryły M i
 m (fig. 27); pierwszą popędzoną od A ku C fig. 27
z szypkością V ; drugą popędzoną od C ku A ,
z szypkością u ; kiedy te dwie bryły spotka-
ią się z sobą, to zostaną w równowadze;
jeżeli ilość ruchu bryły M , równa się ilo-
ści ruchu bryły m ; to iest jeżeli (158) bę-
dzie $MV = mu$.

Jakóż naprzód iawna iest, że jeżeli
dwie bryły M i m są sobie równe, i obie
szypkości V i u także sobie są równe, to
muś być między temi dwiema bryłami ró-
wnowaga; bo w takim razie, taż sama przy-
czyna, która naznaczyłaby się na dowód
tego, że M powinno przemódz m , dowo-
dziłaby na odwrót że m powinno przemódz
 M ; ponieważ wszystko z obu stron znay-
duje

duie się w równości. Teraz daymy że M jest dwa razy tak wielkie jak m ; ale natomiast znowu u niech będzie dwa razy tak wielkie jak V ; tak iżby np. M przebiegało jedną stopę, a m dwie stopy w jednej minucie wtorej. Jawną jest, że mogą uważać M jakoby złożone z dwóch miąższościów równających się bryle m ; i że w samej chwili uderzenia, mogą wystawić sobie w myśli ciało m , jakoby nadane szypkością jedną stopy na jedną minutę wtórą, do której w téż chwili byłaby dodana druga szypkość, wynosząca także jedną stopę na jedną minutę wtórą. A natenczas, wolno mi jest zmyślić sobie, że w uderzeniu, bryła m wyniszcza jedną z swoich szypkościów przeciwko części bryły M , równającej się téż całej bryle m ; a drugą szypkość wyniszcza, przeciwko drugiej części takież pozostalej bryły M .

Teraz zaś, gdyby zamiast cośmy uważali bryły M i m w stółunku Q do 1, a przeciwnie szypkości ich w stółunku 1 do Q , gdybyśmy mówię rozumieli je bydz w jakimkolwiek innym stółunku; to iawną jest, że można zawsze wystawić sobie w myśli większą bryłę jakoby rozłożoną, na pewną liczbę brył równających się mniejszej bryle, z których każda wyniszcza w mniejszej bryle szypkość równającą się swojej szypkości, tak iż zasadę następującą można położyć za powszechną.

ZASADA FUNDAMENTALNA.

Dwa ciała skutkujące jedno przeciw drugiemu, w kierunku linii w bręw sobie przeciwnych, zostają w równowadze, kiedy ich ilości ruchu są sobie równe; to jest, kiedy mnogość wynikająca z rozmnożenia miąższości jednej bryły,

ły, przez szypkość jaką jest nadana, równa się mnogości, wynikającej z rozmnożenia miąższości drugiej bryły, przez szypkość odpowiadającą téż drugiej bryle. To podanie w powszechności zawsze ma miejsce, czyto będą dwa ciała takie, które swobodnie dążą jedno naprzeciwko drugiemu, czy takie, że jedno drugie popycha, przy pomocy linii Mm ani giętkiej ani miąższej; czyli téż naostatek takie, że jedno drugie ciągnie w rozumieniu przeciwnym przy pomocy nitki Mm nieociągającej się (inextensible). I odwrotnie, jeżeli dwa ciała są w równowadze, to trzeba stąd wnieść, że ich ruchy są sobie w bręw przeciwne, i ilości ruchu mają równe:

187. Więc, jeżeli trzy, albo większa liczba ciał M, m, m' i. t. d. (fig. 28), będących w ruchu albo fig. 28: dążących do ruchu w kierónknie jednejże linii, z szypkościami V, u, i, u' , znajdują się w równowadze, to summa ilościów ruchu ciał czyniących w jednym rozumieniu, musi bydz równa summie ilościów ruchu, ciał czyniących w rozumieniu przeciwnym.

Albowiem, jeżeli znajdują się w równowadze, to zawsze można rozumieć, że gdy M i m dążą w jedną stronę, to m wyniszcza jedną część ruchu ciała m' , a M wyniszcza resztę. Lecz oznaczywszy przez x , szypkość, jaką utracą m' mocą czynności ciała m , mieć będziemy $m'x$, na ilość ruchu, wyniszczoną mocą takowey czynno-

ści; będzie tedy $mu = m'x$; a zatem ciała M , niezoftanie do wyniszczenia w ciele m , tylko reszta pozostałej ilości ruchu, to jest $m'u$ — $m'x$; więc będzie $MV = m'u - m'x$; albo z przyczyny że $m'x = mu$, będzie $MV = m'u - mu$, to jest $MV + mu = m'u$.

O Ruchu składanym.

188. **R**ozumieć i tu trzeba, że miaz-
łożone sily, o iakich mówić mamy, są
fkupione iakoby w ieden punkt. Na-
zywa się Ruch składany, tén, iaki
bierze ciało, razem popędzone od
wielu sił, mających takie kierónki
iakie się spodoba.

fig. 29. Jeżeli ciało M popędzone w kierónku li-
nii prostej AB (fig. 29), dobiegłszy punktu M ,
odbiera nowy popęd w kierónku linii MD ,
prostopadłej linii AB ; takowy popęd nie-
może uczynić innego skutku, tylko że mu-
si oddalać ciało M od linii AB ; nie może zaś
ani powiększyć ani umniejszyć téj szypko-
ści, iaką powzięło na oddalenie się od linii
 CD , prostopadłej linii AB . Jakóż, ponie-
waż kierónek CD jest prostopadły kierón-
kowi AB , więc niema żadnej przyczyny
ażeby siła czyniąca w kierónku CD , skutko-
wała raczén w prawą aniżeli w lewą stro-
nę téj linii; a iż nie może skutkować razem
na obie strony, więc niepowinna skutkować
ani na tę ani na owę.

Toż samo rozumowanie miałoby miéy-
sce, gdybysmy pozwolili że ciało M , po-
pędzone w kierónku linii CD , odebrało no-
wy popęd w kierónku MB ; ta ostatnia siła
ani-

aniby uieła aniby co przydała do szypko-
ści, z którą ciało M dążyło do oddalenia
się od linii MB .

189. ZASADA FUNDAMENTALNA.
Jeżeli dwie sily P i Q (fig. 30), któ-
rych kierónki czynią kąt prosty, sku-
tkują razem w iednejże chwili prze-
ciekno ruchadło M ; siła Q niech bę-
dzie taką, iż mocą czynności swojej
momentalnej, mogłaby sama nadać mu
zdolność do przebieżenia linii MB w
peelnym iakowym wyznaczonym cza-
sie, iakoto w iednej minucie wtórej;
a siła P niech będzie taką, iżby te-
muż ruchadłu mogła nadać zdolność
do przebieżenia linii MD w tymże
czasie; to mówię że mocą złożonej
czynności tych dwóch sił razem sku-
tkujących, ruchadło M , w tymże cza-
sie, przebieży przecieprostokątną ME
równoległoboku $DMBE$, mającego za
boki też linie MB i MD .

Ponieważ obie sily skutkują razem w
iednejże chwili przeciwko ruchadłu, więc
można rozumieć iż znaydowało się w ru-
chu w kierónku linii PD , i że dobiegłszy do
punktu M , w tymże momencie siła Q pro-
stopadła linii PD , daie mu także swój po-
pęd; lecz podług tego co się powiedziało
dopiero wżéy (188), ta siła Q nie może
ani pomnożyć ani umniejszyć szypkości, z
którą ruchadło dążyło do oddalenia się od li-

nii QB ; więc jeżeli przez punkt D poprowadzi się linia DE równoległa linii MB , to ruchadło na końcu iednej minuty wtórej, musi znajdować się na jakim punkcie linii DE , który wszystkie punkta, są oddalone od linii QB na ilość równającą się linii MB . Lecz toż samo rozumowanie dopiero użyte do siły P względem siły Q , stosuje się słowo w słowo do siły Q względem siły P ; więc jeżeli przez punkt B poprowadzi się linia BE równoległa linii PD , to ciało M , na końcu téż iednej minuty wtórej musi znajdować się na którym punkcie linii BE . Ale że niema tylko ieden punkt E , któryby spólnie należał tak do linii DE iako téż do linii BE , więc ruchadło na końcu iednej minuty wtórej znajdować się musi w punkcie E .

Nadto iawna iest (150), że niechay wezmie drogę iaką chce ruchadło, popędzone mocą momentalnéj czynności dwóch sił, to zawsze ta droga musi być linią prostą; bo po nadaniu popędu, pomiénione siły więcéy przeciwko niemu nieczynią; a zatem ponieważ tór téj drogi powinién przechodzić przez M i przez E , więc takową drogą musi być linia ME , to iest przeciwprostokątna równoległoboku $DMBE$. Przydajmy do tego, iż to ciało przebiega linią ME w ruchu jednokształtnym, bo natychmiast, po złożonéj czyli spólnéj czynności przeciwko niemu dwóch sił, iest zestawione samo sobie (150).

190. Ponieważ dwie siły P i Q , czyniąc spólnie przeciwko ruchadłu, niesprawuią innego skutku, tylko że mu nadaia zdolność do przebie-

że-

żenia przeciwprostokątnej ME , więc wniéśmy stąd. 1^o Ze zamiast dwóch sił których kierónki czynilyby kąt prosty, zawsze można użyć tylko iednej siły, byleby takowa, mogła nadać ruchadłu zdolność, do przebieżenia przeciwprostokątnej równoległoboku, mającego takie boki, z których każdy zosobna, moglby byđ przebieżony od tegóż ruchadła, mocą czynności siły odpowiadającéy temu każdemu bokowi. Takowa iedna siła ME wynikająca z dwóch sił MB , MD nazywa się złożona z tych dwóch sił. Ponieważ liniie MB , MD , oznaczają skutki, do iakich są zdolne siły Q i P każda zosobna, a linia ME oznacza skutek, do iakiego są zdolne te dwie siły razem złączone, więc można sobie w myśli wystawić, liniie MB , MD , ME , iakoby oznaczały same takowe siły.

2^o Można téż uważać siłę iedną iakąkolwiek ME , iakoby powstającą z dwóch innych sił MB , MD , których kierónki czynilyby między sobą kąt prosty, byleby, kiedy ta iedna siła oznaczy się przez

R 4

prze-

przeciwprostokątną ME , tamte dwie były oznaczone przez dwa boki MB , MD równoległoboku. Można tedy zamiast iednój siły ME , użyć dwóch sił MB i MD ; bo w samym skutku z takowych dwóch sił niewynika tylko siła ME .

191. Ogołem, kierónki dwóch sił P i Q , (fig. 31. 32), niechay czynią między sobą kąty bądź iakiekolwiek, kiedy te dwie siły razém skutkują przeciwko ruchadłu M ; to takowe ruchadło, przebieży przekątną ME równoległoboku $DMBE$, którego boki położone w kierónkach tych sił, oznaczają skutki, do iakich są zdolne te siły każda zosobna; przebieży mówię tę przekątną, w tymże czasie, w iakim mocą czynności iednój z tych dwóch sił, przebiegłoby bok oznaczający takową siłę.

Jakóż, zmyślmy sobie linią FMH prostopadłą przekątną ME , poprowadzoną przez punkt M ; i że przez punkta D , i B , są poprowadzone inne linie DF , BH równoległe, tudzież linie DG , BI , prostopadłe téż przekątną. Zamiast siły P , oznaczonój przez MD czyli przez przekątną równoległoboku $FMGD$, można (190), wziąć dwie siły ME i MG . Z téż przyczyny, zamiast siły Q , oznaczonój przez przekątną MB równoległoboku MBI , BI ,

BI , można wziąć dwie siły MH i MI . A zatem zamiast dwóch sił P i Q , można użyć czterech sił ME , MG , MH , MI ; z których złożona iedna siła musi być ta sama, co z dwóch pierwszych. Z tych zaś czterech sił, dwie MH i MI , nieprzykładają się nie do siły złożonój, iako czyniące w kierónkach przeciwnych, a sobie równe. Jakóż, łatwo widzieć się daie, że dwa trójkąty DGM , EIB są sobie równe, z natury równoległoboku; więc $DG = BI$; a zatem téż $ME = MH$.

A co się tycze dwóch sił MI , MG , tych kierónki ponieważ znajdują się w téż linii; więc skutkiem z nich wynikającym, powinna być summa dwóch skutków MG , MI (fig. 31), gdzie te dwie siły czynią w fig. 31. téż rozumieniu; a (fig. 32) skutkiem po fig. 32. winna być różnica tychże sił, gdzie czynią w rozumieniu przeciwném. Ale że trójkąt EIB równa się trójkątowi DGM ; więc będzie (fig. 31), $MI + MG = MI + EI = ME$; a (fig. 32), $MI - MG = MI - EI = ME$; więc cztery siły ME , MH , MG , MI , a zatem i dwie siły MD , MB niewyprowadzają innego skutku tylko siłę ME , wyrażoną przez przekątną równoległoboku $DMBE$, którego dwa boki MB , MD oznaczają dwie siły Q i P .

192. W tém co poprzedziło, dwie siły P i Q (fig. 30. 31. 32), oznaczyliśmy przez linie MD , MB , do których przebieżenia, pomienione dwie siły, nadałyby zdolność ruchadłu M ; to jest oznaczyliśmy je przez szypkości, iakie mogą mu nadać; lubo podług tego, co rzekło się indziéy (158),
pra-

prawdziwym wymiarem sił, powinna być ilość ruchu, jaką mogą sprawić. Ale że ilości ruchu (159), są między sobą w stosunku szypkościów, kiedy miąższość bryły jest ta sama, iak w terazniejszy przy-padku; więc na oznaczenie takowych dwóch sił zawsze możemy wziąć szypkości MD i MB .

Ale jeżeli zamiast zadanych bezśrzednie szypkościów, iakie ruchadłu M mogą nadać siły P i Q , byłyby zadane ilości ruchu, iakie, pomienione siły mogą sprawić w miąższościach znaiomych, to w takim razie linie MD i MB , trzebaby wziąć w stosunku takowych ilościów ruchu. Np. gdybym nieznął sił P i Q , tylko z téj własności, że siła P , może nadać szypkość wiadomą u bryle wiadoméj m , a siła Q może nadać szypkość wiadomą u' bryle wiadoméj m' ; to w takim razie zrobiłbym $MD : MB :: mu : m'u$. Albowiem, podług tego co się rzekło, trzebaby zrobić $MD : MB$ w stosunku szypkościów, iakie mogą nadać te dwie siły ruchadłu M ; a że pierwsza siła, mogąca sprawić ilość ruchu mu , jest zdólna do nadania ruchadłu szypkości $\frac{mu}{M}$ (158), a druga siła Q z téjże

przyczyny, jest zdólna do nadania ruchadłu M szypkości $\frac{m'u}{M}$; więc trzebaby zrobić $MD :$

$$MB :: \frac{mu}{M} : \frac{m'u}{M}; \text{ lecz } \frac{mu}{M} : \frac{m'u}{M} :: mu : m'u;$$

więc

więc w rzeczy samej należy zrobić MD i MB w stosunku ilościów ruchu, wymierzających pomienione siły P i Q . Ta uwaga może być pożyteczna, w porównywaniu skutków odpowiadających różnym siłom, przyłożonym do różnych ruchadeł. Ogólne podanie wzwyż wywiedzione (191). jest wielce użyteczne; bo to wszystko co ma nastąpić, niebędzie tylko prawie iego przy-stosowaniem.

193. Stąd iawnie pokazuje się, że jest rzeczą wcale obojętną, uważać ciało, iakoby popędzone spólną czynnością dwóch sił MB i MD (fig. 31.32), czyniących między sobą kąt iakikolwiek, albo też uważać go iakoby popędzone mocą tylko iednéj czynności oznaczonéj przez przekątną ME . I odwrotnie, wcale na iedno wychodzi, uważać ciało iakoby popędzone, mocą tylko iednéj siły ME , albo też uważać go iakoby popędzone, spólną czynnością razém dwóch sił, oznaczonych przez boki równoległoboku, w którymby siła ME była przekątną.

Np. niechay ciało iakie, w przeciągu iednéj minuty wtórój ruchem iednokształtnym, przebiega od M do E ; albo też niechay zostało w ruchu wzdłuż linii MB , tak ażeby ią przebiegło w iednéj minucie wtórój, a oraz niechby taż linia była prze-

nie.

niełona równolegle sama sobie wzduż linii MD , tak iżby przebiegła MD w téżę mi-
nucie wtórej, to w takim razie znajdzie
się, że ciało w tym drugim ruchu zarówno,
nieprzebieży innéj linii, tylko ME .

194. Ponieważ dwie siły MB , MD
spotykają się w punkcie M , więc koniecz-
nie muszą znajdować się na téżę płaszczyźnie
(Jeom. 177). A że z tych dwóch sił powsta-
ła jedna siła, wyraża się przez przekątną
 ME , która jest położona na téżę płasz-
czyźnie równoległoboku; więc można po-
wiedzieć w powszechności: Ze dwie siły spo-
tykające się, znajdują się zawsze na téżę pla-
szczyźnie, na której znajdują się jedna siła
z nich złożona.

O składaniu i rokładaniu sił.

195. **N**a fundamencie dopiero wy-
żéj podanym, nietylko mo-
żna dwie siły spółnie czyniące prze-
mienić w iedną, iako téż iedną siłę
rozłożyć na dwie inne; ale téż ogó-
łém można zbić w iedną siłę tyle
sił ile się spodoba, byleby wszystkie,
albo znajdowały się na iednéjże
płaszczyźnie, albo wszystkie zbiega-
ły się w iednym punkcie. I odwro-
tnie, można zawsze rozłożyć iedną
lub więcej sił, na taką liczbę innych
sił iaka się spodoba.

196. Ale wprzód nim przy-
stąpimy, do pokazania iak się to
wy-

wykonywa, trzeba uważać, że kie-
dy siła P , (fig. 33), czyni przeci-
wko iakiemu ciału, bądźto pope-
dzając go, bądź téż pociągając go
do siebie, mało na tém zależy, ro-
zumić w którymkolwiek punkcie
kierónku téj siły bydz położoną
iéz czynność.

Np. iedno to jest, czy siła P pociąga
do siebie ciało C w punkcie P , przy pomo-
cy pręta ani miąższego ani giętkiego, lub
nitki nieociągającej się i niemiąższej, albo
téż czy go pociąga w punkcie A albo w
punkcie B , albo w punkcie C , albo téż czy
go popędza w iakimkolwiek innym punkcie
 D , spoionym z témże ciałem. Byleby tyl-
ko czynność siły odbywała się w iednym-
że kierónku, to zawsze sprawować będzie
tenże sam skutek. Odległość niemoże wpły-
wać w takowy skutek, tylko w tén czas,
kiedyby czynność siły udzielała się przy po-
mocy iakiego narzędzia, iakoto drąga albo
sznura, którego miąższość dzieliłaby czyn-
ność pominionéj siły.

I tak ieżeli dwie siły P i Q (fig. 34), fig. 34.
skutkujące na jednéjże płaszczyźnie w kie-
rónkach linii AQ , BP , pociągają albo po-
pędzają ciało w dwóch punktach A i B ; to
takowe ciało nieinaczéy znajdzie się bydz
nagabane, tylko iak gdyby te dwie siły cią-
gnęły go obie w punkcie I , gdzie się zbie-
gają, w tychże kierónkach iak piérwéy.
To założywşy, przystąpmy teraz do spo-
sobów składania i rokładania sił.

197. Daymy że mamy cztery
fig. 35. siły P, Q, R, S , (fig. 35) skutkujące
w kierónkach OP, AQ, BR, TS ,
wszystkie położone na iednéyże płaszczyźnie. Przedłużmy naprzód
myślą kierónek PO , ażby się spo-
tkał z kierónkiem AQ w punkcie
 A ; pozwólmy przy tém, że AD i
 AE są rozległości, do których prze-
bieżenia, w pewnym czasie iakoto
w iednéy minucie wtóréy, odpowia-
dające im siły P i Q mogłyby na-
dać zdolność iakiemu pewnemu ru-
chadłu; jeżeli zamknijemy równole-
głobok $AEID$, to linia przekątna
 AI , wyrażać będzie (191), czyn-
ność wynikającą z dwóch sił P i Q ,
a zatém może zastępować miéysce
tych dwóch sił.

Zmyślmy sobie dalej, że linia AI
przedłużona, spotyka się w punkcie B z
kierónkiem BR , siły R ; a zrobiwszy linią
 $BM = AI$, jeżeli weźmiemy BF , na wy-
rażenie rozległości, do którój przebieżenia
w iednéy minucie wtóréy, siła R może na-
dać zdolność temuż ruchadłu co wyżej; to
natenczas, rozumiejąc siłę AI przyłożoną
w punkcie B , (gdyż ta siła oznacza się
przez $BM = AI$), z ięy czynności spól-
néy z siłą R , wyniknie iedna siła, oznaczo-
na przez przekątną BG równoległoboku
 $BMGF$; takowa tedy siła, będzie zastępo-
wać

wać miéysce siły R i siły AI , to iest będzie
zastępować miéysce trzech sił R, Q i P .

Naoftatek zmyślmy sobie, że linia BG
przedłużona, spotyka się z kierónkiem TS ,
siły S , w punkcie C , a zrobiwszy $CK = BG$,
daymy że CH wyraża rozległość, do któ-
rój przebieżenia w iednéy minucie wtóréy
siła S może nadać zdolność temuż ruchadłu
co wyżej; to natenczas, rozumiejąc siłę BG
przyłożoną w punkcie C w kierónku CG ,
oznaczoną przez CK , z spólnéy czynności
tęy siły z siłą S , wyniknie iedna uśilność
oznaczona przez przekątną CN równole-
głoboku $CHNK$. Takowa tedy siła, będzie
zastępować miéysce siły S i siły CK albo
 BG ; a zatém będzie zastępować miéysce
czterech sił P, Q, R, S ; więc iest złożona z
tychże czterech sił. A stąd pokazuje się, iż
można zawsze i iak można, przemienić w
iedną siłę tyle sił, ile się spodoba, kiedy kie-
rónki swoje mają na iednéyże płaszczyźnie.

198. Tén przykład naucza tak-
że, iakim sposobém można zamiast
iednéy siły, użyć tyle innych sił ile
się spodoba, i iakie warunki powin-
ny mieć te nowe siły.

Np. (fig. 35), zamknąwszy równole-
głobok iakikolwiek $BFGM$, w którym lini-
a BG byłaby przekątną, można zamiast ie-
dnéy siły BG , wziąć inne dwie oznaczo-
ne przez BF i BM . A że każdą z tych
dwóch sił, wolno iest rozumieć przyłożoną
w takim punkcie ich kierónków iaki się spo-
doba, więc można przedstawić BM na AI ,
punkt A niechby znajdował się w iakiéy
chce odległości od B , i będzie można na
 AI

fig. 35.

AI iako przekątną złożyć inny równoległobok iakikolwiek *AEID*; a natenczas znowu zamiast siły *AI* będzie można wziąć dwie inne siły oznaczone przez *AE* i *AD*; tak iż zamiast iednej siły *BG*, mogą być użyte trzy siły *BF*, *AE*, *AD*, czyniące razem ténże sam skutek co tamta.

199. Uważmy tu, że ponieważ do naznaczenia sił *AD*, *AE* niema innego warunku, iak tylko ażeby były wyrażone przez boki *AD*, *AE* równoległoboku *ADIE*, mającego *AI* za przekątną, co może mieć miejsce niezmiennie wielą sposobami, czyto równoległobok *ADEI*, znayduie się być położony na płaszczyźnie równoległoboku *FBMG*, czy téż na iakiéykolwiek innéj płaszczyźnie; więc zawsze można siłę iakąkolwiek *BG* rozłożyć na tak wiele sił i położonych na takich płaszczyznach, iak się spodoba. Zobaczymy niżej użycie takowego składania i rozkładania sił.

200. Z przykładu rozłożenia sił dopiero wyżej położonego, pokazuje się, iż można ile razy spodoba się w to potrafić, ażeby niektóre siły przechodziły przez pewne za-

da-

dane punkta, a nawet żeby miały pewną iaką zadaną wielkość; ażeby były równoległe pewnym linióm danym; flowém żeby czyniły zadość iakim pewnym warunkóm danym.

Np. gdyby była zadana siła oznaczona przez linią *AB* (fig. 36); chcąc zamiast téj siły użyć dwóch innych sił, z których iedna przechodząc przez punkt zadany *O*, byłaby równoległa linii danéj z położenia *ST*, a oraz miałaby pewną wielkość *SK*; to jest żeby była taka, iżby pewnemu iakiemu ruchadłu nadała zdolność do przebieżenia linii *SK*, w tymże czasie, w którym toż ruchadło popędzone mocą siły oznaczonéj przez *AB*, zdolałoby przebieżyć linią *AB*; to takowe zagadnienia możnaby rozwiązać na fundamentach poprzedzających w sposób następujący.

Przez punkt *O* trzeba poprowadzić linią *OV*, równoległą linii *ST*, któraby spotkała się w iakim punkcie *V* z linią *AB*; potem zrobiwszy *VR = SK*, a *VQ = AB*, i poprowadziwszy linią *RQ*, trzeba przez punkt *V* poprowadzić inną równoległą ięj *VH*, która ma być zakończona w punkcie *H* przez linią *QH*, równoległą linii *VR*; natenczas *VR* będzie siłą żadaną, a *VH* będzie taką siłą, która wraz z siłą *VR*, zastępowałaby miejsce siły *VQ* albo *AB*. To rozwiązanie niemniéj miałoby miejsce, gdyby linia *ST* była równoległa linii *AB*; ale zobaczymy w krótcie iak w takowym przypadku postąpićby sobie potrzeba.

201. Uważny jeszcze, że ponieważ *figura* dwie siły spółne *P* i *Q* (fig. 31. 32), będąc 31. 32. oznaczone przez dwa boki *MD* i *MB* równoległoboku *DMBE*, siła z nich złożona musi być wyrażona przez przekątną *ME* tegoż równoległoboku, więc oznaczysz tę siłę złożoną przez *R*, będzie $P : R :: MD : ME$, i $Q : R :: MB : ME$, to jest $P : Q : R :: MD : MB : ME$, albo (z przyczyny że $MD = BE$) $BE : MB : ME$. Lecz w trójkącie *MBE* podług (Jeom. 303) wypada $BE : MB : ME ::$ wst. BME : wst. BEM : wst. MBE , albo z przyczyny równoległych *BE* i *MD* czyniących, że kąt $BEM = DME$, a kąt MBE jest spełnieniem kąta BMD , a zatem (Jeom. 279). że wst. $MBE =$ wst. BMD , będzie $BE : MB : ME ::$ wst. BME : wst. DME : wst. BMD ; więc także będzie $P : Q : R ::$ wst. BME : wst. DME : wst. BMD ; gdzie można uważać, że jeżeli siła *P* rozumie się być wyrażona przez wst. BME , to siła *Q* będzie wyrażona przez wst. DME , a siła *R* przez wst. BMD ; to jest, że dwie siły składające i siła z nich złożona, zawsze mogą być wyrażone, każda z nich przez wstawę kąta, zawartego między kierónkami dwóch innych.

A tak na oznaczenie sił, można wziąć zarówno czyto same linie w których kierónku skutkuia, czy też wstawy kątów zawartych między ich kierónkami, byleby każda była wyrażona przez wstawę kąta zawartego między kierónkami dwóch innych. Ten ostatni sposób oznaczania sił, ma także swoje własne pożytki, iak zobaczymy niżej.

202. Jeżeli z punktu *M* iako *figura* 37. 38. ze środka (fig. 37. 38) promiieniem

iakimkolwiek *ME* nakryśli się łuk kołowy *HEG* spotykający się w punktach *G* i *H* z kierónkami sił *P* i *Q* przedłużonemi, i jeżeli z punktu *E* wystawią się linie *EF*, *EI* prostopadłe liniom *MD*, *MB*, a z punktu *H*, linia *HL* prostopadła linii *MD*, to łatwo postrzedz można, że linie *EF*, *EI*, *HL*, będą odpowiadającemi wstawami kątów *DME*, *BME*, i *BMD*; a zatem będzie $P : Q : R :: EI : EF : HL$.

203. Zmyślmy sobie teraz, że kiedy kierónki dwóch sił *P* i *Q* (fig. 39. 40) sta- *figura* tecznie przechodzą przez dwa punkta stałe 39. 40. *K* i *N*; punkt *M* w którym spotykają się, oddala się coraż bardziéj; iawna jest, że w takim razie wstawy kątów *BME*, *DME*, i *BMD* coraż bardziéj zmniejszać się będą; * a zatem téż że coraż bardziéj zbliżać się będą do pomieszczenia się w jedno z łukami *EH*, *EG*, *GH*; więc jeżeli punkt *M* oddali się niezmiernie, to linie *EF*, *EI*, i *HL* wszystkie znajdą się być przystające do łuku *GH*, który przemieni się w linię prostą i prostopadłą dwóm liniom *MK* i *MN*, natenczas równoległym i sobie spółnie i linii *ME*. A że zawsze wypada $P : Q : R :: EI : EF : HL$, i w takim razie staie się $HL = EI + EF$ (fig. S 2 39).

* Trzeba sobie przypomnieć (Jeom. 279) że wstawą kąta wklętego jest też sama co wstawą jego spełnienia.

fig. 40. 39), a (fig. 40) toż. $HL = EI - EF$, więc figura idzie zatem, że kiedy dwie siły P i Q (fig. 41. 42. 42) mają kierunki wzajemnie sobie równoległe, to rząd Sił z nich złożona jest im także równoległa. 2re Ze postawiwszy linią FI prostopadłą takowym kierunkom, każda z tych sił będzie wyrażona przez część takowej prostopadłej, zawartą między kierunkami dwóch innych. 3cie Ze siła złożona, równa się summie dwóch składających, kiedy siły składające skutkują w jedną stronę; a znowu równa się onych różnicy, kiedy skutkują w strony przeciwne.

figura
41. 42.

204. Ponieważ (fig. 41. 42.) mamy, $P : Q : R :: EI : FE : FI$, więc będzie $P : Q :: EI : FE$, i $P : R :: EI : FI$; to jest, że mając dwie siły składające równoległe i trzecią złożoną z tych dwóch, dwie z nich są zawsze między sobą w stosunku odwrotnym dwóch prostopadłych, postawionych na kierunkach takowych dwóch sił z jednego punktu, wziętego na kierunku trzeciej siły.

205. Jeżeli poprowadzi się podług upodobania linią ABC , to będzie (Jeom. 102), $BC : AB : AC :: EI : FE : FI$; więc będzie także, $P : Q : R :: BC : AB : AC$; to jest w powszechności, że przeciwwszy kierunki dwóch sił równoległych, i trzeciej złożonej z tych dwóch, przez

linią prostą poprowadzoną iak się spodoba, każda z tych sił będzie mogła być wyrażona przez część takowej linii prostej, zawartą między kierunkami dwóch innych.

206. A stąd łatwo sobie wnieść można, iak się trzeba obéysdź w wynaydowaniu siły iakiéy, złożonéy z wielu równoległych, i odwrotnie iak sobie postąpić, chcąc użyć iednéy siły iakiéykolwiek, zamiast innych sił równoległych, tak wielu iak się spodoba.

Np. mając przemiénić na iedną siłę dwie siły P i Q (fig. 41), skutkujące w iedną stronę. Prowadzę linią iakąkolwiek ABC ; siła złożona z tych dwóch sił powinna równać się siłom $P + Q$ (203); nieidzie tedy tylko o wynalezienie punktu B , przez który ma przechodzić. Lecz podług (205), mamy $P : R :: BC : AC$; trzeba tedy między dwoma punktami A i C obrać punkt taki, ażeby było $BC = \frac{P \times AC}{P + Q}$. Jeżeli pomiénione dwie siły sku-

tkują w rozumieniu przeciwném (fig. 42), fig. 42. to siła z nich złożona równać się będzie onych różnicy (203), to jest będzie $= P - P$ albo $Q - P$. Daymy że siła P jest większą od Q . Poprowadziwszy podług upodobania linią AC , trzeba ją przedłużyć za punkt A względem C o ilość AB taką, ażeby było $P : R :: BC : AC$ (205).

albo $P : P - Q :: BC : AC$, to jest że
trzeba zrobić $BC = \frac{P \times AC}{P - Q}$. Gdyby Q
było większe nad P , to punkt B znajdó-
wałby się być położony na przedłużeniu
linii AC , za punktem C uważonym wzglę-
dém A .

207. Gdyby była zadana i trzecia siła
fig. 43. K (fig. 43), to natenczas znalazłszy siłę R
złożoną z dwóch sił P i Q , trzeba znowu
szukać siły S złożonej z dwóch sił R i K ,
jak gdyby niebyło zadanych innych tylko
te dwie, to jest właśnie w tenże sposób
jak uczyniliśmy dopiero wyżej.

208. Wiec odwrotnie gdybyś-
my chcieli, siłę iakąkolwiek R ro-
złożyć na dwie inne równoległe
figura 1. 42. pierwszeye (fig. 41. 42):

Trzebaby poprowadzić podług upodo-
bania linią PF równoległą kierónkowi siły
 R , i obrawszy sobie taką linią, za kieró-
nek iednéy z dwóch sił składających, na
wartość téy siły składającej, trzeba sobie
obrać ilość iakąkolwiek P , byleby była
mniejszy od R , a to kiedy dwie siły skła-
dające mają skutkować po obu stronach siły
 R , a natenczas druga siła składająca, ozna-
czywszy ją sobie przez Q , powinna być
wyrażona przez $R - P$; żeby zaś wynalé-
śdż iey położenie, nie trzeba więcéy tylko
poprowadzić linią iakąkolwiek CBA , i na
przedłużeniu linii AB wziąć część BC ta-
ką, ażeby było $Q : P :: AB : CB$; jeżeli
tedy przez punkt C poprowadzi się linią
 QC , równoległą linii RB , to takowa lini-
a QC będzie kierónkiem siły Q .

Ale

Ale jeżeli obie siły składające mają
bydź położone z iednéyże strony, w któ-
rymto przypadku muszą skutkować w ro-
zumieniu przeciwném; to natenczas na wár-
tość siły P , można sobie obrać ilość iaką-
kolwiek mnieyszą lub większą nad R , a
wziąwszy linią PF (fig. 42) równoległą
linii RB za kierónek siły P , trzeba na li-
nii iakiéykolwiek BAC , naznaczyć sobie
punkt C tak, ażeby było, $P - R$ albo $R - P$
: $R :: AB : AC$; a natenczas punkt C bę-
dzie takim punktem, przez który powinna
przechodzić siła Q , równoległą zadanéy siły
 R , i znajdować się będzie położony za
punktem A względem B , kiedy P jest wię-
ksze aniżeli R ; przeciwnie zaś jeżeli jest
mniejszy nad R , to pominiony punkt C
znajdować się będzie między A i B .

209. Co tu powiedziało się o siły R ,
względem dwóch sił składających ją P i Q ,
ponieważ oczywiście daie się przystosować
do każdéy z tych ostatnich dwóch sił, prze-
to iawna jest, iakim sposobém zamiast ie-
dnéy siły iakiéykolwiek, można użyć tylu
innych sił ile się spodoba, mających kierón-
ki równoległe pierwszeye siły.

O Momentach, i onych użyciu
do składania i rokładaniu sił.

210. **T**o wszystko co dotąd po-
przedziło, zawiera w so-
bie dostateczną naukę względem
składania i rokładania sił, mają-
cych bądźto kierónki bądź wartości
iakiéykolwiek. przynajmniej kiedy

S 4

sku-

skutkuia na iednéyże płaszczyźnie. Ale różne rodzaje ruchów które daléy uważać mamy, wyciągaia sposobów prostszych, i pretszych do wynalezienia siły złożonéy z wielu sił i onéy kierónku; i to iest do czego właśnie teraz przystępujemy.

211. Jeżeli z punktn iakiegokolwiek F figura (fig. 44. 45), obranego na płaszczyźnie iakiegokolwiek równoległoboku ABCD, poprowadzą się linie FE, FH, FG, prostopadłe na przyległe boki AB, AD i na przekatną AC; to summa mnożnościów wynikających z rozmnożenia każdéy prostopadłéy przez bok na który pada, równać się będzie mnożności, wynikającej z rozmnożenia przekatnéy przez prostopadłą co na nią pada; a to kiedy punkt F (fig. 44) znajdować się niebędzie ani w kącie BAD, ani w przeciwnym iemu w wierszchotku. Jeżeli zaś iak (fig. 45) punkt F znajdował się w kącie BAD, albo w przeciwnym iemu w wierszchotku, to natenczas, różnica mnożnościów, wynikających z rozmnożenia każdéy prostopadłéy przez bok na który pada, równać się będzie mnożności wynikającej z rozmnożenia przekatnéy, przez prostopadłą na tę przekatną.

Przedłużmy bok BC, ażby się spotkał w I z prostopadłą FH, i poprowadźmy linie FA, FB, FC, FD. Trójkąt FAC (fig. 44) iest = $FAB + ABC + FBC = FAB + ADC + FBC$. Lecz iód trójkąt FAC = $\frac{AC \times FG}{2}$. zre. Trójkąt FAB = $\frac{AB \times FE}{2}$.

3cie Trójkąt ADC mający za podstawę AD a IH za wysokość, iest = $\frac{AD \times IH}{2}$. 4te

Trójkąt FBC = $\frac{BC \times FI}{2} = \frac{AD \times FI}{2}$; ..
więc $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AB \times FE}{2} + \frac{AD \times IH}{2}$.

+ $\frac{AD \times FI}{2}$; lecz $IH + FI = FH$; więc

wszystko zdwoiwszy, będzie $AC \times FG = AB \times FE + AD \times FH$. A w (fig. 45) trójkąt fig. 45.
 $FAC = ABC - FAB - FBC = ADC - FAB - FBC$; to iest $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AD \times IH}{2}$

$\frac{AB \times FE}{2} - \frac{BC \times FI}{2}$; albo dawszy baczenie na to, że $BC = AD$, i że $IH - FI = FH$, i wszystko zdwoiwszy, będzie $AC \times FG = AD \times FH - AB \times FE$.

212. Ponieważ okazało się wyżej, że dwie siły iakiegokolwiek i siła z nich złożona, mogą być wyrażone przez boki i przekatną równoległoboku nakryślonego w kierónkach tych linii, więc wniéśmy sobie stąd, że jeżeli P i Q (fig. 44. 45), są dwiema siłami oznaczonemi przez linie AB i AD, w którymto przypadku, siła R złożona z dwóch piérwszych byłaby oznaczona przez AC; wniéśmy sobie, mó.

mówię, stąd, że obraczący sobie ze-
wnątrz kąta BAD , przeciwnego
jemu w wiérzchołku, punkt iakikol-
wiek F położony na płaszczyźnie
tych trzech sił, będzie zawsze $R \times$
 $FG = Q \times FH + P \times FE$; a gdyby
punkt F był położony wkącie BAD ,
albo w przeciwnym iemu w wiérz-
chołku, to zawsze będzie $R \times FG$
 $= Q \times FH - P \times FE$.

213. Mnogość, wynikająca z rozmno-
żenia siły przez odległość iéy kierónku od
punktu stałego, iest to co nazywamy mo-
mentém téy siły. I tak $Q \times FH$ iest mo-
mentém siły Q ; $R \times FG$ iest momentém si-
ły R .

214. Ponieważ siły, szacować
się zwykły (158) podług ilości ru-
chu, to iest, że wyrażają się przez
mnogość, wynikającą z rozmno-
żenia iakiéy pewnéy miąższości, przez
szypkość iaką nadać mogą téyże
miąższości, więc wartością momen-
tu siły iakiéykolwiek, będzie mno-
gość z miąższości przez szypkość
i przez odległość iéy kierónku od
punktu stałego.

215. Zmyśliwszy sobie, że prostopa-
dłe FH , FG , FE , są liniami niegiętkiemi
i niemiąższemi, spoionemi między sobą i
zastanowionemi w punkcie F , tak iż wię-
cý

céy nie tylko obracaćby się mogły oko-
ło tegóż punktu; i że siły P , Q tudzież
siła R z nich złożona, są przyłożone do
końców E , H , G , da się widzieć (fig. 44),
że te trzy siły wszystkie razem dążą do
obracania całego układu (système) w iedną
stronę około punktu F ; a w (fig. 45) da się
widzieć, że dwie siły Q i R , dążą do
obracania układu w stronę przeciwną téy,
w którą dąży siła P . A zatem można po-
wiedzieć ogółem: Ze moment iednéy siły
złożonéy z wielu, uważony względem iakie-
gokolwiek punktu stałego F , zawsze równa
się summie albo różnicy momentów odpowia-
dających dwóm siłom składającym, a to po-
dług okoliczności, gdy takowe siły dążą do
obracania układu w iedną stronę, albo w stro-
ny przeciwné, około pomienionego punktu sta-
łego.

216. A stąd można wnieść w
powszechność: że niech będzie lic-
ba sił P , Q , S , T , i. t. d. iaka chce
(fig. 46), niechay mają takie wielko-
ści i kierónki iak się spodoba, byleby
znaydowały się wszystkie na iednéyże
płaszczyźnie, to moment siły złożo-
néy z tych wszystkich sił, uważony
względem iakiegokolwiek punktu F ,
obranego na téyże płaszczyźnie, za-
wsze równać się będzie summie mo-
mentów, odpowiadających siłom dą-
żącym do obracania układu w iedną
stronę około takowego punktu, mniéy
summa momentów, odpowiadających si-
ły

siłom dążącym do obracania tegoż układu w stronę przeciwną.

Jakóż pozwoliwszy, że r jest siłą złożoną z dwóch sił P i Q skutkujących w kierónkach AP i EQ ; r' , siłą złożoną z dwóch sił r i S , skutkujących w kierónku GS ; a naostatek że R , jest siłą złożoną z dwóch sił r' i T , skutkujących w kierónku DT ; nadto oznaczywszy przez m moment siły r , a przez m' moment siły r' ; to spuściwszy prostopadłe FA , FE , FD , FB na siły składające P , Q , S , T , i na siłę R z nich złożoną, mieć będziemy iód $m = P \times AF + Q \times EF$. 2re $m' = m - S \times FG$. 3cie $R \times FB = m' - T \times FD$. Więc uczyniwszy dodanie tych trzech zrównań, i wyrugowawszy ilości iednakowe znajdujące się w obu częściach, będzie $R \times FB = P \times AF + Q \times EF - S \times FG - T \times FD$; gdzie daie się widzieć, iako momenta dwóch sił T i S , dążących do obracania układu z prawéy strony w lewą, mają w rzeczy saméy znaki przeciwne tym, co poprzedzają siły P i Q , dążące do obracania tegoż układu z lewéy strony w prawą.

217. Gdyby punkt F znajdował się bydz położony na samym kierónku siły z wielu złożonéy, to momentém téy siły byłoby zéro; a że takowy moment powinién równać się summie momentów odpowiadających siłom dążącym do kołowrotu w iedną stronę, mniéy summa momentów, odpowiadających siłom dążącym do kołowrotu w

stro-

stronę przeciwną, więc należy stąd wnieść, że różnicą téy dwoiakiéy summy momentów, uważonych względém iakiégokolwiek punktu siły z wielu złożonéy, że mówię takową różnicą jest zawsze zero.

I odwrotnie, jeżeli summa momentów, odpowiadających wielu siłom dążącym do nadania kołowrotu w iedną stronę, około iakiego punktu, mniéy summa momentów, odpowiadających siłom dążącym do nadania kołowrotu w stronę przeciwną, około tegoż punktu, jest zerém; to należy sobie stąd wnieść, że siła złożona z takowych wielu sił musi przechodzić przez tén punkt.

218. Ponieważ te podania ogółem wzięte są prawdziwe, choćby kierónki sił czyniły między sobą kąty bądź iakie chce, więc muszą bydz i w tén czas prawdziwe, kiedy siły czynią między sobą kąty niezmiérnie małe, albo co na iedno wychodzi, kiedy kierónki sił są sobie równoległe.

219. A stąd iest łatwo wnieść sobie sposób bardzo prosty, do wynalezienia położenia i wielkości iakiégokolwiek siły, złożonéy z tak wielu sił iakby się spodobało, byleby wszystkie skutkowały na iednéyże płaszczy-

czyźnie. Pozwólmy naprzód, że te wszystkie siły są sobie równoległe; i ażebyśmy bez potrzeby niewykłali rachunku, dajmy że ich nie ma tylko trzy, a stąd potem łatwo będzie można dóysdź, iakby sobie trzeba postąpić zwiększając liczbę.

Niechay tedy będą te trzy siły znane fig. 47. iome P, Q, S (fig. 47), z których dwie pierwsze skutkowałyby w kierónkach AP i BQ , a ostatnia w kierónku CS . Poprowadziwszy podług upodobania linię, iakąkolwiek $FABC$, prostopadłą kierónkom AP, BQ , i. t. d. zmyślimy sobie że punkt D jest taki, przez który ma przechodzić siła R , złożona z tamtych trzech. Natenczas obrówszy sobie do woli punkt F na linii $FABC$, mieć będziemy podług tego co poprzedziło, $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$; a że odległości AF, FB, FC , i siły P, Q, S są nam znaiome, więc z tego zrównania łatwo byłoby nam wyciągnąć, wartość odległości DF , w której przechodzić ma siła złożona, byłoby tylko wartość tęg siły złożonéy R , była także wiadoma. Zobaczymy tedy, iaka ma być iéy wartość.

Obierzmy sobie inny punkt F' na przedłużeniu AF ; a na fundamencie téż saméy zasady, mieć będziemy $P \times AF' + Q \times BF' - S \times CF' = R \times DF'$. Od tego zrównania odiawszy pierwsze zrównanie, i dawszy baczenie na to, że $AF' - AF = FF$, $BF' - BF = FF$, $CF' - CF = FF$, i $DF' - DF = FF$, będzie $P \times FF + Q \times FF - S \times FF = R \times FF$; to jest, rozdzieliwszy wszystko przez FF , będzie $P + Q - S = R$. Lecz za-

no-

nowiwszy się nad tém rozumowaniem dopiero użytém, łatwo widzieć się daie, że takowe wcale nie nienależy od liczby sił, ale zarówno służy wszelkiéy bądź iakiéy chce liczbie tychże sił. Więc należy stąd wniesć w powszechności: *Ze siła złożona z tak wielu sił równoległych iak się spodoba, równa się summie sił skutkujących w iedném rozumieniu, mniéy summa sił skutkujących w rozumieniu przeciwném.*

Jeżeli w zrównaniu $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$ wypadłém na początku, położymy zamiast R wartość onego $P + Q - S$ dopiero wynalezioną, to mieć będziemy $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = (P + Q - S) \times DF$; skąd wyciąga się $DF = \frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$; a zatem z

tęgo wyrażenia i mając wzgląd na to, że rozumowanie które nas do niego przywiodło, wcale nie zależy od liczby sił, w niésmym w powszechności: *Iż chcąc wiedzieć w iakiéy odległości od punktu zadanego przechodzi siła złożona z wielu sił równoległych, trzeba od summy momentów odpowiadających siłom dążącym do nadania kołowrotu w iedną stronę, odjąć sumnę momentów, odpowiadających siłom dążącym do nadania kołowrotu w stronę przeciwną, a resztę rozdzielić przez sumnę sił skutkujących w iedną stronę, mniéy summa sił skutkujących w stronę przeciwną.* 220.

* Nienależy tu brać sił skutkujących w rozumieniach przeciwnych, za siły dążące do nadania kołowrotu w rozumieniach przeciwnych, ani odwrotnie. Bo dwie siły skutkujące w rozumieniach przeciwnych częstokroć dążą do nadania ciała kołowrotu w iedną

220. Gdyby punkt obrany z razu podług upodobania, znalazł się być położony w samym punkcie D , przez który przechodziła siła z wielu złożona, to w takim razie, z przyczyny że odległość DF jest zerem, wartość jego $P \times AF + Q \times BF - S \times CF$

$$\frac{P + Q - S}{-P \times AD + Q \times BD - S \times CD}, \text{ odmienniająca się na } \frac{P + Q - S}{P + Q - S},$$

(bo siła P dąży do nadania kołowrotu około punktu D w stronę przeciwną co siła Q), wartość mój odległości DF byłaby zerem; a zatem mielibyśmy $-P \times AD + Q \times BD - S \times CD = 0$; a że punkt F z razu obrany podług upodobania, mógł być wzięty wyżej lub niżej do woli, tak iż punkt D , nie rozumie się, raczy położony w tym

stronie; co zależy, od punktu, względem którego uważa się kołowrót albo momenta. Np. fig. 47. dwie siły Q i S (fig. 47), skutkują w rozumieniach przeciwnych, ale obie dążą do nadania kołowrotu linii B w témże rozumieniu, około punktu wziętego między B i C ; a jeżeli by uważał się kołowrót względem punktu F , to siła Q , dąży do nadania linii CF , kołowrotu w stronę przeciwną tój, w którą dąży siła S .

tym punkcie kierunku siły złożonej R , aniżeli w którymkolwiek innym punkcie, więc wnosi się stąd w powszechności:

Ze momenta wielu sił równoległych, uważone względem iakiegokolwiek punktu, należącego do kierunku siły z tych wszystkich wielu sił złożonej, są takie, że summa momentów, odpowiadających siłom dążącym do nadania kołowrotu w jednem rozumieniu, zawsze równa się summie momentów, odpowiadających siłom, do dążącym nadania kołowrotu w rozumieniu przeciwnem.

221. Więc biorąc z znakami przeciwnemi momenta sił dążących do nadania kołowrotu w rozumieniach przeciwnych, i siły skutkujące w rozumieniach przeciwnych, biorąc także z znakami przeciwnemi, można rzec w powszechności.
1^{od} Ze siła złożona z tak wielu sił równoległych iak się spodoba, zawsze równa się summie tych wszystkich sił.
2^{re} Ze ta siła złożona z wielu, i onym równoległa, przechodzi przez ciągły rząd takich punktów, z których każdy ma tę własność, że summa momentów, uważonych względem niego, jest zerem.

Tych załad bardzo często używać będziemy w dalszym przeciągu, i zobaczymy wktótce, z iaką łatwo-

ścią podług nich znajduie się środek ciężkości w ciałach. Tym czasem teraz przystąpmy do sił, których kierónki czynią między sobą iakiekolwiek kąty.

222. Niechay tedy będzie, podług fig. 48. (fig. 48) tyle sił P, Q, S i. t. d. ile się spodoba, mających swoje kierónki na jednéjże płaszczyźnie. Niech siła P , skutkująca w kierónku AP będzie wyrażona przez AB ; siła Q skutkująca w kierónku EQ , przez EG , a siła S , skutkująca w kierónku IS , niech będzie wyrażona przez IL . Przez punkt T obrany do woli na płaszczyźnie tych sił, zmyślmymy sobie dwie linie proste nieokreślone TE, TE'' czyniące między sobą kąt iakikolwiek, (który dla tém więkzey łatwości rozumiemy bydyż prosty); zmyślmymy także sobie siły P, Q, S , albo AB, EG, IL , każdą z nich rozłożoną na dwie inne, z których jedna byłaby równoległą linii TE , a druga równoległą linii TE'' , które zatem powinny bydyż wyrażone, każda z nich, przez odpowiadający bok równoległoboku, (193), którego przekątna oznacza siłę zadaną. Jawną jest stąd co poprzedziło (219), że z sił AD, EF, IM złożona jedna siła, będzie VO , tamtym równoległą, mająca na wartość swoją, $AD + EF - IM$, i że przechodzić będzie w odległości VV' , takiéy że wypadać musi VV'' — — — — —
 $AD \times AA' + EF \times EE' - IM \times II'$
 $AD + EF - IM$ Po-

^a Ni puszczaymy z pamięci tego, co już powiedziasto się indziéy (192). Przez to wyrażenie, siły AB, EG i. t. d. rozumiemy,

Podóbnież siły AC, EH, IK równoległe linii TE , wszystkie mogą bydyż zebrane w jednę siłę VN , równoległą i równą trzem tamtym, to jest $= AC + EH + IK$, i która (rozumiejąc że V jest punktem spotkania się iéy kierónku z kierónkiem siły OV), która mówię, przechodzić będzie w odległości VV'' , takiéy że będzie $VV'' = AC \times AA'' + EH \times EE'' + IK \times II''$

$$= AC + EH + IK$$

To założywşy, ponieważ siły P, Q, S i kierónki ich, (to jest, kąty iakie czynią z liniami stałemi i znanemi, takiemi iak TE' i TE'' , albo z równoległemi innym), rozumieją się bydyż wiadome, przeto w każdym z trójkątów BAD, GEF, IKL , będą znaiome kąty i przekątna; a zatem nietrudno będzie wynaléśdż linie AD, EF, KL albo IM , i linie BD albo AC, FG albo EH i IK , z których łatwo wynaydą się dwie siły złożone $AD + EF = IM + AC + EH + IK$. Nadto, ponieważ także odległości AA', AA'', EE', EE'' i. t. d. muszą bydyż znaiome, bo położenie punktów A i E , gdzie rozumieją się siły bydyż przyłożone, niemoże bydyż nieznané, więc będziemy mieć wiadome wszystkie ilości, wchodzące w wyrażenie odległościów VV' i VV'' ;
 T 2

że linie, AB, EG , i. t. d. mają się między sobą w stosunku ilościów ruchu, iakie nadać mogą siły P i Q , miąższościóm, do których bytyby przyłożone. Toż trzymać mamy o siłach AD, EF i. t. d.; rozumiejąc przez nie takie ilości ruchu, które miałyby się do ilościów ruchu oznaczonych przez AB, EG , iak się mają linie AD, EF do linii AB, EG , każda do każdej.

a zatem łatwo będziemy mogli naznaczyć punkt V , w którym zbiegaia się te dwie siły złożone. Zrobiwszy tedy $VO = AD + EF - IM$, i $VN = AC + FH + IK$, i zamknąwszy równoległobok $OVNX$, mieć będziemy przekątną VX na wartość siły R złożonej z dwóch sił pierwey złożonych, równoległych liniom TE i TE' , to jest na wartość siły złożonej z wszystkich sił zadanych,

O siłach skutkujących na różnych płaszczyznach.

fig. 49.

223. **N**iechay będą zadane trzy siły P, Q, S (fig. 49), skutkujące w kierunkach linii AP, BQ, CS równoległych sobie, ale położonych na różnych płaszczyznach. Zmyślmy sobie płaszczyznę XZ , którejby trzy linie proste AP, BQ, CS były prostopadłe, i drugą płaszczyznę ZV , którejby też linie były równoległe; A, B, C niech będą takie punkta, w którychby pomienione linie spotykały się z płaszczyzną XZ .

Dwie siły P i S znajduia się bydź położone na iednędzy płaszczyźnie, której przecięciem z płaszczyzną XZ jest linia AC . Te tedy dwie siły mogą bydź zebrane w iednę $R' = P + S$, która będzie

im

im równoległą, i przechodzić będzie przez punkt D , taki (220), iż będzie $PX AD = SX CD$. Dwie siły R' i Q , są znowu na iednędzy płaszczyźnie, której przecięciem z płaszczyzną XZ , jest linia BD , a zatem i te mogą bydź zebrane w iednę siłę $R = R' + Q = P + S + Q$, która będzie im równoległą, i przechodzić będzie przez punkt E , taki, iż będzie $RX DE = QX BE$. Skąd iako też i z tego co poprzedziło wnosi się w powszechności: Ze niechby było tyle sił ile się spodoba, mających kierunki równoległe, to zawsze wszystkie mogą bydź zebrane w iedną siłę, równającą się summie sił skutkujących w iednym rozumieniu, mnię summa sił skutkujących w rozumieniu przeciwnem; czyto te siły będą położone na iednędzy, czy na różnych płaszczyznach. Zobaczmy teraz szczególnię, któredy powinna przechodzić takowa siła z wielu złożona.

Jeżeli z punktów A, C, D, B, E , postawia się linie AA', DD', CC', BB', EE' prostopadłe spólnemu przecięciu dwóch płaszczyzn XZ, ZV ; to z przyczyny równoległych AA', DD', CC' , mieć będziemy $AD : CD :: A'D' : C'D'$; a że znowu zrówna-

T 3

nie

nie $P \times AD = S \times CD$ wynalezione dopie-
ro wyżej, daie $AD : CD :: S : P$, więc
 $AD : CD :: S : P$, a zatem $P \times AD$
 $= S \times CD$. Podobnie, równoległe DD' ,
 EE , BB , daia $DE : BE :: D'E' : B'E'$, a
zrównanie $R \times DE = Q \times BE$ także wzwyż
wynalezione, daie $DE : BE :: Q : R$; więc
 $D'E' : B'E' :: Q : R :: Q : P + S$; więc
 $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$.

Obierzmy sobie teraz na spólném prze-
cięciu ZT dwóch płaszczyzn, ieden punkt
stały T , i szukamy odległości TE' od tego
punktu, do punktu E' , odpowiadającego pun-
ktowi E , przez który przechodzi siła zło-
żona. Jawną iest, że $A'D' = TD' - TA'$,
 $CD' = TC' - TD'$, $D'E' = TE' - TD'$, $B'E'$
 $= TB' - TE'$. Położywszy te wartości w
dwóch zrównaniach $P \times A'D' = S \times CD'$ i
 $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$, mieć będziemy
 $P \times TD' - P \times TA' = S \times TC' - S \times TD'$ i
 $(P + S) \times TE' - (P + S) \times TD' = Q \times TB'$
 $- Q \times TE'$. Lecz pierwsze z tych dwóch
zrównań, daie $(P + S) TD' = P \times TA' + S$
 $\times TC'$; którąto wartość położywszy w drugim
zrównaniu, będzie $(P + S) \times TE' - P \times TA'$
 $- S \times TC' = Q \times TB' - Q \times TE'$; więc
zebrawszy wszystkie wyrazy rozmnożone
przez TE' , będzie $(P + Q + S) \times TE' =$
 $P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'$; skąd wy-
ciąga się $TE' = \frac{P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'}{P + Q + S}$.

Lecz to wyrażenie odległości TE' iest
właśnie takie samo, iakieby wypadło szuka-
jąc odległości, w której ma przechodzić si-
ła złożona, gdyby siły P , Q , S wszystkie
trzy znajdowały się bydź położone na ie-
dnejże płaszczyźnie ZV , i przechodziły
przez punkta A, C, B , odpowiadające pun-
ktom

któm A, B, C , przez które przechodzą w ni-
niejszy razie; więc zmyśliwszy sobie linią
prostą TX , prostopadłą płaszczyźnie ZV ,
można znaleźć odległość TE' siły złożo-
ney R od téj linii, wziąwszy sumę mo-
mentów * względem téjże linii prostej,
iak gdyby te siły, nieodmiéniając odległości
swoiej od téj linii, były wszystkie położo-
ne na płaszczyźnie ZV , której pomeniona li-
nia iest prostopadłą, i rozdzieliwszy tako-
wą sumę momentów, przez sumę sił.

Zeby tedy naolatek usunąć punkt E ,
nie trzeba więcej, tylko znaleźć odle-
głość EE' , albo (poprowadziwszy linią EE'
równoległą linii ZT), znaleźć odległość
 TE' , w której przechodzi ta siła względem
linii ZT . Lecz iawną iest, skąd co dopiero
wzwyż powiedziało się o odległości TE' ,
że ażeby mieć odległość TE' , trzeba pod-
obieź zmyślić sobie płaszczyznę przechodzą-
cą przez XT , i równoległą kierónkóm sił;
potém trzeba wziąć sumę momentów
względem linii TZ , która iest spólném prze-
cięciem téj płaszczyzny z płaszczyzną ZV ,
trzeba mówić wziąć sumę momentów
względem TZ , iak gdyby wszystkie siły,
nieodmiéniając odległości swoiej od płasz-
czy-
T 4

* Trzeba nam tu uważać, i pamiętać na
potém, że przez sumę momentów, ma się ro-
zumić summa momentów, odpowiadająca si-
łóm, dążącym do nadania kołowrotu w iedną
stronę, mniéj summa momentów odpowida-
jąca siłóm, dążącym do nadania kołowrotu
w stronę przeciwną. Podobnież, przez to
wyrażenie summa sił, ma się rozumieć summa
sił skutkujących w iednym rozumieniu, mniéj
summa sił skutkujących w rozumieniu przeci-
wném.

czyzny ZV , znajdowały się na płaszczyźnie XV , i takową sumę momentów rozdzielić przez sumę sił. A tak, już będzie znano wszystko, czego potrzeba do ustanowienia punktu E , którego ma przechodzić siła złożona,

224. Zastanówmy się teraz nad siłami, których kierunki, ani są położone na iednéjże płaszczyźnie, ani sobie są równoległe.

Niechay będą zadane trzy siły P, Q, R (fig. 50), skutkujące w kierunkach AP, BQ, CR , a położone na różnych płaszczyznach. Zmyślimy sobie płaszczyznę jakąkolwiek XZ , spotykającą się w punkcie H z kierunkiem AP , w punkcie F z kierunkiem BQ , i w punkcie L z kierunkiem CR . Ponieważ wolno mi jest, podług (196), uważać siłę przyłożoną w którymkolwiek punkcie iéy kierunku, przeto zmyślam sobie te trzy siły przyłożone w punktach H, F, L , i oznaczone przez linie HV, FT, LK , poprowadzone w przedłużeniach linii AP, BQ, CR , poniżej płaszczyzny XZ . Zmyślimy sobie ieszcze nadto, że przez linie AH, BQ, CL są poprowadzone insze płaszczyzny prostopadłe płaszczyźnie XZ , których przecięciami z tą ostatnią płaszczyzną, byłyby linie GHN, EFT, DLM . To założywszy, jawna jest, że każdą z tych sił mogę rozłożyć na dwie inne, z których iedna byłaby położona na płaszczyźnie XZ , a druga byłaby prostopadła téjże płaszczyźnie. Np. mogę rozłożyć siłę HV , na siłę mającą kierunek HN i na drugą mającą kierunek HO prostopadły płaszczyźnie XZ ; tak iż zamiast trzech sił HV, FT, LK , mogę użyć

sze-

fześciu sił HN, FT, LM, HO, FS, LI , z których trzy pierwsze są na płaszczyźnie XZ , a trzy ostatnie są prostopadłe téjże płaszczyźnie.

Lecz podług tego, co się nauczyło (222), trzy siły HN, FT, LM , mogą być zebrane w iedną, położoną na téjże płaszczyźnie XZ ; a podług tego co się rzekło (223) trzy siły HO, FS, LI , mogą znowu być zebrane w iedną, prostopadłą téjże płaszczyźnie XZ . Więc ogółem: Niech będzie liczbą sił iaka chce, mających kierunki iakie się spodoba, zawsze można zebrać je najwięcej na dwie siły, z których iedna miałaby swój kierunek na płaszczyźnie wiadomej, a druga byłaby prostopadła téjże płaszczyźnie.

225. Lubo wywód niniejszego podania, niezdaie się mieć miejsca, tylko w tych przypadkach, kiedy wszystkie siły spotykają się z obraną płaszczyzną XZ , atoli łatwo pojąć można, że w rzeczy samej to podanie w powszechności służy wszelkim przypadkom. Albowiem, po zebraniu na dwie siły, wszystkich sił spotykających się z tą płaszczyzną, i jeżeli zmyślimy sobie położenie iéy odmienné, iednakże tak, iżby pominione dwie siły złożone, nieprześlawały z nią spotykać się, (co nam uczynić wolno), to w takim razie, zawsze można téj płaszczyźnie dać położenie takie, ażeby spotykała się

z

z kierónkami, które w pierwším położeniu były iéy równoległe.

226. A zatem z siłami mającemi kierónki swoje na różnych płaszczyznach, rzeczy niétak mają się, iak z siłami mającemi kierónki na iednéyże płaszczyźnie. Te ostatnie zawsze mogą bydź zebrane w iedną siłę, iak widzieliśmy wyżej. Ale pierwsze po spolicie przemieniaią się na dwie, które nie mogą bydź zebrane w iedną, tylko w takim przypadku, kiedy siła złożona z sił skutujących na płaszczyźnie XZ , spotykałaby się z siłą złożoną z sił prostopadłych téyże płaszczyźnie.

227. Można tedy wynaléśdź, dwie siły złożone z tak wielu sił iak się spodoba, mających swoje kierónki na różnych płaszczyznach. Ato-li, lubo tén sposób może bydź użyteczny w wielu przypadkach, przecieź w rozwiązywaniu wielu zagadnień nieieft naywygodniéyszy; dla tego umysłiliśmy tu przydać ieszcze inzy następuiący.

fig. 51. Niech będzie P (fig. 51), iedna którakolwiek z sił zadanych, oznaczona przez linią AB ; niech będzie X punkt stały iakikolwiek; nadto XZ , XT , XT , niech będą trzy linie wzajemnie sobie prostopadłe. Na linii AB iako przekątnéy, robi się równoległobok prostokątny $ADBC$, którego płaszczyzna byłaby prostopadła płaszczyźnie TXT , a bok BC byłby równoległy linii XZ ; potem na linii BD iako przekątnéy, robi się inny

inny prostokąt $DFBE$, którego płaszczyzna, byłaby równoległa płaszczyźnie TXT , a boki BF , BE , byłyby równoległe linióm XT , XT . Jawną iest, iód że zamiast siły AB , można wziąć dwie siły, to iest iedną BC równoległą linii XZ , czyli prostopadłą płaszczyźnie TXT , a drugą BD równoległą téyże płaszczyźnie. 2^{re} Ze zamiast téy siły BD , można znowu wziąć dwie siły, to iest, iedną BE równoległą linii XT , czyli prostopadłą płaszczyźnie ZXT , a drugą BF , równoległą linii XT , czyli prostopadłą płaszczyźnie ZXT ; tak iż siła P albo AB , znajdzie się bydź rozłożona na trzy siły, równoległe trzem linióm, wzajemnie sobie prostopadłym, albo co na iedno wychodzi, znajdzie się bydź rozłożona na trzy siły, prostopadłe trzem płaszczyznóm, wzajemnie sobie prostopadłym.

Lecz to wszystko co tu mówi się o siłę P , oczywiście da się przystósować do wszelkiéy innéy siły, która niebyłaby prostopadłą iednéy z tych trzech płaszczyzn; więc zmyśliwszy sobie wszystkie siły takie iak P , rozłożone w tén sposób, a potem wszystkie siły prostopadłe płaszczyźnie ZXT , zebrawszy w iedną podług przepisu (223), i uczyniwszy tóż samo względem sił prostopadłych płaszczyźnie ZXT , iako téż względem sił prostopadłych płaszczyźnie TXT , iawną iest, iż zawsze można zebrać na trzy siły, prostopadłe trzem płaszczyznóm wzajemnie sobie prostopadłym, tak wiele sił iak się spodoba. I te są powszechne zasady, służące do składania i rokładania sił.

228. **N**im przystąpimy do osobnych skutków, iakie, czyto w filniach czy powszechnie w ciałach postaci i natury wiadomey, sprawić mogą siły, których własności ogólne dopiero wyżej rozbiéraliśmy, trzeba nam wprzód zaştanowić się nad śródkami ciężkości; bo od téy wiadomości wiele zależy naznaczenie ruchów, do iakich przyięcia są sposobne takowe siły lub ciała. Przypomnimy tu sobie, co powiedziało się indziéy (171), że kierónki podług których waźność skutkuje w cząstkach materyalnych ciała iakiego, są równoległe; i że ta siła, dąży do nadania kaźdęy cząstce materyi, iednakowéy szypkości w iednakowym czasie.

229. Nazywa się *śródkim ciężkości* ciała, albo *układu* ciał, (to jest, wielu ciał z sobą połączonych), punkt tego ciała, przez który przechodzi siła, złożona z osobnych sił, któremi kaźda cząstka tego ciała albo tego układu ciał, byłaby nagabana przez przyrodzoną czynność waźności; niechby to ciało albo ten układ

układ ciał, znajdował się w iakiém chce położeniu.

Np. jeżeli w ninieyszym położeniu trójkąta ABC (fig. 52), siła złożona z czynnościów waźności przeciwko wszystkim cząstkóm tego trójkąta, przechodzi przez pewny punkt G powierzchni jego; i jeżeli w inném położeniu abc , pominiona siła przechodzi przez ténże punkt G . to takowy punkt nazywa się *śródkim ciężkości*. Zobaczymy wkrótce, że takowa siła złożona, zawżę przechodzi przez ténże sam punkt w wszelakich położeniach ciała, iakie tylko byđ mogą.

230. Wynalezienie takowego śródka, jest łatwe na fundamencie tego, co wzwyż powiedziało się o użyciu momentów, do znalezienia siły złożonéy z wielu sił równoległych.

Jakóź, niech będzie M, N, P (fig. 53), fig. 53. tak wiele ciał ile się spodoba, których miąższości (na tę chwilę) uważać będziemy iakoby skupione w punktach B, A, C , rozumiejąc ie tym czasem położone na iednéy płaszczyznie. Niechay będzie p szypkość, do iakiéy nadania kaźdemu ciału w iednéy chwili, dąży siła waźności, którato szypkość podług (171), w kaźdém z tych ciał jest iednakowa. To w takim razie przez $p \times M$, albo przez pM, pN, pP , będą wyrażone ilości ruchu, czyli siły, mocą których te ciała dążą do ruchu w kierónkach równoległych $C'D, B''B, A''A$. Lecz podług tego co się rzekło (219), żeby mieć położenie

nie siły złożone z tych wszystkich sił, trzeba wziąć sumę momentów względem jakiegokolwiek punktu T , obranego na linii prostopadłej tym kierónkom, i tę sumę rozdzielić przez sumę sił; więc na wartość odległości TG'' , w której przechodzi pomieniona siła złożona, mieć będziemy $TG'' = \frac{pM \times TB'' + pN \times TA'' + pP \times TD}{pM + pN + pP}$; co po

wyrugowaniu wspólnego czynnika p , wychodzi na $TG'' = \frac{M \times TB'' + N \times TA'' + P \times TD}{M + N + P}$.

Lecz poprowadziwszy linie BB' , AA' , DC' , równoległe linii TG'' , i kończące się na linii pionowej TC' , zmyśliwszy sobie nadto, że punkt G' wzięty na kierónku siły złożonej, jest szukanym środkiem ciężkości, a następnie poprowadziwszy $G'G$, równoległą linii TG'' , mieć będziemy $TG'' = G'G$, $TB'' = BB'$, $TA'' = AA'$, $TC' = C'D$; więc $G'G = \frac{M \times BB' + N \times AA' + P \times C'D}{M + N + P}$; to jest, o-

kręśliwszy znaczenie tego słowa *moment*, i nierozumiejąc przez nie więcej, tylko mnogość z miąższości ciała przez odległość jego od jakiejś linii prostej, można powiedzieć.

Ze odległość wspólnego środka ciężkości wielu ciał, od pewnej linii prostej, znajduje się, rozdzieliwszy sumę momentów tych ciał (momentów, uważonych względem pomienionej linii prostej), rozdzieliwszy ją mówię przez sumę miąższości.

Daymy teraz, że układowi ciał M , N , P , dało się położenie przeciwne, tak że linia TA'' przedtem pozioma zamieniła się w pionową, a odwrotnie pionowa TC' w poziomą; to i w tym razie okazałoby się

podobnie, że ażeby mieć odległość siły złożonej od linii TA'' teraz pionowej, trzeba wziąć sumę momentów względem TA'' , i rozdzielić ją przez sumę miąższości; tak iż mielibyśmy podobnie $GG'' = \frac{M \times BB'' + N \times AA'' + P \times DC''}{M + N + P}$. Wy-

nalazłszy zaś odległości od G , do dwóch linii stałych i znaiomych TA'' i TC' , jawna jest, że położenie takowego punktu, który jest środkiem ciężkości, będzie wiadome; bo odległości BB' , BB'' , AA' , AA'' i. t. d. rozumieć się będą wiadome, z przyczyny, że nam jest wolno obrać sobie punkt T gdzie się spodoba, przez który prowadzą się linie TA'' i TC' .

231. Jeżeli odległości AA'' , BB'' , i. t. d. każda z nich jest zerem, to jest, jeżeli wszystkie ciała są położone na iednójże linii prostej TA'' , to w takim razie summa momentów względem téj linii, będzie zerem; więc i odległość GG'' musi być także zerem. A zatem jeżeli wiele ciał, uważonych jakoby były punktami, znajduje się położonych na téjże linii prostej, to wspólny ich środek ciężkości, znajdować się także będzie na téjże linii prostej.

232. Gdyby linie TA'' i TC' , ta lub owa, albo też obie tak były poprowadzone, iżby ciała wypadły położone po obu stronach linii, to natenczas zamiast summy momentów

mentów, trzeba wziąć sumę momentów, ciał położonych z jednej strony, mniej summa momentów ciał znajdujących się po drugiej stronie. Co zaś tycze się mianownika ułamka, wyrażającego odległość środka ciężkości, to takowy zawsze złożony będzie z summy miąższości; bo siły ważności odpowiadające tym miąższościom, skutkują wszystkie w jednakiem rozumieniu. I to rościąga się powszechnie do wszelkiej liczby ciał, które uważane jakoby były punktami, wszystkie znajdując się na jednej płaszczyźnie. Są to wszystko wnioski stąd co się rzekło (219). Linie TA , TA'' nazywają się *Ośiami Momentów*.

233. Teraz daymy, że punkt T , pierwéy wzięty podług upodobania, przypada w punkcie G ; to w takim razie odległości GG' i GG'' , każda przemienia się w zero. Więc summa momentów względem TC , i summa momentów względem TA , każda w tymże przypadku, musi także być zerem.

234. Stąd wnosi się: że jeżeli summa momentów odpowiadających wielu ciałom, wziętych względem linii prostej RS , przechodzącej przez punkt G (fig. 54), jest zerem; iako téż i summa momentów uważonych względem linii prostej PQ , prostopadłej linii RS , przecho-

fig. 54.

dzą-

dzający przez punkt G , jeżeli jest także zerem; to i summa momentów względem wszelkiej innej linii MN , przechodzącej przez tenże punkt G , musi także być zerem.

Jakóż, spuściwszy prostopadłe AA' , AA'' na linie PQ , RS , MN , jeżeli punkt I , rozumić będziemy takim punktem, w którymby linia AA' spotykała się z linią MN ; to trójkąt prostokątny GAI da nam: Wst. GIA' albo dost. PGM : GA' albo AA'' :: wst. PGM : AI

$$= \frac{AA'' \text{ wst. } PGM}{\text{dost. } PGM}; \text{ więc } AI = AA' - AI$$

$$= AA' - \frac{AA'' \text{ wst. } PGM}{\text{dost. } PGM}. \text{ Lecz w trójkącie prostokątnym } IAA'' \text{ (rozumiejąc promień } = 1), \text{ mieć będziemy, } 1 : AI :: \text{ wst. } AIA'' \text{ albo dost. } PGM : AA''; \text{ więc } AA'' = AI \times \text{dost. } PGM; \text{ to jest } AA'' = AA' \times \text{dost. } PGM - AA'' \text{ wst. } PGM; \text{ a zatem rozmnożywszy przez miąższość } A, \text{ mieć będziemy moment } A \times AA'' = A \times AA' \times \text{dost. } PGM - A \times AA'' \text{ wst. } PGM; \text{ to jest że moment odpowiadający ciału } A, \text{ względem osi } MN, \text{ równa się dostawie kąta } PGM, \text{ rozmnożony przez moment wzięty względem osi } PQ, \text{ mniej wstawia tegoż kąta } PGM, \text{ rozmnożona przez moment wzięty względem osi } RS.$$

Łatwo zaś widzieć się daie, iż toż samo można przysłówać do wszelkiego innego ciała, oprócz różności co do znaków, wynikających z odmienności położenia ciał,

Tom III.

U

gdy

gdy takowe z iednëyże lub z różnych stron linii MN znaydować się będą. Więc wzięwszy sumę wszystkich momentów względem osi MN , znaydziemy iż takowa równa się dostawie kąta PGM , rozmnożonę przez sumę momentów, wziętą względem linii PQ , mnięj wstawia kąta PGM , rozmnożoną przez sumę momentów, wziętą względem linii RS . Lecz podług założonego przypuszczenia, każda z tych dwóch ostatnich sum jest zerem; więc mnogości wynikające z rozmnożenia tychże sum przez dostawy i wstawy kąta PGM , będą podobnież zerem; a zatem: *Summa momentów wzięta względem osi iakiëykolwiek MN , przechodzącej przez środek ciężkości G , jest także zerem.*

235. Stąd tedy wniéśmy sobie, że czynność, wynikająca z osobnych czynnościów ważności przeciwko każdëj cząstce układu ciał, zawsze przechodzi przez iedënże punkt tegoż układu, samo położenie układu niechayby było iakie chce; albowiem summa momentów odpowiadająca wielu siłom, równoległym, niemoże być zerem, tylko względem kierunku siły złożonęj z tamtych sił.

Wreszcie, lubo dotąd niemówiło się tylko o ciałach, których środki ciężkości byłyby położone na iednëyże płaszczyźnie, atoli to wszystko co poprzedziło, niemnięj rościaga się do przypadków, w których części układu znaydowałyby się na różnych

pła-

płaszczyznach; iako się to okaże stąd co następuje.

236. Jeżeli ciała (uważając je zawsze iakoby były punktami) nieznaydują się na iednëyże płaszczyźnie, to należy zmyślić sobie płaszczyznę poziomą XZ (fig. 49); i linie pionowe PA , QB , SC spuszczone z każdego punktu ważnego P , Q , S ; natenczas, ażeby wynaléśdź punkt E , co przez niego przechodzi siła złożona RE , w której kierunku powinniśmy znaydować się środek ciężkości, trzeba wziąć (223) momenta względem dwóch linii prostych stałych TX , TZ , obranych na płaszczyźnie pozioméj ZX , a sobie wzajemnie prostopadłych, trzeba mówię wziąć summy momentów, iak gdyby wszystkie ciała znaydowały się na tëyże płaszczyźnie pozioméj, i każdą z tych dwóch sum momentów, rozdzieliwszy przez sumę miąższościów P , Q , S , wypadną dwie odległości EE i EE . Niezostanie tedy więcę do czynienia tylko wynaléśdź, w iakiëj odległości EG poniżej płaszczyzny pozioméj XZ , jest położo-

U 2

zo.

żony takowy środek ciężkości. Lecz zmyśliwszy sobie poprzedzającą figurę tak przewróconą, iż płaszczyzna XZ zrobiłaby się pionową, a płaszczyzna ZV zamieniłaby się w poziomą, daie się widzieć na tymże fundamencie, iż ażeby mieć odpowiadającą odległość EG , równą szukaney wysokości EG , trzeba wziąć sumę momentów względem ZT , iak gdyby wszystkie ciała znajdowały się na iednędzy płaszczyźnie ZV , i takową sumę momentów rozdzielić przez sumę miąższościów; a natenczas, iuż będzie wiadomo wszystko, czego tylko potrzeba do naznaczenia środka ciężkości.

237. Więc to wszystko co się rzekło, krótko powtórzywszy, szukanie środka ciężkości zależy na tém:

1^o Kiedy wszystkie ciała, uważone iakoby były punktami, znajdują się bydyż położone na iednędzy linii prostey (fig. 55), to trzeba wziąć sumę momentów względem iakiego punktu stałego F , obranego na téżę linii podług upodobania, i takową sumę rozdzielić przez sumę miąższościów; wieloraz pokaże odległość środka ciężkości G , od takowego punktu F . *2^o* Kiedy

fig. 55.

wszy-

wszystkie ciała, uważone iakoby były punktami, znajdują się bydyż położone na iednędzy płaszczyźnie; to trzeba zmyślić sobie dwie linie TA' , TA'' (fig. 53), prostopadłe jedna drugiej, obrane podług upodobania na téżę płaszczyźnie, i przecinające przez punkt T ; a potem z każdego punktu ważnego, poprowadziwszy prostopadłe na każdą z tych dwóch linii, trzeba sobie znowu zmyślić, iakoby te punkta ważne, były przyłożone na linię TA'' , i TA' z kolei, każdy na taki punkt, do którego przytyka odpowiadająca mu prostopadła. To zrobiwszy, postępuje się iak w poprzedzającym przypadku, szukając gdzie przypada środek ciężkości G'' na linii TA'' , i gdzie znowu przypada środek ciężkości G' na linii TA' ; a dopiero przez te dwa punkta poprowadziwszy linie $G''G$, $G'G$ równoległe liniom TA'' i TA' , punkt w którym te dwie linie spotykają się, będzie żądanym środkiem ciężkości. *3^{ci}*. Naostatek, kiedy ciała, uważone iakoby były punktami, znajdują się będą na różnych płaszczyznach; to trzeba zmyślić sobie trzy płaszczyzny; iedną poziomą (fig. 49), a inne dwie pionowe i wzajemnie sobie prostopadłe. Potem, z każdego punktu ważnego, spuszcza się prostopadła na każdą z tych płaszczyzn, i wzięta summa momentów względem każdéj z tych płaszczyzn, każda z nich dzieli się przez sumę miąższościów; a tym sposobem pokażą się trzy odległości środka ciężkości od każdéj z tych trzech płaszczyzn. W tém obęysciu zawsze należy na to pamiętać, ażeby, kiedy niektóre z ciał są położone z różnych stron czyto punktu, czy linii, czy téż płaszczyzny, względem której biorą się momenta, ażeby mówić momenta odpo-

fig. 53.

fig. 49.

U 3

wia-

wiadające ciałom z różnych stron położonym, brać z przeciwnemi znakami.

238. Połóżmy tu jeszcze jedną uwagę, wynikającą bezśrodknie stąd co się dopiero powiedziało, która w wielu okazyach, może przyspieszyć wynalezienie środka ciężkości, i ułatwić inne przypadki.

Ponieważ odległość środka ciężkości, równa się summie momentów rozdzielonych przez sumę miąższościów; a jeżeli punkt, linia, albo płaszczyzna, względem której uważają się momenta, przechodzi przez środek ciężkości, takowa odległość, równająca się w ten czas zerowi, sprawia że summa momentów, musi także być równa zerowi. Więc można powiedzieć ogółem, że *summa momentów uwzględnionych względem bądź iakiędy chce płaszczyzny, przechodzącej przez środek ciężkości, jest zawsze zerem.*

239. Dotąd uważaliśmy ciała, iak gdyby były punktami, i widzieliśmy iakim sposobem wynayduie się spólny środek ciężkości tych wszystkich punktów, chociażby ich było iak naywięcej. A ponieważ ciało ob-

objętości i postaci iakiędykolwiek, nieieft co innego, tylko zbiór niezmierny liczby innych ciał czyli części materjalnych, które poczytać sobie można za punkta, więc idzie za tem, iż tymże samym sposobem, zawsze można wynaleźć środek ciężkości, wszelkiego ciała bądź iakiędy chce postaci; iak zobaczymy w różnych przykładach niżej położonych.

Ze zaś środek ciężkości, nieieft co innego, tylko punkt, przez który przechodzi uśilność złożona z wszystkich osobnych uśilnościów, mocą których części ciała podają się ile ważności, i że oraz ta uśilność złożona, równa się summie wszystkich uśilnościów osobnych; więc wnieśmy stąd: że zawsze wszelką wagę ciała można rozumieć skupioną w swoim środku ciężkości, i że ta waga czyni tam tenże sam skutek, iakiby czyniły osobne wagi wszystkich części materjalnych w jedno zebrane.

240. Więc wynalazłszy spólny środek ciężkości wielu miąższościów iakichkolwiek postaci; trzeba naprzód szukać środka ciężkości odpowiadającego, każdę z tych miąższościów, w czém teraz już żadney trudności mieć niepowinniśmy. Potem, uważając wagę każdę z tych miąższościów, niby skupioną w swoim środku ciężkości, trzeba szukać spólnego środka ciężkości, iakby te wszystkie ciała były punktami, każdy położony w tém miejscu, któremu odpowiada iego środek ciężkości.

241. Więc to wszystko, co do-
tąd powiedziało się o spólnym śro-
dku ciężkości wielu ciał, uważo-
nych jakby były punktami, zaró-
wno służy wszelkim ciałom iakię-
kolwiek postaci, byleby w oszacó-
waniu momentów, za odległość ka-
żdego ciała, brać odległość iemu
własnego środka ciężkości.

242. Więc, jeżeli wiele ciał,
niech będą iakię chce postaci, mają
swoje osobne środki ciężkości na ie-
dną linię prostą, albo na iedną płaszczyznę,
to ich spólny środek
ciężkości, będzie także położony na
tęż linię prostą, lub na tęż płaszczyznę.
To podanie, dowodzi
się w tenże sam sposób, jak było
wyżej (231).

243. Teraz przystąpmy do przy-
kładów.

fig. 56.

Niechay będzie AB (fig. 56), linia pro-
sta wszędzie wciąż iednokształtnie ważna;
iawna jest, że iey środek ciężkości powinién
bydź w samej połowie. Lecz żeby go wy-
naléśdź podług fundamentu zasadzającego się
na momentach, zobaczmy iakby sobie nale-
żało postąpić.

Naprzód trzeba sobie zmyślić tę linię,
iakoby przedzieloną na niezmierną liczbę czą-
stek takich iak Pp , i każdą z nich rozmnożyć
przez odległość iey od iakiego punktu sta-
tego

tego, iakoto np. przez odległość od końca
 A ; potem trzeba wziąć sumę tych mno-
gościów, i rozdzielić ją przez sumę części
 Pp , to jest przez linię AB . Oznaczmy
tedy sobie AB przez a ; AP przez x ; a
mieć będziemy $Pp = dx$; momentem tedy
cząstki Pp będzie xdx , ilość, którą trzeba
scałkować, ażeby mieć sumę wszystkich
momentów; takową sumę pokaże się bydź
 $\frac{x^2}{2}$;

co żeby stółowało się do odległości ca-
łej linii, należy rozumieć $x = a$; co nam da
na całą sumę momentów $\frac{a^2}{2}$; którą rozdzie-

liwszy przez sumę a miąższościów, poka-
że się $\frac{a}{2}$, na odległość środka ciężkości od

punktu A . A zatem środek ciężkości linii
prostej iednokształtnie ważnej, znajduie się
w samej połowie; co téż samo przez się jest
rzeczą oczywistą.

244. Więc róđ. Żeby mieć środek cięż-
kości obwodu iakiegokolwiek wielokąta (fig. 57),
trzeba z połowy każdego boku, spuścić pro-
stopadłe na dwie linie stałe AB, AC , po-
prowadzone na płaszczyźnie tegóż wieloką-
ta; a uważając wagę każdego boku, iakoby
skupioną w iego połowie, trzeba szukać spól-
nego środka ciężkości odpowiadającego tym
wszystkim ważnym punktom, iak przepisa-
ło się (230).

245. 2re Środek ciężkości powierzchni
iakiegokolwiek równoległoboku, znajduie się
zawsze w samej połowie linii, łączący śro-
dki dwóch boków sobie przeciwnych. Albo-
wiém zmyśliwszy sobie równoległobok, iak-
oby złożony z linii materyalnych, równo-
le-

ległych tym dwóm bokóm, każda z tych linii będzie mieć swój środek ciężkości na linii przechodzącej przez środki tych dwóch boków. A zatem spólny środek ciężkości tych wszystkich linii, musi także znajdować się na téjże linii. Musi nadto być położony w iey połowie; bo takowa linia, uważana iakoby była obciążona temi wszystkiemi wagami, rozumie się być iednokształtnie ważna.

246. 3cie Zeby mieć środek ciężkości fig. 58. powierzchni trójkąta ABC (fig. 58); trzeba z wierzchołka A , do połowy D , boku naprzeciw położonego BC poprowadzić linią prostą AD ; i oznaczyć, (biorąc od punktu D) część $DG = \frac{1}{3}AD$.

Jakóż, linia AD , dzieląca na dwie połowy linią BC w punkcie D , dzielić także będzie na połowę każdą inną linią MN równoległą linii BC ; więc uważając powierzchnię trójkąta, iakoby złożoną z wielu linii materialnych równoległych linii BC , linia AD przechadząca przez osobne środki ciężkości tych wszystkich linii, przechodzić także musi przez środek ciężkości wszystkim spólny (231), to jest przez środek ciężkości samego trójkąta. Z téjże przyczyny, linia CE , przechodząca przez połowę linii AB , przechodziłaby także przez środek ciężkości tego trójkąta; więc takowy środek musi znajdować się w punkcie G , w którym dwie linie CE i AD przecinaia się z sobą. Lecz poprowadziwszy linią ED , takowa będzie równoległa linii AC , iako dzieląca na dwie połowy każdy z boków AB , BC ; więc dwa trójkąty EGD , AGC , iako téż i trójkąty ABC , EBD będą podobne sobie, i dadzą, $GD:AG::ED:AC::BD:BC::1:2$; więc

więc GD , jest połową linii AG ; a zatem trzecią częścią linii AD .

247. Wnieśmy tedy stąd, iż ażeby mieć środek ciężkości G nierównoległoboku (fig. 59), trzeba przez środki E i F dwóch boków równoległych CD i AB , poprowadzić linią EF , iako téż inne dwie EA , FD przeciągnięte od tychże dwóch punktów do kątów A i D naprzeciw położonych; a potem zrobiwszy $Eg = \frac{1}{3}EA$, i $Fg' = \frac{1}{3}FD$, trzeba poprowadzić linią gg' , która przetnie linią EF w punkcie żądanym G .

Albowiem rozumując w podobny sposób iak uczyniło się względem trójkąta; iakwna jest, że środek ciężkości powinién być na linii EF . Nadto, ponieważ g i g' (246), są dwoma środkami ciężkości osobnemi, odpowiadającemi trójkątóm CAD , ADB , składającym nierównoległobok $ABDC$, więc spólny środek ciężkości tych dwóch trójkątów, czyli całego nierównoległoboku, powinién znajdować się na linii gg' (131); a zatem musi być położony w samém przecięciu G . Poszukaymy teraz odległości FG .

Poprowadźmy linie gh i $g'h'$ równoległe linii AB . Ponieważ $gE = \frac{1}{3}AE$, a $Fg' = \frac{1}{3}FD$, więc będzie $gh = \frac{1}{3}AF$, a $g'h' = \frac{1}{3}ED$; albo $gh = \frac{1}{6}AB$, a $g'h' = \frac{1}{6}CD$. Z téjże przyczyny $Eh = \frac{1}{3}EF$, $Fh' = \frac{1}{3}EF$; więc $hh' = \frac{1}{3}EF$. Lecz trójkąty Ghg , $Gh'g'$ podobne sobie, dają $gh:Gh::g'h':Gh'$; więc $gh + g'h':Gh + Gh'::g'h':Gh'$, to jest $\frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}CD::\frac{1}{3}EF:Gh'$.

$\frac{1}{6}EF::\frac{1}{6}CD:Gh'$; więc $Gh' = \frac{\frac{1}{6}EF \times CD}{AB + CD}$; więc FG które jest $= Fh' + Gh'$ będzie $= \frac{1}{3}EF + \frac{\frac{1}{6}EF \times CD}{AB + CD}$, to jest $FG = \frac{\frac{1}{3}EF \times (AB + 2CD)}{AB + CD}$.

Uważ.

Uważmy tu po drodze, że gdyby wysokość nierównoległoboku, była niezmiernie mała, a oraz dwa boki AB i CD , niezmiernie mało różniłyby się jeden od drugiego, to w takim razie, pomienione boki powinny poczytać się za równe sobie, tak iż odległość

FG , wychodzi na $\frac{\frac{1}{2}EF \times 3AA}{2AB}$, albo na $\frac{1}{2}EF$;

to jest że natenczas środek ciężkości znayduie się byż położony w równy odległości od dwóch boków przeciwnych.

248. Już tedy teraz łatwo będzie wynaléść sobie środek ciężkości odpowiadający powierzchni iakiegokolwiek wielokąta (fig. 60). Trzeba naprzód podzielić go na trójkąty, a wynaléztłszy sposobem wzwyż przepisany, środek ciężkości każdego zosobna trójkąta, wynaydzie się potem spólny środek ciężkości tych wszystkich trójkątów, uważając ie, iakoby były miążzosciami proporcjonalnemi swoim powierzchniom, skupionemi, każda zosobna, w swoim środku ciężkości. Co wykona się podług przepisu (230). A stąd iawnie pokazuje się, iakim sposobem można wynaléść środek ciężkości, odpowiadający powierzchni wszelkiej bryły, zamykającej się powierzchniami płaskiemi.

249. Wreszcie, w wynaydowaniu środków ciężkości niezawse uciekać się trzeba do Momentów. Np. gdyby trzeba było szukać środka ciężkości odpowiadającego obwodowi pięciokąta regularnego $ABCDE$ (fig. 61); z iednego spomiędzy kątów jego, iakoto z A , poprowadziłbym linią prostą AF do środka F boku CD naprzeciw położonego, iako też z kąta E , poprowadziłbym podobnie drugą linią do środka boku BC

BC , na przeciw położonego; tak przecięcie spólne G tych dwóch linii, dałoby mi środek ciężkości.

Jakóż, spólny środek ciężkości dwóch boków AB , AE , iest w połowie e linii ba , przechodzący przez połowy pomienionych dwóch boków; i to iest oczywiste. Niemniej, spólny środek ciężkości dwóch boków BC , DE , z téż przyczyny, iest w połowie e linii Id , przechodzący przez połowy takowych boków. Naostatek, bok CD , ma swój środek ciężkości w punkcie F . Lecz łatwo widzieć się daie, że linia AF , przechodzi przez środki e , e i F , więc przechodzi także przez spólny środek ciężkości wszystkich pięciu boków. A że przez podobneż poprzedzającemu rozumowanie, możnaby okazać, że i linia IE przechodzi przez tenże środek, więc środek ciężkości pięciokąta, musi byż w punkcie G , w którym linie AF , i IE wzajemnie przecinaia się.

250. Rozumując, iak uczyniliśmy względem trójkąta, okazałoby się, że punkt G , iest także środkiem ciężkości odpowiadającym powierzchni pięciokąta regularnego. I ogółem, tymże sposobem przekonaćby się można, że środek ciężkości czyto obwodu czy powierzchni wielokąta regularnego, nieparzystej liczby boków, znayduie się byż położony w punkcie przecięcia dwóch linii, z których każda byłaby poprowadzona, od iednego z kątów, do środka boku naprzeciw położonego. A w wielokątach parzystej liczby boków, takowy środek, znayduie się w przecięciu dwóch linii, poprowadzonych przez środki dwóch boków sobie przeciwnych; skąd wniosłoby się, gdyby tego była potrzeba, że środek ciężkości okręgu, albo powierzchni kół, iest położony w środku figury,

Kie-

Kiedy liczba linii, powierzchniów, brył i. t. d. których szuka się wspólnego środka ciężkości, nie jest znaczna, to można postąpić sobie według przepisu wzywyż podanego (206 i 207). Np. niech będą zadane trzy punkta A, B, C (fig. 62), które byłyby środkami ciężkości trzech linii, albo trzech powierzchniów, lub też trzech brył, mających wagi swoje, oznaczone przez miąższości M, N, P . Z tych trzech punktów łączymy z sobą dwa B i C przez linię BC , trzeba przedzielić linię CB w punkcie D , na takie dwie części, ażeby było $N : P :: CD : BD$ albo $N + P : N :: CB : CD$, a tak punkt D , będzie wspólnym środkiem ciężkości dwóch miąższości P i N . Potem poprowadzimy linię DA , i zmyślimy sobie dwie miąższości $N + P$ niby skupione w punkcie D , trzeba podobnie przedzielić DA w stosunku odwrotnym dwóch miąższości M i $N + P$; to jest tak, ażeby było, $N + P : M :: AE : DE$ albo $N + P + M : M :: AD : DE$; a następnie punkt E , będzie wspólnym środkiem ciężkości trzech miąższości M, N, P . Tymże sposobem należałoby obchodzić się dalej, gdyby więcej brył było zadano.

251. Wnieśmy tedy sobie stąd co poprzedziło, że zawsze łatwo mieć można środek ciężkości powierzchni i bryłowości wszelkiego wielościanu i wálka. Jakóż iawna jest, że takowy środek ciężkości, powinniśmy znajdować się w połowie linii przechodzącej przez środki ciężkości dwóch podstaw sobie przeciwnych; bo te ciała składają się z zrazów doskonale równych, i podobnych podstawie, które dać się uważać, jakoby były osobnymi bryłkami równej wagi, iednókształtne rozłożonemi na téjże linii.

252. Zeby mieć środek ciężkości G Piramidy trójkątnej $SABC$ (fig. 63); trzeba fig. 63. poprowadzić linię SF z wierzchołka do środka ciężkości F iey podstawy, i na pomienionej linii, poczynając od punktu F , wziąć część $FG = \frac{1}{4}SF$.

Zeby poiać przyczynę tego postępk; poprowadźmy z środka D boku AB , linię DC, DS , a zrobimy $DF = \frac{1}{2}CD$, i $DE = \frac{1}{2}DS$, punkta F i E będą środkami ciężkości dwóch trójkątów ABC, ASB . To założymy, jeżeli zmyślimy sobie Piramidę złożoną z płaszczyzn materyalnych równoległych ABF , to linia SF przechodząca przez punkt F podstawy, przechodzić także będzie przez taki punkt w każdej płaszczyźnie, który znajdować się będzie w każdej z nich iednako położony. A zatem osobne środki ciężkości każdej takowej płaszczyzny, wszystkie znajdować się muszą na linii SF . Z téjże przyczyny, osobne środki ciężkości płaszczyzn równoległych płaszczyźnie ABS , z iakich można rozumieć byż złożoną Piramidę, będą wszystkie na linii EC . Więc środek ciężkości całej Piramidy, musi byż położony w punkcie G , w którym dwie linie FS i EC wzajemnie przecinają się. A teraz jeżeli poprowadzimy linię EF , takowa będzie równoległą linii CS ; bo z przyczyny że DF jest trzecią częścią linii DC , a DE jest trzecią częścią linii DS , dwie linie DC i DS są przecięte proporcjonalnie. Dwa tedy trójkąty FEG, GCS będą sobie podobne, tóż rozumieć się ma o trójkątach DFE, DCS ; a zatem będzie $FG : GS :: FE : CS :: DF : DC :: 1 : 3$; więc FG , jest trzecią częścią linii GS , a zatem czwartą częścią linii FS .

253. Ponieważ każda bryła może być rozłożona na Piramidy trójkątne, więc mając już teraz znany środek ciężkości Piramidy trójkątnej, łatwo będzie przy pomocy Momentów, wynaleźć środek ciężkości jakiegokolwiek innego ciała.

254. Taki tedy jest w powszechności sposób wyznaczania środków ciężkości odpowiadających figurom albo bryłom, którychby części niezależały jedne od drugich, albo przynajmniej, kiedyby niebyło danego wyrazu, oznaczającego owo prawo, jakim pomienione części są połączone jedne z drugimi. Ale kiedy części figury lub ciała jakiegokolwiek, mają między sobą jaką zawisłość, mogącą wyrazić się w równaniu, to natenczas środek ciężkości, daleko łatwiej da się wynaleźć. Zobaczmy to w przykładach.

255. Niechay będzie naprzód zadano, żeby wynaleźć środek ciężkości G łuku jakiegokolwiek linii krzywéy AM (fig. 64); trzeba zmyślić sobie łuzek niezmiernie mały Mm ; i na os momentów obrać sobie linią jakąkolwiek CN , równoległą rzędnym, które także rozumiemy być wzajemnie sobie równoległe. Rozumiemy nadto, że odległość od C do początku A odcinków, jest $= b$. Zeby mieć odległość Gg od środka ciężkości do osi CN , trzeba wziąć sumę momentów.

fig. 64.

mentów, odpowiadających łukom Mm , względem osi CN , i rozdzielić ją przez sumę łuków Mm , to jest przez łuk AM . Lecz z przyczyny, że łuk Mm jest niezmiernie mały, odległość od środka jego n do linii prostéy CN , powinna być poczytana za równą linii MN ; więc moment tego małego łuczku, będzie wyrażony przez $Mm \times MN$.

Teraz, oznaczwszy AP przez x ; PM przez y ; mamy (73) $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, a $MN = CP = b - x$; więc momentem małego łuczku Mm , będzie $(b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}$; a zatem $\int (b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}$, albo całka ilości $(b - x) \times \sqrt{dx^2 + dy^2}$, pokaże sumę momentów, odpowiadającą wszystkim łuczkom niezmiernie małym Mm , z których składa się łuk AM . Będzie tedy $Gg = \frac{\int (b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{AM}$. Co się tyczy łuku

AM , to jest dzielnika niniejszej ilości, już indziej (73) podaliśmy sposób, jak naznaczyć wartość jego doskonałą, kiedy to być może, a (85) nauczyliśmy jak się wyznajduje przez przybliżenie. Na fundamencie podobnegoż temu rozumowania, pokażaloby się, że odległość Gg' od środka ciężkości do osi AP jest $= \frac{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{AM}$.

Te są więc powszechne formuły, służące do wyznaczenia środka ciężkości w łuku jakiegokolwiek linii krzywéy.

256. Gdyby łuk, którego środka ciężkości dochodzić mamy, składał się z dwóch części równych i sobie podobnych AM , AM' (fig. 65), położonych po obojey stronie osi odcinków; to w takim razie jawna jest, że środek ciężkości G , znajdować się będzie na linii AP ; niezostanie tedy więcej do czynienia, iak tylko wynaléśdź odległość jego od punktu C . Lecz i tu niemniéy oczywista jest, że ponieważ momenta łuków Mm , $M'm'$ względem osi NN' są sobie równe, więc odległość CG będzie — — —

$$= \frac{2 \int (b-x) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{MAM'}$$

Np. niechay łuk MAM' byłby łukiem kołowym, mielibyśmy $y = \sqrt{ax - xx}$; gdzie a rozumié się bydź średnicą. Pokazałoby się łatwo, i już to widzieliśmy na swoim miejscu, iako $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} \frac{adx}{\sqrt{ax - xx}}$.
 A zatem będzie $2 \int (b-x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{2 \int a(b-x) dx}{\sqrt{ax - xx}} = a \int (b-x) dx (ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$.
 Daymy, dla łatwości, że punkt C jest środkiem, to w takim razie byłoby $AC = b = \frac{1}{2}a$; mielibyśmy tedy, $2 \int (b-x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = a \int (\frac{1}{2}a - x) \times dx (ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = a \int (ax - xx) (66)$; całka, do której niéma potrzeby dodawać stałeczny; bo kiedy $x=0$, to i ona prze-

przemienia się w zero, iak bydź powinno; z przyczyny że natenczas sumą momentów jest także zero.

Mieć tedy będziemy naostatek, $2 \int (b-x) dx \sqrt{dx^2 + dy^2} = a \int (ax - xx)$; a zatem

$$CG = \frac{a \int (ax - xx)}{MAM'} = \frac{\frac{1}{2}a \times 2 \int (ax - xx)}{MAM'}$$

$= \frac{CA \times MM'}{MAM'}$; skąd wnosi się ta proporcya, $MAM' : MM' :: CA : CG$, która nas uczy: Że odległość od środka koła, do środka ciężkości iakiegokolwiek łuku należącego do tegoż koła, jest czwartą proporcjonalną, długości łuku, jego ciężkości, i promieniowi.

Też same formuły dają się przystosować do wszelkiéy innéy linii krzywey; a taráz przyśpamy już do środków ciężkości, odpowiadających powierzchnióm płaskim, zamkniętym liniami krzywemi.

257. Gdyby zadano było, znaleźć środek ciężkości powierzchni APM (fig. 66), daymy że takowy środek jest oznaczony przez G . Zeby mieć odległość Gg , trzeba wziąć sumę momentów, odpowiadających małym nierównoległobokóm $MPmp$, względem CN , i rozdzielić ją przez sumę tychże nierównoległoboków, to jest przez rozległość APM . Lecz środek ciężkości i , odpowiadający temu małemu równoległobokowi,

W 2 po-

powinién znajdować się w połowie linii prostej nk , równo oddalony od MP i od mp , albo w połowie linii MP , z przyczyny niezmiennie małej wysokości Pp ; więc odległość il będzie $= CP$; a zatem moment rozległości $PpmM$, względem linii CN , będzie $PpmM \times CP$, to jest $(b-x)ydx$, oznaczwszy CA przez b , a AP przez x . Więc na wyrażenie summy momentów, mieć będziemy $\int (b-x)ydx$; a zatem odległość Gg , jest $= \frac{\int (b-x)ydx}{APM}$. Podobnymże sposobem znaleźlibyśmy odległość $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2}ydx}{APM}$.

258. W powszechności można wynaléść tymże samym sposobem środek ciężkości wszelkiej rozległości płaskiej, rozłożywszy ją na nierównoległoboki niezmiennie małe.

Np. gdyby rzecz szła o trójkąt ANN' (fig. 67); trzeba obrać sobie podstawę NN' i wysokość AC za osi momentów; a oznaczwszy AP przez x ; MM' przez y ; i AC przez b ; będzie $MM'm'm = ydx$; zatem na moment tego nierównoległoboku względem NC , wypadnie $(b-x)ydx$; tak iż odległość Gg środka ciężkości od podstawy, będzie wy-

wyrażona przez $\frac{\int (b-x)ydx}{APM}$. Lecz oznaczwszy podstawę przez c , byłoby $AC : AP :: NN' : MM'$; to jest $b : x :: c : y = \frac{cx}{b}$; więc $\int (b-x)ydx$, wychodzi na $\int (b-x) \frac{cx}{b} dx$, albo na $\frac{c}{b} (\int bxdx - \int x^2 dx)$, którego wyrażenia całką, jest $\frac{c}{b} (\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3})$, albo $\frac{cx^2}{6b} (3b - 2x)$. A że powierzchnia AMM' wyraża się przez $\frac{MM' \times AP}{2}$ albo przez $\frac{cx^2}{2b}$, więc na odległość środka ciężkości, wypada $\frac{\frac{cx^2}{6b} (3b - 2x)}{\frac{cx^2}{2b}}$, albo $\frac{1}{3} (3b - 2x)$,

ilość wychodząca na $\frac{1}{3}b$, kiedy jest $x=b$. Więc $Gg = \frac{1}{3}b$. Lecz znowu poprowadzwszy linię AGL , trójkąty ACL , GgL podobne sobie, dają $LG : LA :: Gg : AC :: \frac{1}{3}b : b :: 1 : 3$; więc $LG = \frac{1}{3}LA$; co właśnie zgadza się z podaniem wyżej okazanem (246).

259. Przystósujemy teraz te formuły do linii krzywych.

Daymy że APM (fig. 68) jest częścią koła, którego średnicą byłoby a , a środkiem C ; skąd wypada $b = \frac{1}{2}a$. Mićc będziemy $y = \sqrt{(ax - xx)}$. Wyrażenie tedy $\int (b-x)ydx$, przemieniając się na $\int (\frac{1}{2}a - x) \sqrt{(ax - xx)} dx$, albo na $\int (\frac{1}{2}a - x) \sqrt{(ax - xx)} dx$, jest zgodne do całkowania, i ma za całkę $\frac{1}{3} (ax - xx)^{\frac{3}{2}}$; ilość,

do, który niema potrzeby przydawać stateczny, to wychodzi na zero, w ten czas kiedy $x=0$, iak bydz powinno. Mieć tedy będziem

$$Gg = \frac{\frac{1}{2}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}}{APM} = \frac{\frac{1}{2}(PM)^3}{APM}$$

Co się tycze odległości Gg' ; ponieważ mamy $y = \sqrt{(ax - xx)}$, więc wartością jego $\int \frac{1}{2}g^2 dx$ (257), będzie $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2} \cdot (a - xx) dx}{APM}$

Lecz $\int \frac{1}{2}(ax - xx) dx$, albo $\int \frac{1}{2} \cdot (ax dx - x^2 dx)$, daie $\frac{1}{2} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$ albo $\frac{1}{12} x^2 (3a - 2x)$;

$$\text{więc będzie } Gg' = \frac{\frac{1}{12} x^2 (3a - 2x)}{APM}$$

Gdyby szło o cały odcinek, ponieważ fig. 65. iawna iest, że środek ciężkości G (fig. 65), znajduje się bydz położony na promieniu CA , który dzieli łuk na dwie połowy, i że powiniem bydz w tęże odległości od NN' iak są dwa ołobne środki ciężkości, odpowiadające dwóm Półodcinkóm APM , APM ;

$$\text{więc będzie } CG = \frac{\frac{1}{24} PM^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24} \cdot 8 \cdot (PM)^3}{APM} = \frac{\frac{1}{3} (PM)^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24} (MM')^3}{\frac{1}{2} APM} = \frac{\frac{1}{12} (MM')^3}{APM}$$

to iest, że odległość od środka koła do środka ciężkości, odpowiadającego powierzchni iakiegokolwiek odcinka, równa się dwunastey części sześcianną cięciwy, dwunastey części mowie, rozdzieloney przez powierzchnią tegoż odcinka.

260. A co należy do środka ciężkości odpowiadającego wycinkowi $CMAM'$ (fig. 60); takowy można mieć, uważając, że środek ciężkości G odcinka MAM' , środek cięż-

ciężkości G' wycinka, i środek ciężkości G'' trójkąta, wszystkie są położone na promieniu CA ; i że na fundamencie momentów, moment wycinka, powiniem równać się momentowi odcinka, więc moment trójkąta. A zatem będzie $CMAM' \times CG' = MAM' \times CG + CMM' \times CG''$. Lecz znaleźliśmy dopiero wyżej $CG = \frac{\frac{1}{2}(PM)^3}{APM}$, co da się odmienić na $\frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{2 APM}$;

Nadto wiadomo nam iest, że $CMM' = PM \times CP$, i (245) $CG'' = \frac{2}{3} CP$. Więc używszy tych wartości, mieć będziem $CMAM' \times CG' = \frac{2}{3}(PM)^3 + \frac{2}{3} PM \times (CP)^2 = \frac{2}{3} PM[(PM)^2 + (CP)^2] = \frac{2}{3} PM \times (CM)^2$, z przyczyny trójkąta prostokątnego CPM .

Więc $CG' = \frac{\frac{2}{3} PM \times (CM)^2}{CMAM'}$. Lecz znowu powierzchnia wycinka $CMAM'$, równa się łukowi MAM' rozmnożonemu przez $\frac{CM}{2}$;

$$\text{więc } CG' = \frac{\frac{2}{3} PM \times (CM)^2}{MAM' \times \frac{CM}{2}} = \frac{\frac{2}{3} PM \times CM}{MAM'}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} MM' \times CA}{MAM'}$$

to iest, że odległość od środka koła, do środka ciężkości iakiegokolwiek wycinka tegoż koła, iest czwartą proporcjonalną łukowi, promieniowi, i dwóm trójkóm cięciwy. Te formuły łatwo przystoić wać sobie można do wszelkiéy innéy linii krzywéy, iakoto np. do Paraboli i. t. d.

261. Przyśtąpmy teraz do powierzchniów krzywo wypukłych,

ale tylko przestając na samych bryłach kołowrotnych. Rozumując iak w poprzedzających przypadkach, pokazałoby się, że środek ciężkości każdego paska składkowego, jest położony na osi kołowrotnej fig. 70. CA (fig. 70), i powinién być uważany iakoby w środku P iednéy z podstaw tego paska, przyczytawszy mu grubość niezmiérnie małą.

Lecz, na wyrażenie takowego paska, mieliśmy wyżej (74), $\frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, gdzie $r : c$ wyraża stosunek promienia do okręgu; więc (oznaczywłszy przez b odległość AC , od początku A odcinków, do osi NN' momentów), mieć będziemy, $\frac{c}{r} (b-x) y \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ na moment odpowiadający temu paskowi; tak iż odległością CG środka ciężkości G odpowiadającego powierzchni, od punktu C , (nazwawszy S taką powierzchnią), będzie

$$\frac{\int \frac{c}{r} (b-x) y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{S}$$

262. Stosując tę regułę do przykładu, daymy że ma być wynaleziony środek ciężkości odpowiadający powierzchni wypukłej stożka prostego ANN' (fig. 71), w którym AP byłoby oznaczone przez x ; PM przez y ; wysokość AC przez b ; promień CN podstawy, przez a ; a bok AN przez e . Z przyczyny trójkątów ACN , Mrm podobnych

bnych sobie, mieć będziemy, $AC : AN :: Mr : Mm$; to jest $b : e :: dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{edx}{b}$. Podobnież, z przyczyny trójkątów ACN i APM podobnych sobie, mieć będziemy $AC : CN :: AP : PM$; to jest $b : a :: x : y$

$= \frac{ax}{b}$; więc $\int \frac{c}{r} (b-x) y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, odmiénia się, na $\int \frac{c}{r} \times (b-x) \times \frac{ax}{b} \times \frac{edx}{b}$, albo

na $\int \frac{cae}{rb^2} (bxdx - x^2 dx)$; ilość, której całką jest $\frac{cae}{rb^2} \times (\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3})$, albo $\frac{caex^2}{6rb^2} \times (3b - 2x)$.

Lecz podług (Jeom. 220), powierzchnia części $AM'LMA = \frac{AM^2}{2} \times \text{okr. } PM$; tak iż jest $AC : AP :: AN : AM$, albo $AM = \frac{AP \times AN}{AC}$, więc $S = \frac{AP \times AN}{2AC} \times \text{okr. } PM$

$= \frac{c}{r} \times \frac{ae}{2bb} xx$; a zatem, odległością od punktu C do środka ciężkości, odpowiadającego powierzchni $AM'LMA$, jest $\frac{caex^2}{6rb^2} (3b - 2x)$, albo $\frac{1}{3}(3b - 2x)$, albo $b - \frac{2}{3}x$.

Więc kiedy $x = b$, albo kiedy $AP = AC$, to odległość CG środka ciężkości, odpowiadającego całej powierzchni stożka, jest $= b - \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}b$; to jest, że środek ciężkości odpowiadający powierzchni wycinka, jest ténże sam, co środek ciężkości odpowiadający powierzchni trójkąta ANN' .

263. Na drugi przykład obierzmy sobie fig. 72. kulę (fig. 72). Mieńc będziemy $y = \sqrt{(ax - xx)}$, gdzie przez a rozumiemy się średnicę; zaś

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}; \text{ więc } \int \frac{c}{r} (b-x)y \times$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)}, \text{ przemienia się na } \int \frac{c}{r} (b-x)$$

$\times \frac{1}{2}adx$; rozumiejąc tedy punkt C bydź środkiem, przez co wypada $b = \frac{1}{2}a$, mielibyśmy

$$\int \frac{c}{r} (b-x) \times \frac{1}{2}adx = \int \frac{ca}{2r} (\frac{1}{2}adx - xdx); \text{ co}$$

wychodzi na $\frac{ca}{2r} (\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}xx)$, albo na $\frac{cax}{2r} (\frac{1}{2}a$

$-\frac{1}{2}x)$. Lecz na wyrażenie powierzchni

S odcinka kulowego $AMLM'A$ mieliśmy

$\frac{cax}{2r}$; więc odległość CG od środka C figury,

do środka ciężkości G , jest $= \frac{\frac{cax}{2r} (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)}{\frac{cax}{2r}}$

$= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x = CA - \frac{1}{2}AP$; to jest, że środek G , znajduje się bydź położony w połowie G , wysokości AP tego odcinka. Skąd wnosi się ogółem, że środek ciężkości odpowiadający powierzchni paska kulowego, zawartego między dwiema płaszczyznami równoległymi, jest położony w połowie wysokości tegoż paska.

264. Zakńczmy tę materyą, na szukaniu środków ciężkości w figurach brylastych. Uważając bryłę (fig. 70), iakoby złożoną z zrazów niezmiernie cięnkich, wzajemnie sobie równoległych, i ozna-

czywizy ogółem przez ss , powierzchnią każdego zrazu, a przez dx onego grubość, mielibyśmy na wyrażenie takowego zrazu $ssdx$, a zatem na wyrażenie momentu odpowiadającego, względem płaszczyzny równoległej tym zrazom i przechodzącej w odległości AC od wierzchołka A , równy b , mielibyśmy $ss(b-x)dx$. Więc oznaczywszy przez S bryłowatość $ALMM'A$, na odległość środka ciężkości wypadnie nam ilość $\frac{\int ss(b-x)dx}{S}$.

Lecz wartość bryłowatości S , wynduie się podług sposobów podanych w Rachunku Całkowym; a wartość ilości $\int ss(b-x)dx$, może bydź wynaleziona temiż sposobami, byleby mieć ss wyrażone w x ; więc łatwo będzie mieć odległość środka ciężkości, względem iednéy iakiey płaszczyzny znaioy. Podobnymże sposobem trzebaby poszukać odległościów tegoż środka ciężkości, od dwóch innych płaszczyzn, wzajemnie i sobie i piérwizéy płaszczyźnie prostopadłych. Ale tu przestaniemy tylko na takich bryłach, w których zrazy równoległe, każdy z nich

nich ma osobny swóy środek ciężkości na iednéyże linii prostéy; iakiémto bryłami są piramidy i bryły kołowrotne.

265. Przyśtośuymy to naprzód do Piramid. Niechay będzie b , wysokość AC piramidy iakiéykolwiek (fig. 73); x , odległość prostopadła AP iednego zrazu któregokolwiek; ee niech będzie powierzchnia podstawy. Podług (Jeom. 202), powierzchnią zrazu położonego w odległości x od wierzchołka, wynaydziemy przez tę proporcją, bb :

$$xx :: ee :: \frac{eexx}{bb}; \text{ a zatem mieć będziemy } SS$$

$$= \frac{eexx}{bb}; \text{ więc } \int ss(b-x)dx, \text{ przemienia się}$$

$$\text{na } \int \frac{ee}{bb} (bx dx - x^2 dx), \text{ co wychodzi na}$$

$$\frac{ee}{bb} \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \text{ albo na } \frac{eex^3}{12bb} (4b-3x). \text{ Lecz}$$

$$\text{bryłowatością Piramidy mającay za wysokość } x, \text{ a } ss \text{ albo } \frac{eexx}{bb} \text{ za podstawę, jest } \frac{eex^3}{3bb}$$

$$\text{więc na odległość środka ciężkości wypada}$$

$$\frac{eex^3}{12bb} (4b-3x), \text{ albo } \frac{1}{4} (4b-3x), \text{ albo } b - \frac{1}{4}x.$$

Którato ilość, kiedy $x=b=AC$, przemienia się na $\frac{1}{4}b$; więc podniesienie Cg , środka ciężkości G nad podstawę, wynosi $\frac{1}{4}b$.

Teraz, niechay będzie g , środkiem ciężkości podstawy; to w takim razie linia Ag , będzie

będzie przechodzić przez środek ciężkości G piramidy; a równoległe Gg' i gC , dadzą nam Cg' albo $\frac{1}{4}b : AC$ albo $b :: Gg : Ag$; więc $Gg = \frac{1}{4}Ag$; co służy na potwierdzenie tego co rzekło się indziéy (252), i uczy nas, że w każdéy piramidzie, środek ciężkości odpowiadający bryłowatości, jest położony na czwartéy części, odległości środka ciężkości podstawy iéy od wierzchołka.

266. Co się zaś tycze brył kołowrotnych, w takowych ogołem na wartość powierzchni ss , podług (78), mamy $\frac{cy^2}{2r}$; a zatem w nich odległość środka ciężkości, będzie

$$\text{wyrażona przez } \frac{\int cy^2(b-x)dx}{S}.$$

267. Przyśtośuymy naprzód tę formułę do stożka uciętego, składającego część stożka prostego (fig. 74). Niechay będzie m , fig. 74 promieniem BD większéy podstawy, a n promieniem AC mniejszéy podstawy. Zmyśliwszy sobie linią AQ , równoległą wysokości CD , i spotykającą się w punkcie O z promieniem PM paska MLM ; z tym promieniem mówię, położonym na płaszczyźnie nierównoległoboku $ACDB$, mieć będziemy AQ albo $CD : BQ :: AO$ albo $CP : MO$; to jest, oznaczywszy CD przez h ; CP przez x ; PM przez y ; będzie $h : m-n :: x : y-n$;

$$\text{więc } x = \frac{h}{m-n} \cdot (y-n); \text{ a } dx = \frac{hdy}{m-n}.$$

$$\text{Lecz tu mamy } b=h; \text{ więc } b-x = h - \frac{h}{m-n}(y-n).$$

$$= \frac{h}{m-n} (m-y); \text{ więc } \int \frac{cy^2(b-x)dx}{2r} \\ = \frac{ch^2}{2r(m-n)^2} \int y^2(m-y)dy = \frac{ch^2}{2r(m-n)^2} \\ \left(\frac{my^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) + C = \frac{ch^2}{24r(m-n)^2} (4my^3 - 3y^4) + C.$$

Zeby wynaléśdź przyzwoitą wartość statecznéj C , uważam, że całka czyli suma momentów powinna wypadać zerem w punkcie C , to jest kiedy $y = n$. Mić tedy

$$\text{będę } \frac{ch^2}{24r(m-n)^2} (4mn^3 - 3n^4) + C = 0, \text{ al-}$$

$$\text{bo } C = -\frac{ch^2}{24r(m-n)^2} (4mn^3 - 3n^4); \text{ więc sum-}$$

mę momentów wziętych od punktu C do

$$\text{punktu iakiegokolwiek } P, \text{ jest } \frac{ch^2}{24r(m-n)^2} \times$$

$$(4my^3 - 3y^4 - 4mn^3 + 3n^4); \text{ a od punktu}$$

$$C \text{ aż do } D, \text{ na takową sumę wypada } \frac{ch^2}{24r(m-n)^2} (4m^4 - 3m^4 - 4mn^3 + 3n^4), \text{ albo}$$

$$\frac{ch^2}{24r(m-n)^2} (m^4 - 4mn^3 + 3n^4), \text{ albo } \frac{ch^2}{24r} \times$$

$(m^2 + 2mn + 3n^2)$; teraz tedy niezoſtanie, tylko rozdzielić tę ilość przez bryłowatość ſtożka uciętego, którą łatwo mić można, i której także już daliśmy wyrażenie na in-
nem mieyscu (Alg. 215).

Gdybyśmy zaś chcieli wynaléśdź od-
ległość CG , ſrzedka ciężkości odpowia-
jącego uciętemu ſtożkowi $ANN'B$ (fig. 75),
wydrążonemu walcowo i równolegle, wa-
kolo oſi; od wynalezionego dopięć wyra-
że-

fig. 75.

żenia na moment odpowiadający pełnemu ſtożkowi uciętemu, trzeba by odjąć moment wálka wnétrznego, uważając go bydź z téjże materyi co ſtożek, to jest że trzeba by odjąć mnogość wynikającą z rozmnożenia tego wálka przez połowę jego wysoko-
ści, a reſztę trzeba by rozdzielić przez bry-
łowatość ſtożka wydrążonego; bryłowatość do której, wynalezienia podaliśmy ſpółób (Alg. 215).

Na tych fundamentach, łatwo można wynaléśdź ſrzedek ciężkości w armacie KL (fig. 76), której trzy ſztuki głównejsze, za fig. 76. warte między AB , BC , i CD , ſą w rzeczy ſaméj trzema ſtożkami wydrążonemi, tegóż rodzaju co fig. 75. Ponieważ ſiąd co po-
przeſzło, mamy wyrażenie momentu, od-
powiadającego każdemu z tych trzech ucinków ſtożkowych względem podſtawy, więc łatwo mić ie także możemy względem końca K gálki gronowéj, dodawszy do każdego z nich mnogość, wynikającą z rozmnożenia ſtożka, przez odległość jego więkſzéj podſtawy od punktu K . Do takiéj zaś summy momentów dodadzą ſię potém momenta dna i grona, iako téż ozdób, obręczów i czopów zgrubſza oſzacowanych; a naostat-
tek rozdzieliwszy wſzyſtko przez miążſzość armaty, wypadek pokaże odległość ſrzedka ciężkości od końca K gálki gronowéj.

Na fundamentach już dotąd podanych, możnaby nawet ſciſle obrachować momenta ozdób; ale w praktyce, doſyć będzie za moment każdéj, wziąć mnogość wynikającą z rozmnożenia iéw bryłowatości przez odległość od punktu K do tego punktu oſi, któremu odpowiada ſrzedek takowéj ozdoby. Obierzmy ſobie na drugi przykład odcinki kołowe. Niechay będzie ſrze-
dni-

fig. 77. dnica oznaczona przez a ; odcinek AP przez x ; (fig. 77); rzędna PM , przez y ; mamy $y = ax - xx$; a zatem summa momentów odpowiadających zrazóm składowym odcinka $AMLM'A$, wziętych względem osi iakiękolwiek NN' , będzie wyrażona przez

$\int_0^c \frac{c}{2r} (b - x) \times (ax - xx) dx$. Więc względem środka C , gdzie $b = \frac{1}{2}a$, też summa

będzie wyrażona przez $\frac{c}{2r} \int_0^{\frac{1}{2}a} (\frac{1}{2}a - x) \times (ax - xx) dx$, albo przez $\frac{c}{2r} \int_0^{\frac{1}{2}a} (\frac{1}{2}aax - \frac{1}{2}axx$

$+ x^3) dx$, albo przez $\frac{c}{2r} (\frac{1}{4}aax^2 - \frac{1}{2}ax^3 -$

$+ \frac{1}{4}x^4)$, co wychodzi na $\frac{c}{8r} x^2 (a - x)^2$.

Lecz $\frac{c}{8r} x^2$, wyraża powierzchnię koła, ma-

iącego za średnicę wysokość AP odcinka, więc na moment tego odcinka względem środka C , wypadnie $CP^2 \times \text{kol. } AP$. A zatem rozdzieliwszy to wyrażenie przez bryłowatość odcinka, (którą łatwo mieć można podług Jeom. 248), wypadek pokaże odległość środka ciężkości tego odcinka, od środka C całej kuli.

Na tym fundamencie łatwo wynaleśdź fig. 78. środek ciężkości bomby (fig. 78). Od momentu całej kuli, wziętego względem iakiękolwiek punktu, trzeba odjąć moment wnętrznę kuli, potem do reszty przydać moment dna, wzięty względem tegoż samego punktu, a na koniec wszystko rozdzielić przez miąższość bomby. Lecz wzięwszy środek C

23

za punkt, względem którego uważają się momenta, moment tak całej kuli iako też moment wnętrznę kuli, każdy z nich wypadnie zerem, więc nie trzeba będzie, tylko moment dna wzięty względem środka bomby rozdzielić przez miąższość bomby, a wieloraz stąd wynikający, da odległość CG od środka bomby do środka ciężkości onęże, odrzuciwszy uszy i. t. d.

Zeby zaś mieć środek ciężkości bomby nabitę, trzeba wziąć różnicę między momentem odcinka kulowego iaki zajmuje nabój prochu, a między momentem odcinka składającego dno, z których każdy wynayduie się iak nauczyło się wyżej; ale uważając ażeby każdy moment rozmnożyć przez ważność przyrodną, to jest pierwszy przez wagę sześciennę stopy prochu, a drugi przez wagę sześciennę stopy żelaza, jeżeli bryłowatość była w sześciennych stopach obrachowana; naostatek takowa różnica rozdzielić się przez całą wagę razem bomby i prochu.

Własności środków ciężkości.

269. Stąd, co dotąd powiedziało się o środkach ciężkości, iako też co wyżej poprzedziło o file złożonę z wielu sił równoległych, iawna jest, że jeżeli wszystkie części ciała, albo iakiękolwiek układu ciał, każda z nich ma jednakową szypkość, albo każda z nich dąży do ruchania się z jednakową szypkością, iawna jest mówię, że siła zło-

Tom III.

X

20-

żona z tych wszystkich ruchów, przechodzi przez środek ciężkości takowego ciała, albo takowego układu ciał, a zatem pomiéniony układ ruchu się albo dąży do ruchu, tak iak gdyby wszystka całkowitość miąższościów była skupiona w środek ciężkości, i była nadana taką szypkością iaką jest nadana każda cząstka.

270. Skąd wnieść należy na odwrót, że przyłożywszy do środka ciężkości iakiego ciała, albo układu ciał, iakąkolwiek siłę, wszystkie równe części takowego układu, równo podzielą się tym ruchem i wszystkie zostaną popędzone z równą szypkością, którą można wynaléśdź (158), rozdzieliwszy ilość ruchu przyłożonego do tego środka, przez całą miąższość ciała albo układu ciał.

Jakóż, siła złożona z wszystkich ruchów, nadanych częściom układu, powinna być takąż sama tak co do ilości iak co do kierunku, iaka była użyta przeciwko temu ciału. Gdyby zaś iedne z cząstek miały nabydź więkšzý szypkości iak drugie, to łatwo możnaby dowieśdź że siła złożona z tych wszystkich ruchów nieprzechodziłaby przez środek ciężkości; co téż tém iasniéy da się widzieć w dalszym przeciagu.

271. A ponieważ wiele sił przyłożonych do iednegóz punktu, (na fundamencie zaśad poprzedzających, mogą być wszystkie obrócone w iedną siłę, więc należy stąd wnieśdź ogo-

ogolém, że, niech będą przyłożone iakiekolwiek siły, do środka ciężkości iakiego ciała albo układu ciał, niechay będzie ich tyle iak się spodoba, i niechay mają bądź iakiekolwiek kierónki, to wszystkie części tego ciała albo tego układu ciał nabędą iednakowéy szypkości, mającéy téż same kierónki co siła złożona z tych wszystkich sił, którato szypkość równać się będzie ilości ruchu, wyrażającéy takową siłę złożoną, téy mówię ilości ruchu rozdzielonéy przez całą miąższość ciała albo układu ciał.

272. Skąd znowu wnosi się. Ze kiedy siły skutkujące przecieko ciału, przemieniaią się albo mogą być przemienione w iedną siłę, któraby kierónek przechodził przez środek ciężkości, to w takim razie, takowe ciało niebędzie obracać się około swego środka ciężkości.

273. Ale jeżeli siły czyniące przeciwko ciału, niemożę być przemienione w iedną, albo mogą być przemienione w iedną siłę, jeżeli kierónek takowéy siły złożonéy nieprzechodziłby przez środek ciężkości, to natenczas wszystkie części układu, niebędą mieć spólnego ruchu; atoli środek ciężkości tak ruchać się będzie, iak gdyby wszystkie siły były do niego bezárzednie

przyłożone. A to jest, co właśnie teraz okazać mamy.

274. Zmyślmy sobie naprzód fig. 79. trzy ciała M, N, P , (fig. 79) popędzone w kierunku linii równoległych AD, BE, CF położonych na iednójże lub na różnych płaszczyznach, szypkości zaś tych ciał, dajmy że oznaczają linie AD, BE, CF . Niechay będzie G środkiem ciężkości tych ciał w ten czas, gdy znajdują się w punktach A, B, C ; a G niech będzie ich środkiem ciężkości w ten czas, gdy staną w punktach D, E, F , dokąd razem przybędą, bo szypkości ich rozumieją się być wyrażone przez linie AD, BE, CF . Teraz jeżeli poprowadzimy linią GG' , mówię że takowa, będzie równoległa tamtym, że będzie drogą, którą przebieży środek ciężkości G w ciągu ruchu ciał pomienionych, i że środek ciężkości G przebieży tę linią w ruchu iednokształtnym.

10d. Łatwo widzieć się daie, że droga czyli tór środka ciężkości, będzie równoległa liniom AD, BE i. t. d.; albowiem w którymkolwiek bądź miejscu rozumiejąc położony takowy środek ciężkości w iakię-

kol-

kolwiek chwile czasu, jeżeli zmyślmy sobie płaszczyznę przechodzącą przez ten środek, to summa momentów względem tej płaszczyzny powinna być zerem (238). Lecz znowu zmyśliwszy sobie płaszczyznę równoległą kierunkom ciał, i przechodzącą przez punkt G , momenta wzięte względem tej płaszczyzny, muszą być zerem przez cały czas ruchu; bo rozumie się że pomienione ciała nie oddalały się od niej w biegu swoim; więc odległości ich od tejże płaszczyzny, są zawsze iednakowe, więc i momenta są też iednakowe; a że na początku ruchu, to jest kiedy środek ciężkości znajdował się w punkcie G , summa momentów było zero, więc ta summa musi zawsze być zerem, niech pomienione ciała znajdują się bądź w którymkolwiek miejscu kierunków swoich; więc środek ciężkości zawsze jest położony na płaszczyźnie równoległej kierunkom ciał i przechodzący przez początkowe położenie G , tegoż środka. A ponieważ w niniejszym rozumowaniu, położenie takowej płaszczyzny niezawisło iak tylko od tego warunku, ażeby była równoległą kierunkom ciał M, N, P i przechodziła przez punkt G ; więc podobnymże sposobem można dowieść, że takowy środek powinien znajdować się na wszelkiej ianęj płaszczyźnie równoległej kierunkom ciał i przechodzący przez punkt G ; a zatem musi znajdować się na spólnym przecięciu takowych płaszczyzn; skąd wnosi się, że środek ciężkości przebiega linią GG' równoległą kierunkom ciał pomienionych.

2re Mówię, że tenże środek ruchu się iednokształtnie; to jest, że po przybyciu ciał M, N, P i. t. d. do punktów a, b, c , i. t. d. jeżeli środek ciężkości znajdzie się być

X 3

w g.

w g, to będzie $GG' : Gg :: AD : Aa :: BE : Bb ::$ t. d. to jest, że rozległości, które przebiegaia śródek ciężkości i każde z ciał w iednymże czasie, mają się między sobą iak ich szypkości. Jakóż, zmyśliwszy sobie płaszczyznę oznaczoną przez RS , którejby kierónki ruchów były prostopadłe; z natury śróodka ciężkości mieć będziemy (236), $M \times AH + N \times BI + P \times CE = (M + N + P) \times GK$. I z téyże przyczyny, gdy przerzeczane ciała stana w punktach D, E, F będzie $M \times DH + N \times EI + P \times FL = (M + N + P) \times GK$. Teraz odiawszy od tego zrównania pierwsze zrównanie, (i dawszy baczenie na to że $DH - AH = AD, EI - BI = BE$, i. t. d.) będzie $M \times AD + N \times BE - P \times CF = (M + N + P) \times GG'$. Więc na tymże samym fundamencie, gdy ciała staną w punktach a, b, c , będzie $M \times Aa + N \times Bb - P \times Cc = (M + N + P) \times Gg$. A że linie Aa, Bb, Cc w równym czasie bywiaia przebieżone iednokształtnie, więc takowe rozległości (156) powinny bydź między sobą iak szypkości AD, BE, CF ; będzie tedy $AD : BE :: Aa : Bb; AD : CF :: Aa : Cc$; więc $Bb = \frac{Aa \times BE}{AD}, Cc = \frac{Aa \times CF}{AD}$.

Położywszy te wartości w naszym ostatniem zrównaniu, i wyrugówawszy mianownika AD , przerzeczane zrównanie przemieni się w to, $(M \times AD + N \times BE - P \times CF) \times Aa = (M + N + P) \times Gg \times AD$. A naostatek rozdzieliwszy to zrównanie przez owo, w które wchodzi GG' , będzie $Aa = \frac{Gg \times AD}{GG'}$; skąd wnosi się $GG' : Gg :: AD : Aa$; to jest, co przedsięwzięliśmy byli okazać.

Uważ-

Uważmy teraz, że zrównanie w które wchodzi GG' daie $GG' = \frac{M \times AD + N \times BE - P \times CF}{M + N + P}$. Lecz

linie AD, BE, CF, GG' oznaczaią szypkości ciał M, N, P , i śróodka ciężkości G , więc $M \times AD, N \times BE$ i. t. d. będą wyrażeniami ilościów ruchu. A zatem ponieważ rozumowanie poprzedzaiące wcale niezależy od liczby ciał, więc można sobie wnieść w powszechności iód *Ze iezeli tak wiele ciał iak się spodoba, przebiegaia iednokształtnie linie równoległe, to śródek ciężkości przebiega także iednokształtnie linią równoległą tamtym.* 2^{re} *Ze szypkość iego, równa się summie ilościów ruchu, iakiemi są natchnione ciała dybiące w iedną stronę, mnię summa ilościów ruchu, iakiemi są natchnione ciała dybiące w rozumieniu przeciwném, równa się mowie téy summie, rozdzielony przez summe miąższościów.*

275. Gdyby niektóre z ciał znajdowały się w spoczynku, ponieważ w takowym razie szypkością tych ciał byłoby zero, więc i ilośćią ruchu byłoby także zero; a

X4

za-

zatem takowa ilość ruchu odpadła by z licznika ułamka, wyrażającego szypkość środka ciężkości; ale to w mianowniku nieuczyniłoby żadnej odmiany, który zawsze składać się będzie z summy wszystkich miąższościów.

276. Gdyby summa ilościów ruchu odpowiadających ciałom dybiącym w jedną stronę, równała się summie ilościów ruchu, odpowiadających ciałom dybiącym w rozumieniu przeciwném, to natenczas licznikiem ułamka, wyrażającego szypkość środka ciężkości, byłoby zero. Węc w takim przypadku środek ciężkości znajdowałby się w spoczynku. A zatem niechby były jakie, chcą ruchy równoległe wielu ciał, to spólny ich środek ciężkości, znajdowałby się będzie w spoczynku, kiedy summa ilościów ruchu, odpowiadających ciałom dybiącym w jedną stronę, równa się summie ilościów ruchu, odpowiadających ciałom dybiącym w rozumieniu przeciwném.

277. Ponieważ siły oznaczają się przez ilości ruchu (158), i ponieważ siła złożona z wielu sił równoległych (219) równa się summie sił czyniących albo dążących do czynności w jedną stronę, mniemy summa sił czyniących albo dążących do czynności w rozumieniu przeciwném, więc wnieśmy sobie stąd:
Ze

Ze jeżeli wiele sił równoległych, są przyłożone do różnych części jakiegokolwiek układu ciał, to środek ciężkości takiego układu, rucha się w taki sposób, jak gdyby te siły były do niego bezśrednie przyłożone.

278. Teraz dajmy że ciała, w takię liczbę jak tylko spodobać się może, dybaia w kierunku bądź jakichkolwiek linii prostych. Jeżeli zmyślimy sobie dwie linie proste iakiekolwiek, wzajemnie prostopadłe jedna drugiej, a w punkcie spólnego ich spotkania się z trzecią linią prostopadłą płaszczynie pierwszych dwóch linii; to zawsze będzie można szypkość każdego ciała, rozłożyć na inne trzy równoległe trzem liniom przerzeczonym. A że wynika stąd, co dopiero wyżej powiedziało się, że ruch środka ciężkości, na fundamencie ruchów równoległych iednej z pomięniowych linii, będzie równoległy téż linii, będzie iednokształtny, i że szypkość iego, równać się będzie summie ilościów ruchu, * oszacowanych równoległe téż linii, takowey mówię summie, rozdzielonę przez summę miąższościów; więc pozwoliwszy, że na tym fundamencie wynalazi się ruch środka ciężkości równoległe każdej z tych trzech linii, i że potem te trzy ruchy złożyły się w ieden, (co zawsze bydz może, bo wszystkie są przyłożone do tegoż
pun-

* Przez to co tu dla skrócenia nazywamy summą ilościów ruchu, zawsze rozumieć się ma summa ilościów ruchu, odpowiadających ciałom dybiącym w jedną stronę, mniemy summa ilościów ruchu, odpowiadających ciałom, dybiącym w rozumieniu przeciwném.

punktu), pokaże się stąd iedyny tór śrzedka ciężkości. A że składki których tu używamy, nie są co innego, tylko sameż siły, iakiemi ciała rozumieją się bydź natchnione równolegle tym trzem liniom, i że siła iedyna śrzedka ciężkości, tym sposobem znayduie się bydź złożona z sił złożonych równolegle każdéy z przerzeczonych linii, więc musi bydź koniecznie równa i równoległa siłé złożonéy z wszystkich sił przyłożonych do tych wszystkich ciał; więc w powszechności. Niech będą iakie chcą kierunki i wartości sił przyłożonych do różnych części układu ciał, to śrzedek ciężkości ruchu się zawsze, albo dąży do ruchania się w taki sposób, iak gdyby te wszystkie siły były do niego bezśrzednie przyłożone.

279. W rozumowaniu poprzedzającym rzekło się, że zawsze szypkość każdego ciała, można rozłożyć na trzy inne szypkości równoległe trzem liniom danym z położenia. Atoli gdyby kieronek iednego z ciał był równoległy płaszczyźnie dwóch z trzech linii zadanych, albo był równoległy iednéy z tychże trzech linii, to zdawałoby się że w pierwszym przypadku, niemożna rozłożyć pominionéy szypkości tylko na dwie siły równoległe dwóm z trzech linii; a w drugim przypadku ta szypkość niemoże wcale bydź rozłożona na siły równoległe dwóm innym liniom.

ióm. Pomimo téy pozornéy trudności, przecież podanie niemniéy iest powłzechne; albowiem widzieć się daie, np. że byleby linia AB (fig. 80) fig. 80. niebyła równoległa iednéy z dwóch linii PR , PQ , to siłę oznaczoną przez AB , zawsze można rozłożyć na inne dwie AC , AD , równoległe tym dwóm liniom; ale też oraz niemniéy widzieć się daie, że im bardziéy linia AB zbliżać się będzie do równoległości względem linii PQ , tém bardziéy siła AD zmniejszać się będzie, tak iż przemiéni się w zero, gdy linia AB stanie się równoległą linii PQ . Więc w takim przypadku, niemniéy poymować można rozłożenie na dwie siły, z których iedna byłaby zerem. Z téyże przyczyny i w tymże przypadku, można poymować rozłożenie na trzy siły równoległe liniom PQ , PR , PS , ale z których dwie byłyby zerami.

280. Stąd co dopiero poprzedziło, iako też stąd co powiedziało się (275), należy wnieść: Ze śrzedek ciężkości układu ciał, zostanie w spoczynku, jeżeli rozłożywszy siły przyłożone do każdéy części układu, na inne siły równoległe trzem liniom wzajemnie sobie prostopadłym, sumą sił albo ilościów

ru-

ruchu równoległe względem każdej z trzech linii, jest zero; biorąc z znakami przeciwnymi siły skutkujące w rozumieniach przeciwnych.

281. Kiedy wszystkie siły znajdują się na jednéjże płaszczyźnie, jawna jest, że dążyć będzie rozłożyć każdą siłę na dwie inne równoległe, dwóm liniom wzajemnie sobie prostopadłym, na téjże płaszczyźnie poprowadzonym; bo ponieważ w takim razie, siły prostopadłe płaszczyźnie, są zerami, więc i ruch środka ciężkości wynikać mający z czynności tych sił musi także być zerem.

282. W tém wszystkiém co dopiero wyżej powiedziało się, rozumieliśmy iakoby każde z ciał wchodzące w układ, było zupełnie i swobodnie posłuszne siłom która go nagaba. Ale téż w samej rzeczy miałyby jeszcze miejsce, chociażby pomienione ciała w swoich ruchach podlegały iakiemuś przymusowi, byleby takowe zawady niepochodziły od siły obcej czyli nienależącej do tego układu ciał, to jest, byleby niebyły insze, tylko te, co wynikają z trudności iaką mieć mogą takowe ciała w poddaniu się ruchowi, dla sposobu w który są rozporządzone iedne względem drugich, albo w który są połączone iedne z drugimi. Wywód tego nastąpi niżej, po wyłożeniu osobna powszechnych zasad, na których gruntuie się Równowaga ciał, i onych ruchy.

Zasada powszechna na której gruntuie się Równowaga Ciał.

Niech będzie tak wiele sił iak się spodoba (bądźto czyniących bądź

bądź odpornych) przyłożonych do ciała, albo do układu ciał, albo do iakięj filni i. t. d. niechay mają kierunki iakie chcą; ieżeli zmyślimy sobie każdą z tych sił, rozłożoną na inne trzy, równoległe trzem liniom poprowadzonym przez iakikolwiek punkt, a wzajemnie sobie prostopadłym, to ażeby te wszystkie siły zostały w równowadze, trzeba ażeby suma sił* czyniących równoległe względem każdej z tych trzech linii, była zerem.

Jakóż widzieliśmy wyżej (227), że niechay będzie iaka chce liczba i natura sił, zawsze można wszystkie takowe siły, przemienić w inne trzy, którychby kierunki były równoległe trzem liniom wzajemnie sobie prostopadłym. Więc przypuściwszy, że wszystkie siły wchodzące w układ ciał, znajdują się w równowadze, wynika stąd, że i te trzy siły z tamtych wszystkich złożone, muszą także znajdować się w równowadze, albo téż każda z nich musi być zerem. Ale że te trzy siły złożone będąc wzajemnie sobie prostopadłymi, niemogą nic ani sobie zaszkodzić ani dopomóc, więc każda z nich musi być zerem. Lecz znowu, każda z nich po-

* Przez sumę sił, tak tu iako i dalej na potém, rozumiemy zawsze, sumę sił czyniących albo dążących do czynienia w iednym rozumieniu, mniéj summa sił czyniących albo dążących do czynienia w rozumieniu przeciwném.

podług (223) równa się summie sił cząstkowych one składających i oneyże równoległych; więc w rzeczy samey, summy sił, które (przez rozłożenie) skutkują równolegle każdej z trzech linii wzajemnie sobie prostopadłych, takowe mówię summy sił, każda z nich musi być zerem.

284. Gdyby wszystkie siły były wykierowane na iednąże płaszczyźnie, to summa sił równoległych każdej z dwóch linii poprowadzonych na téj płaszczyźnie prostopadle iedna drugiéy, byłoby zero. Gdyby zaś wszystkie siły były wzajemnie sobie równoległe, to trzeba ażeby summa tych wszystkich sił, była zerem. Te dwa przypadki zawierają się oczywiście w podaniu powszechném.

285. Uwżamy to dobrze, że to Podanie w wszelkim przypadku równowagi zawsze ma miejsce, ale myliłby się ktoś rozumiać, że dosyć jest na niem samém do sprawienia Równowagi. Inne warunki potrzebne do takowey równowagi, odmieniają się podług własnościów i szczególnych rozporządzeń części wchodzących w układ ciał, albo w Siłnią o którą rzecz idzie; w następującym Tomie o tém mówić się będzie, tu zaś podają się tylko powszechne fundamenta.

286. Ta zasada jest powszechna, bądź to że siły przyłożone do różnych części układu ciał, są wszystkie czyniące bądź też że tylko niektóre z nich są czyniące, a inne

ne są odporne, iakie są podpory, punkta nieruchome, powierżchnie i. t. d. przekształcające czynności innych sił. Albowiem odpory takowych zawad, wyrównywiają siłom czyniącym.

Zasada powszechna Ruchu.

W iakikolwiek bądź sposób, wiele ciał niech odmienia swoje ruchy niniejsze, jeżeli zmyślimy sobie, że ruch iaki miałoby ciało w chwili następującej, gdyby było swobodne, jest rozłożony na inne dwa, z których ieden byłby właśnie ten który w rzeczy samey mieć będzie ciało po zaszłéy odmianie; to drugi ruch powinien być taki, iż gdyby każde z ciał, nie miało innego ruchu tylko ten drugi, to wszystkie ciała zostałyby w równowadze.

I to jest oczywista; bo gdyby te drugie ruchy nie były takie, a żeby sprawiły równowagę w układzie ciał, to pierwsze ruchy składające, nie byłyby te, których nabyć mają ciała po zaszłéy odmianie; gdyż tamte musiałyby koniecznie zaszkozić tym ostatnim. Tę zasadę winni iesteśmy P^u d' *Alembert*. Zobacz iego *Dynamikę*.

Wnio-

Wnioski wynikające z dwóch zasad poprzędzających, stosujące się do Ruchu środka ciężkości ciał.

288. **Z**myślmy sobie teraz, iż wiele ciał swobodnych znajduie się być połączonych iedne z drugiemu w sposób iakikolwiek, (ie-dnakże tak, ażeby układu tych wszystkich ciał nic nie przymuszało), niechay tedy takowe ciała odbiorą popędy iakiekolwiek, którym niemożę być doskonale posłuszne, z przyczyny wzajemnego przeszkadzania iedno drugiemu; mówię, że środek ciężkości ruchać się będzie tak, iak gdyby te wszystkie ciała były swobodne.

Jakóż, niech będzie iaki chce ruch, który powezmie każda częśćka układu ciał, to takowy ruch nadany, zawsze można zmyślić sobie, iakoby złożony z tego ruchu, iaki w rzeczy samej ciało powezmie, i z innego drugiego. Lecz podług (280), mocą tych drugich ruchów, powinna zachodzić równowaga; więc zmyśliwszy ie sobie, każdy z nich iakoby rozłożony na trzy inne ruchy równoległe trzem liniom wzajemnie

fo.

sobie prostopadłym, summa sił wynikających z tego rozłożenia równoległe względem każdéj z tych linii, powinna być zerem (282). Lecz znowu droga czyli tór, do której przebieżenia mocą każdéj z tych sił dąży środek ciężkości (273), równa się summie sił równoległych każdéj z tych linii, rozdzielonéj przez summę ciał; więc na wartość drogi, do której przebieżenia dąży pomieniony środek ciężkości, mocą zafzłych odmian w układzie, wypada zero; więc w środku ciężkości ta odmiana nie niesprawuie. A zatem ruch jego musi być taki, iak gdyby wszystkie części całego układu były swobodnie posłuszne bez żadnéj uymy, każda swoiéj siły która ją popędza.

Więc ogółem: *Stan środka ciężkości ciała lub układu ciał iakiegokolwiek, nieodmiennie się przez wzajemną czynność tego ciała albo tego układu ciał.*

289. A zatem wnieśmy stąd ied Ze jeżeli iakie ciało albo układ ciał, obraca się około swego środka ciężkości w sposób bądź iakikolwiek; to takowy środek ciężkości, zostawiać będzie nieodmiennie w tymże stanie, iak

Tom III,

X

gdy-

gdyby ciało nieobracało się. 2re Z téż sfa-
mę zasady i stąd co wyżej powiedziało się
o ruchu środka ciężkości w ciałach swo-
bodnych, następuje, że jeżeli ciało iakiękol-
wiek postaci, albo iakikolwiek układ ciał,
odbiera popęd w iakimkolwiek kierunku AB
fig. 81. (fig. 81), przechodzący w całości w przerze-
zione ciało; to środek ciężkości G , ruchać
się będzie w kierunku linii GS równoległej
linii AB , w taki sposób, iak gdyby ów po-
pęd był mu nadany bezśrodknie w tymże
kierunku GS . A jeżeli o ieden raz wie-
le sił skutkuje przeciwko różnym punktom
tego ciała, to środek ruchać się będzie, tak,
iak gdyby te wszystkie siły były do niego
przyłożone bezśrodknie.

290. Więc gdyby w téż chwili, kiedy ciało odbiera popęd w kierunku AB , była przyłożona do środka ciężkości G , siła wykirowana w rozumieniu przeciwnym SG , i równa siły czyniącej w kierunku AB , to środek ciężkości zostałby w spoczynku. Ale iawna jest, że inne części tego ciała, niezostałyby w spoczynku, bo te dwie siły lubo równe, ale nie są wbrów iedną drugiey przeciwne. Ruch zaś ciała, którego środek ciężkości zostałby w spoczynku, oczywiście niemoże być inny, tylko iedynie kołowy około środka ciężkości.

Więc jeżeli ciało iakie, odbiera ieden albo wiele popędów w kierunkach nieprzechodzących przez jego środek ciężkości, to ród Takowy środek ciężkości ruchać się będzie, iak gdyby wszystkie siły, były do niego przyłożone bezśrodknie, każda w kierunku równoległym temu iaki ma. 2re Części takowego ciała obracać się będą około środka ciężkości, iak gdyby obracały się mocą sił ni-

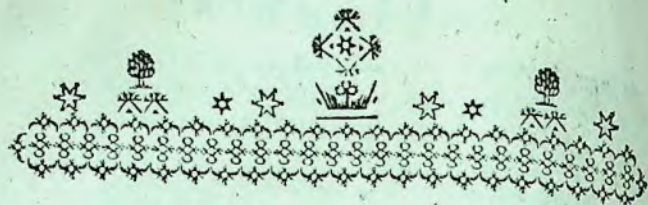
nie przyłożonych do ciała, a to jeżeliby ten środek ciężkości był niewzruszenie umocniony. Takowe ruchy kołowe opiszemy w Tomie następującym.

Stąd pokazuje się, rzekłszy pomimo, że jeżeli kierunek czynności prochu skutkującego przeciwko bombie (fig. 78), nieprze-
chodzi doskonale przez środek ciężkości G fig. 78.
téż bomby, to takowa w biegu swoim obracać się musi około G . Obracać się też może ieszcze i z innych przyczyn, o czém będzie na inném miejscu.

291. Wnieśmy ieszcze, że jeżeli stan środka ciężkości ciała iakiego, podpada odmianie, to stać się niemoże tylko przez czynność albo przez odpór nowych sił należących do tego ciała; a zatem takową odmianę zawsze można mieć wiadomą, wynalazłszy iaka byłaby siła złożona z tych wszystkich sił, gdyby były przyłożone do środka ciężkości, każda w kierunku równoległym temu, iaki ma ninie.

Te tedy są zasady powłzechne, na których gruntuie się ruch i równowaga ciał. Przytóżowanie tych zasad w różnych przypadkach ruchu i równowagi, iakie w praktyce zdarzyć się mogą, zachowujemy sobie do Tomu następującego, a teraz przystępujemy do równowagi Rościeków.





O RÓWNOWADZE ROŚCIEKÓW I O CIAŁACH KTÓRE BYWAJĄ W NICH ZANURZONE.

292. **L**ubo nam nieieft wiadomo, iaki ieft stopień subtelności w częstkach rościecznych, atoli przynajmniej o tém niemożna wątpić, żeby te części niebyły materyalne; a zatem ażeby wzwyż ustanowione zasady powszechne Równowagi i Ruchu, zarówno im nieśłużyły tak, iak ciałom brylastym. Ale że ta zasada czyli to prawo na którym funduje się Równowaga, niefamo tylko iedno ieft potrzebne, iak wyżej powiedziało się; przeto należy nam tu zaftanowić się, ieżeli niema ieżcze innego powszechnego prawa, od którego mógłaby ta równowaga zawisnąć.

293. Ponieważ Równowaga zależy na wyniszczeniu wszystkich sił, a wiedzieć nie-

można iakim sposobem w częstkach rościecznych siły przechodzą z iednych w drugie, przeto dla założenia w téj materyi początkowych zaśad, musimy udać się do doświadczeń: poczniemy tedy od tego, co w téj mierze mieć możemy najspewniejszego z doświadczenia. Ale wprzód uważmy, że rościeki trzeba rozróżnić na dwa gatunki: iedne takie, że części ich są, albo mogą być poczytane iakoby były doskonale twarde, i które uważone w iakiéj miąższości nie są *tłoczliwe* (*compressible*), to ieft że niemogą być przyprowadzone do tego stanu, ażeby zabrały mniejszą objętość od téj, iaką naturalnie mają; taka ieft woda i większa część innych *rospłynów* (*liqueur*). Do drugiego rodzaju, należą rościeki składające się z części *tłoczliwych* i *sprężystych*, to ieft które będąc *stłoczone*, mogą zabrać mniejszą objętość, i mogą nazad powrócić do pierwszego stanu, kiedy przyczyna, przyprowadzająca je do mniejszej objętości, ustanie. Skutkować; i takim rościekiem ieft powietrze. O Rościekach nietłoczliwych wkrótce niżéj mówić będziemy.

294. Zobaczymy teraz, czego nas naucza doświadczenie o Równowadze Rościeków. Niechay będzie (fig. 82. 83) rurka składająca się z trzech kolanek *AB, BC, CD* iednakowéj średnicy. Jeżeli w każdą z tych dwóch rurek, naleie się wody przez kolanko *AB*, to ta woda przejdzie z kolanka *BC* w kolanko *CD*; a przestawszy naléwać, po-

wiérzchnia wody zamkniętę w każdym kolanku, znajdzie się byź położona w kierunku téż linii poziomej AD , albo EF , nachylenie kolanka BC niechayby było jakie chce. Jest to rzecz wszystkim wiadoma, którą my tu zakładamy sobie za fundament, i z niego czyniemy sobie następujące wnioski.

295. Napelnivszy rurkę $ABCD$ aż po AD , jeżeli przez jakikolwiek punkt E , zmyślimy sobie linię poziomą EF , iawna jest, że waga wody zawartę w rozległości $EBCF$ wcale nie pomaga do utrzymania słupów wody HE i DF ; albowiem doświadczenie naucza, że gdyby w kolanku AB woda niedochodziła tylko do punktu E , to i w kolanku DC niedochodziłaby tylko do punktu F ; a zatem objętość $EBCF$ sama przez się zostaje w równowadze; więc równowaga miałaby jeszcze miejsce w całej objętości rurki, chociażby rościek zawarty w objętości $EBCF$ o ieden raz utracił swoje ważność. Takowy tedy rościek nieinaczey uważać trzeba, tylko jako środek do połączenia słupka AE z słupkiem DF , przez który słupkowi DF udziela się to całe tłoczenie, które słupek AE w nim sprawuje; i odwrotnie przez który słupkowi AE udziela się znowu to całe tłoczenie, które w nim sprawuje słupek DF .

Niemniéy i to jest oczywista, że to wszystko co dopiero powiedziało się, miało by jeszcze miejsce, gdyby zamiast słupków AE i DF , użyło się dwóch tłoczeń téż w

wartości. A zatem można stąd wnieść ogólnie, że: Jeżeli rościek niemający ważności, jest zamknięty w naczyniu jakimkolwiek, to zrobiwszy otwarcie w takowym naczyniu, i do uczynionego otwarcia przyłożywszy jakiekolwiek tłoczenie, takowe tłoczenie rościągac się będzie równo w wszelkiem rozumieniu. Ponieważ nachylenie kolanka BC w fig. 83, fig. 83. bynajmniéy nieprzeszkadza temuż skutkowi co w fig. 82. fig. 28.

296. A teraz łatwo widzieć się daie, że tłoczenie nietylko roschodzi się równo w wszelkiem rozumieniu, ale téż iże skutkuie prostopadle przeciwko każdemu punktowi powierzchni naczynia, zawierającego w sobie rościék. Albowiem gdyby tłoczenie skutkuiące przeciwko powierzchni, nieskutkowało prostopadle, to iawna jest, że odpór téj powierzchni niemógłby go zupełnie zniszczyć, powierzchnia mówię, w której tu teraz nieprzypuszczamy żadnego tarcia; skąd musiałaby wynikać czynność przeciwko cząstkóm rościeku, która roschodząc się w wszelakiem rozumieniu (294). musiałaby w rościeku sprawić poruszenie; a zatem rościek w naczyniu, nigdy niemógłby utrzymać się w równowadze; cosprzeciwia się doświadczeniu.

297. Wniéśmy tedy stąd, że jeżeli części rościku zawartego w naczyniu jakimkolwiek $ABCD$ (fig. 84) otwartém ku części AD , będąc nagabane od iakichkolwiek sił, a jednak zostają w równowadze, to siły takowe muszą być prostopadłe powierzchni AD ; albowiem jeżeli równowaga ma miejsce, to takowa niemniéj jeszcze będzie utrzymować się, przyłożywszy na wierzchną krywkę, takięż postać iaką ma powierzchnia AD ; w takim zaś przypadku widzieliśmy dopiero wyżej, że siły czyniące przeciwko powierzchni AD , powinny iéy być prostopadłe.

298. Daymy tedy że siły czyniące przeciwko cząstkóm rościku, nie są inne, tylko sama ważność; a w takim razie wniéść sobie powinniśmy, że kierónek ważności musi być prostopadły powierzchni wód spokojnych; a zatem że: *Cząstki iednegoż rościku ważnego, żeby się utrzymały w równowadze, powinny mieć położenie poziome; postać naczynia zawierającego w sobie rościk niechby była iaka chce.*

299. A teraz zmyślmy sobie, że naczynie $ABCD$ (fig. 85) będąc ze wszystkich stron zamknięte, iest napełnione rościkiem niemającym ważności, i że w takowém naczyniu zrobiwszy małe otwarcie E , do tego otwarcia przyłożyło się iakiekolwiek tłoczenie; iawna iest, że wynikające stąd tłoczenie powierzchni płaskiéy, o-

zna-

znaczonéy przez linią BC , żadnym sposobem zależy niebędzie od ilości rościku zawartego w przerzeczonym naczyniu, ani téż od postaci naczynia; ale że, ponieważ tłoczenie przyłożone do otwarcia E , rozchodzi się równo w wszelakiém rozumieniu (295), że mówię, tłoczenie na powierzchnią BC , równać się będzie tłoczeniu skutkuiącemu na otwarcie E , powtórzonemu tyle razy, ile znajduje się punktów w powierzchni BC .

300. Z téyż przyczyny, tłoczenie przyłożone do otwarcia E , będzie uśiłowac, ażeby odeprzeć wierzchnie wieko AD , z taką siłą, któraby w każdym punkcie równała się tłoczeniu skutkuiącemu na otwarcie E ; tak iż wierzchni czyli wieko AD odbiera tłoczenie z strony wewnętrznej ku zewnętrznej, od siły równaiącéy się tłoczeniu skutkuiącemu w otwarcu E , powtórzonemu tyle razy, ile znajduje się punktów w powierzchni AD .

301. Daymy teraz, że naczynie $ABCDEF$ (fig. 86), mające fig. 86 dno CD w położeniu poziomém, iest napełnione rościkiem ważnym. Twierdżę, że w tym razie, tłoczenie skutkuiące przeciwko dnu CD , nie zależy żadnym sposobem od ilości ro-

rościeku zawartego w naczyniu, ale tylko od wielkości dna CD , i od odległości powierzchni AF od podstawy CD .

Jakóż, zmyśliwszy sobie linią poziomą BE , i że rościek zawarty w części $BCDE$, o ieden raz utracił swojej ważności, iawna jest podług tego co poprzedziło wyżej (299), że iakikolwiek promyk pionowy IK , rościeku ważnego zawartego w części $ABEF$, sprawuje w punkcie K takie tłoczenie, które powinno równo roschodzić się po całym rościeku $BCDE$; i że toż tłoczenie skutkuje równo z dołu do góry, dla odparcia czynności wszystkich innych promyków, odpowiadających pionowo różnym punktom powierzchni BE ; więc promyk IK sam ieden, utrzymuje równowagę z wszystkiemi innemi promykami miąższości $ABEF$; więc rozumiejąc zawsze miąższłość $BCDE$ niemającą ważności, przeciwko dnu CD , nie będzie wynikało inne tłoczenie, iak tylko od promyka IK , które roschodząc się równo po wszystkich punktach powierzchni CD , sprawuje w nię tłoczenie, równe tłoczeniu skutkującemu w punkcie K , powtórzonemu tyle razy, ile jest punktów w powierzchni CD .

fig. 87.

Więc zmyśliwszy sobie (fig. 87) rościek ważny zawarty w części $ACDF$, podzielony na zrazy poziome, pewna jest, że zraz wierzchny, nieudziela dnu CD innę czynności, tylko taką, iakaby udzielił promyk ab , téżże wysokości co zraz pomięziony; a że o każdym zrazie toż samo można powiedzieć, więc dno CD , nieodbięra innego tłoczenia, tylko takie, iakieby odbierało od sumy

my wszystkich promyków ab , bc , cd i. t. d.; a ponieważ znowu takowe tłoczenie roschodzi się równo po wszystkich punktach powierzchni CD , więc równa się téżże powierzchni CD , rozmnożonę przez sumę tłoczeń, iakie sprawić mogą promyki ab , bc , cd w iednymże punkcie.

Więc iód. Jeżeli rościek $ACDF$ jest iednorodny, to jest złożony z cząstek iednóży natury, iednakowę ważności i. t. d., to utłoczenie dna CD , będzie wyrażone przez $CD \times ag$; to jest że wymiarém iego, będzie waga wielościemu lub wálka, mającego za podsta. wę CD , a za wysokość ag .

zre. Jeżeli rościek składa się zrazów czyli warstw różnę gęstości, to utłoczenie dna CD , będzie wyrażone przez podstawę CD , rozmnożoną przez sumę ważnościów przyrodných każdej warstwy; * mówię przez sumę ważnościów przyrodných, a nie przez sumę wagi; bo utłoczenie niezależy od ilości rościeku umieszczanego w każdej warstwie, ale iedynie od wagi własnéj każdemu promykowi. Uważmy dobrze, że co się tu mówi, ma zawsze mięysce, czyto naczynie rozlęzra się ku wierzchowi, czy téż zwęża się iak w (fig. 88). Tłoczenie fig. 88. które sprawuje rościek zawarty w objętości $ACDF$, jest także samo, iakieby sprawił walek $ECDG$, gdyby był napełniony rościekiem do téżże wysokości.

302. Stąd co poprzedziło łatwo wnieść sobie można, że iezeli dwa rościeki $NHCB$ -
 FL

* Należy tu przypomnieć sobie, co już indzię powiedzielo się, że ważnością przyrodną iakieykolwiek materyi, jest ważność doświadczonej pewnéj iakięj objętości, téżże materyi.

fig. 89. FL i $EFLM$ (fig. 89), każdy z nich będzie iednorodny, ale różny gęstości ieden względem drugiego, łączą się z sobą w mieyscu FL , w naczyniu iakiémkolwiek, to niebędą mogły utrzymać się w równowadze inaczej, tylko kiedy ich wysokości EF , IK , nad przedziałową płaszczyznę poziomą FL , będą między sobą w stółunku odwrotnym swoich ważnościów przyrodnych. Jakóż, ponieważ rościék $LFBCGO$, może sam przez się utrzymać się w równowadze (298), więc trzeba ażeby objętość $NHGO$, trzymała równowagę z objętością $EFLM$; więc trzeba ażeby tłoczenie części $NHGN$ czyniące z dołu do góry przeciwko FL , równało się tłoczeniu części $EFLM$, czyniącemu z góry na dół przeciwko téżże powierzchni FL . Lecz podług (301), tłoczenie części $NHGO$ przeciwko FL , równa się wadze wielościanu albo wálka napelnionego tym rościékkiem, mającego za wysokość IK , a za podstawę FL , a ta waga znowu równa się przyrodny ważności rozmnożony przez objętość; więc oznaczywszy przez P , takową ważność przyrodną, na wyrażenie pomienionéj wagi mieć będziem, $P \times IK \times FL$. Z téżże przyczyny, oznaczywszy przez p , ważność przyrodną rościéku $EFLM$, na wagę onego czyli na wyrażenie tłoczenia iego przeciwko powierzchni FL , mieć będziem, $p \times EF \times FL$. Musi tedy byđ $P \times IK \times FL = p \times EF \times FL$ albo $P \times IK = p \times EF$ więc $P : p :: EF : IK$; więc wysokości EF i IK , powinny mieć się do siebie w stółunku odwrotnym ważnościów przyrodnych.

I tak np. gdyby część $LFBCHN$ była napelniona żywém sżrebrém, a część $EFLM$ wodą; ponieważ, żywe sżrebro iest 14-

ra-

razy ważniéysze od wody, więc trzeba ażeby wysokość IK , była 14 razy mniéysza od wysokości EF ; to iest żeby była czternastą częścią wysokości EF ; postać naczynia -- niechby była iaka chce.

303. Stąd co poprzedziło dotąd, pokazuje się, że sposób czynności rościéków, iest różny od sposobu iakim skutkuia ciała. Właściwie mówiąc, w fig. 87. przeciwko fig. 87. powieszchni CD nieskutkuje tylko część $ECDG$; a w fig. 88, powier- fig. 88: szchnia CD odbiera utłoczenie od objętości $ACDF$, tak wielkie, iakby była utłoczona, od wagi rościéku zawartego w całym wálku $ECDG$; zamiast, że gdyby rzecz szła o iakie ciało nierościeczne np. gdyby rościék $ACDF$ zlodówaciał, to utłoczenie dna, równałoby się w fig. 87, fig. 87: wadze całej objętości $ACDF$, a w fig. 88, równałoby się tylko wadze objętości $ACDF$.

304. Ale należy nam tu dać bacznie na dwoiakié utłoczenie, i różnić iedno od drugiego; bo inne iest które sprawuie rościék przeciwko dnu CD naczynia, a inne które skutkowałoby przeciwko temuż dnu, gdyby naczynie miało byđ nie,

niefione. To pewna, że gdyby dno CD oderwało się, dla utrzymania go (fig. 87), nie trzeba by użyć tylko takiej ufilności, któraby wyrównywała wadze wałka $ECDG$; do prze-
 fig. 87. niesienia zaś tegoż naczynia, trzeba by użyć ufilności, równaiący się wadze wody zawartéj w całym naczyniu; co niżej objaśni się lepiéj, po opisanu sposobu, wiaki mają być obrachowane skutki tłoczenia, przeciwko powierzchniom płaskim pochylým, i przeciwko powierzchnióm krzywým albo wypukłym.

figura 305. Niechay będzie $ACDF$ (fig. 90, 90. 91. 91) przerznięcie pionowe naczynia, obwiedzonego powierzchniami płaskimi albo wypukłemi, nachylonémi względem poziomu iak się spodoba. Zmyśliwszy sobie zrazik niezmiérnie ciénki $abcd$, można sobie w myśli odłożyć na bok ważność tego zrazika, a tylko uważać go iakoby utłoczonym od wierzchniego rościeku. Takowe utłoczenie roschodzi się równo po wszystkich punktach tego zrazika, i skutkuje prostopadle a oraz równo, przeciwko każdemu punktowi ścian ac , bd . A ponieważ podług (301), ten skutek iest takiż sam, iakiby sprawił promyk IK sam ieden, więc utłoczenie skutkujące prostopadle przeciwko bd , będzie wyrażone przez $bd \times IK$; iawna zaś iest, iż toż samo byłoby, gdyby rozległość bd , zamiast poczytania iéy za małą linią prostą, byłaby wzięta za małą powierzchnią.

306.

306. A zatem ogółem rzec można. Ze tłoczenie skutkujące prostopadle przeciwko iakiéykolwiek powierzchni niezmiérnie małej, pochodzące od rościeku ważnego a iednorodnego, równa się mnogości, wynikającej z rozmnożenia téj powierzchni przez odległość iéy od linii poziomej AF , i przez ważność przyrodną tegoż rościeku.

307. Więc całkowite utłoczenie skutkujące przeciwko iakiéykolwiek powierzchni płaskiej, położonéj iak się spodoba, równa się summie mnogościów, wynikających z rozmnożenia części niezmiérnie małych téj powierzchni, każdéj przez odległość iéy od płaszczyzny poziomej, albo od górnej powierzchni rościeku, i przez przyrodną ważność tegoż rościeku. Lecz z natury środka ciężkości, summa mnogościów, wynikających z rozmnożenia każdéj części przez odległość iéy od płaszczyzny stałej, równa się mnogości, wynikającej z rozmnożenia całej powierzchni, przez odległość iéy środka ciężkości od téjże płaszczyzny; więc: *Utłoczenie, iakie sprawu-*
 ie

ie rościek ważny przeciwko powier-
szchni płaskiej a pochylonej, na za-
wymiār, mnogość wynikającą z roz-
mnożenia tēyż powieraszchni, przez
odległość iēy śrzedka ciężkości od pł-
szczyzny poziomej, i przez przyro-
dną ważność rościeku.

308. Ponieważ tłoczenia skutkujące
przeciwko każdemu punktowi iednēyż po-
wieraszchni płaskiej, są prostopadłemi tako-
wēy powieraszchni, a zatem wzajemnie sobie
równoleglēmi, więc z tych wszystkich tł-
czeń złożona siła, czyli utłoczenie całko-
wite, podług (206) musi im także bydź r-
wnoległe; a że wartość takowego utłocze-
nia, iako tēż wartości każdego z tłoczeń
cząstkowych naznaczyły się dopiero wyżej,
więc podług tego co się rzekło (219), ła-
two będzie wynaléśdź, gdyby potrzeba wy-
ciągała, którędy przechodzi takowa siła z-
łożona, która, iako łatwo widziēć się daie,
niepowinła przechodzić przez śrzedek cię-
żkości G , tēyż powieraszchni (fig. 92), ale
fig. 92. nieco poniżej. W takim tylko przypadku,
kiedyby powieraszchnia była niezmiernie ma-
ła, możnaby rozumiēć, że utłoczenie całko-
wite, przechodzi przez śrzedek ciężkości ta-
kowēy powieraszchni nachylonēy.

309. Zobaczmy teraz co wyni-
ka z tych wszystkich tłoczeń w ro-
zumiēniu pionowēm i w rozumiēniu
poziomēm. Kształt ciała niech bę-
dzie iaki chce, zawsze uważać mo-
żna

żna to ciało iakoby złożone z nie-
zmiernēy liczby zrazów wzajemnie
sobie równoległych, a powieraszchnią
obwodu każdego zrazika, iakoby
złożoną z wielu nierównoległobo-
ków, których liczba byłaby niezmiēr-
na, ieżeli powieraszchnia iest krzywa.
A zatem, ażeby oszacować, skutek
wynikający z tłoczenia rościeku,
bądźto przeciwko wnetrznym ścia-
nom naczyńia, bądź tēż przeciwko
powieraszchni zewnetrznēy bryły za-
nurzonēy w tymże rościeku, trzeba
oszacować skutek wynikający z tł-
czenia przeciwko powieraszchni nie-
równoległoboku wyfokości niezmiēr-
nie małej.

Zmyślmy sobie tedy (fig. 93) nierówno-
ległobok $ABCD$, którego dwa boki równo-
ległe byłyby AB i CD , a którego wysokość
fig. 93. byłaby niezmiernie mała. Daymy że do śr-
odka ciężkości G tego nierównoległoboku, iest
przyłożona prostopadle względem płaszcz-
yny iego siła P , którēy wartość byłaby wy-
rażona, przez mnogość wynikającą z roz-
mnożenia powieraszchni tego nierównoleg-
boku, przez odległość GG' onego śrzedka
ciężkości od płaszczyny poziomej XZ .

Zeby obrachować skutek tēy siły, tak
w rozumiēniu poziomēm iak w pionowēm,
zmyślam sobie płaszczynę $CDFE$ przecho-
dzącą przez linię CD , i drugą płaszczynę
poziomą, przechodzącą przez linię AB ; a

poprowadziwszy linie pionowe CE, BF spotykające się z tą płaszczyzną w punktach E i F , prowadzę linie BE i AF ; naostatek zmyślę sobie płaszczyznę KIH , przechodzącą przez kieronek GP siły P , które to płaszczyźnie linia CD byłaby prostopadłą, i w której linie HGK i HI byłyby spólnymi przecięciami z dwiema płaszczyznami $ABCD$ i $FECD$; takowa płaszczyzna będzie prostopadła płaszczyznom $ABCD, FECD$ (Jeom. 190), ponieważ linia CD , jest ich spólnym przecięciem; naostatek z punktu K wziętego na AB i HK , prowadzę KI prostopadłą płaszczyźnie $TECD$, która musi być prostopadłą na HI .

To założywszy, rozkładam siłę P na dwie inne, któreby znajdowały się na płaszczyźnie KIH przedłużonej, a z których jedna GL byłaby pozioma lub prostopadła płaszczyźnie $FECD$, a druga GM byłaby pionowa. A tak oznaczywszy te dwie siły przez L i M i zamknąwszy równoległobok $GMNL$ na linii GN obranej według upodobania na przekątną, mieć będę (201), $P : L : M :: GN : GL : GM$ albo $:: GN : GL : LN$. Ale że trójkąt GLN , ma swoje boki prostopadłe na boki trójkąta KIH , więc te dwa trójkąty będą sobie podobne (Jeom. 111), i dadzą, $GN : GL : LN :: HK : HI : IK$; więc $P : L : M :: HK : HI : IK$. Rozmnoż-

$$\begin{aligned} & \text{my te ostatnie trzy wyrazy przez } \frac{AB + CD}{2} \\ & \times GG', \text{ co między niemi nieodmiennie stósunku, a} \\ & \text{mieć będziemy, } P : L : M :: HK \times \frac{AB + CD}{2} \\ & \times GG' : HI \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : IK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG'. \end{aligned}$$

Te-

Teraz zaś uważmy $tód$ Ze $HK \times \frac{AB + CD}{2}$,

wyraża powierzchnią nierównoległoboku $ABCD$. $2re$ Ze ponieważ CE i DF tudzież CD i EF są sobie równoległe, więc będzie $CD = EF$; więc wyrażenie $IK \times \frac{AB + EF}{2}$, wychodzi na tóż samo, co $IK \times \frac{AB + CD}{2}$,

a zatem oznacza powierzchnią nierównoległoboku $AFEB$. $3cie$ A że wysokość nierównoległoboku $ABCD$ rozumie się niezmiernie małą, więc linia EF równa linii CD , może być wzięta zamiast linii AB i

CD , tak iż $HI \times \frac{AB + CD}{2}$, wychodzi na

$HI \times EF$, co wyraża powierzchnią prostokąta $ECDF$. Będzie tedy $P : L : M :: ABCD \times GG' : ECDF \times GG' : AFEB \times GG'$. Lecz siłę P rozumieliśmy być wyrażoną przez $ABCD \times GG'$; więc siła L będzie wyrażona przez $ECDF \times GG'$, a siła M , przez $AFEB \times GG'$.

$3ro$. Zmyślmy sobie teraz z kątów A, D, C, B spuszczone prostopadłe na płaszczyznę XZ . Takowe prostopadłe można sobie w myśli wystawić, iakoby były krawędziami wielościanu ściętego, którego podstawa pozioma na płaszczyźnie XZ , równałaby się rozległości $AFEB$, a którego podstawą nachyloną byłoby $ABCD$. A że linie AB i CD , rozumieją się być niezmiernie

Z2

nie

nie blisko iedna drugiéy, więc bryłowość tego wielościanu różnić się niebędzie, od bryłowości takiego wielościanu, któryby miał też samę podstawę poziomą, a za wysokość linią GG' ; lecz na wyrażenie tego ostatniego wielościanu, wypada $AF \cdot EB \times GG'$, to jest ilość właśnie taż sama, którą wynaleźliśmy na wartość siły pionowéy M ; więc ta siła mieć także będzie na wyrażenie swoje, bryłowość wielościanu ściętego, mającego za podstawę nachyloną $ABCD$, a za podstawę poziomą, *wypiętnowanie* (projection) płaszczyzny $ABCD$ na płaszczyźnie poziomej XZ .

311. Teraz zmyślmy sobie bryłę jakąkolwiek porzniętą na niezmierną liczbę zrazików poziomych, takich jak $ABDEabde$ fig. 94. i że, prostopadle względem środka ciężkości odpowiadającego powierzchni każdego nierównoległoboku, z których można rozumieć byż złożoną powierzchnią tego zrazika, są poprzykładane siły, takie, iż każda z nich byłaby wyrażona, przez mnogość wynikającą z rozmnożenia powierzchni odpowiadającego nierównoległoboku, przez odległość iéy środka ciężkości, od płaszczyzny poziomej XZ . Takowe siły niebędą co innego, tylko tłoczenia jakie sprawowałby rościek ważny, przeciwko wewnętrznej powierzchni zrazu $ABDEabde$, na-

leżącego do naczynia, w którym zawierałby się rościek pomierniony; też siły wyrażałyby także tłoczenia, jakie sprawowałby tenże rościek przeciwko powierzchni zewnętrznej bryły w nim zanurzonej. Lecz widzieliśmy dopiero wyżej, że rozłożywszy takowe siły na dwie inne, iedną pionową a drugą poziomą, każda siła pionowa, byłaby wyrażona przez wielościan ścięty, mający za podstawę na płaszczyźnie poziomej XZ , wypiętnowanie nierównoległoboku na téjże płaszczyźnie, a za podstawę nachyloną tenże nierównoległobok; więc summa sił pionowych, czyli iedna siła pionowa z tamtych wszystkich wynikająca, będzie wyrażona przez sumę tych wszystkich wielościanów ściętych; a że toż samo można także powiedzieć o każdym zrazie poziomym, więc należy wnieść w powszechności:

10d. *Ze jeżeli naczynie jakiekolwiek $ACDF$ (fig. 86), jest napełnione rościekiem aż do linii jakiejkolwiek AF , to z wszystkich tłoczeń, które czyni ten rościek przeciwko każdemu z swoich punktów, niewynika inna siła pionowa, tylko siła, wyrażona przez bryłowość albo raczej przez wagę objętości, jaką zabiera pomierniony rościek.*

2re. *Ze jeżeli ciało takie, jak $AEDBM$ (fig. 95), którego przerznięciem poziomym w najgrubszym miejscu byłaby płaszczyzna $AIBF$, jeżeli mówię, to ciało jest zanurzone w rościeku do jakiejkolwiek głębokości, odłożysz na bok tłoczenie skutkujące przeciwko wewnętrznej części AMB ; to uśilność pionowa rościeku, dążąca do podniehénia tego ciała, równa się wadze objętości rościeku, zawartego między poziomem XZ , powierzchnią $AIBFE$, i między powierzchnią wypukłą, powstającą z linii prostopadłych, spuszczonej ze*

wszystkich punktów obwodu AIBF na płaszczy-
źnie XZ.

Jeżeli daléy uważymy tłoczenie skutkujące przeciwko wierzchniej powierzchni w największym przerznięciu poziomém, to z téjże przyczyny da się widzieć, że z tłoczeń rościeku na tę powierzchnię w rozumieniu pionowém, to jest z tłoczeń dążących do zanurzenia ciała na dół, wynika ufilność, równająca się wadze objętości rościeku, zawartego między tą powierzchnią, między powierzchnią $A'F'$ $B'I'$, która jest wypiętnowaniem pierwśzey, i między powierzchnią, powstałą z linii prostopadłych poprowadzonych z wszystkich punktów obwodu AIBF. Więć od pierwśzey ufilności pionowéy odjąwszy drugą, iawna jest, że ciało odbiera utłoczenie pionowe z góry na dół, skutkujące z ufilnością, równającą się wadze takiej objętości rościeku, jaką zabiera w nim przerzeczone ciało.

312. Wnieśmy zatém ogółem:
Ze jeżeli ciało znajduje się bądź zanurzone w jakimkolwiek rościeku, to w nim utracą część wagi swej, równającą się wadze takiej objętości rościeku, jaką ruguje z miejsca swego.

313. Zostają nam jeszcze dwie rzeczy do rozwiązania, to jest pierwśza, którą przechodzi ufilność pionowa, wynikająca z wszystkich tłoczeń rościeku, a druga, wco obrać się siły poziome. Co do pierwśzey, łatwo widzieć się daie, że tak-

kowa ufilność pionowa, powinna przechodzić przez środek ciężkości objętości rościeku, wyrugowanego z miejsca swego. Jakóż zmyśliwszy sobie tę objętość podzieloną na niezmierną liczbę promyczek pionowych, ufilność z jaką dąży rościek do pionowego utłoczenia każdego promyczka, jest wyrażona podług (311), przez wagę objętości rościeku, równającą się temu promyczkowi. Więć ażeby mieć odległość siły złożonej z tamtych wszystkich, od iakiéykolwiek płaszczyzny pionowéy; trzeba rozmnożyć miąższość każdego promyczka, uważonego iakoby był téjże natury, iakiéy jest rościek, trzeba go mówię rozmnożyć, przez odległość od téj płaszczyzny, a sumę wszystkich mnożności, rozdzielić przez sumę promyczków; lecz tóż samo właśnie trzeba uczynić dla wynalezienia środka ciężkości rościeku wyrugowanego; więc ogółem: *Utłoczenie pionowe rościeku przeciwko ciału w nim zanurzonemu, przechodzi zawsze przez środek ciężkości objętości tego rościeku, z swego miejsca wyrugowany.*

214. Zobaczymy teraz w co obracają się siły poziome, o których wzwyż mówiliśmy. Niepuszczając z oczu zrazu brylastego (fig. 43. 94), jeżeli zmyślimy sobie, płaszczyzny pionowe zamknięte górnym przernięciem, a przechodzące przez boki ab , bc , i. t. d. dolnego przernięcia, to takowe płaszczyzny, złożą obwód wielościanu, mającego za wysokość, wysokość zrazu; a każda ściana tego wielościanu, przez rozległość swojej powierzchni wyrażać będzie wartość siły poziomej, która jest prostopadłą tej ścianie. A że te wszystkie ściany mają jednakową wysokość, a zatem powierzchnie ich, mają się między sobą w stosunku podstaw ab , bc i. t. d. więc siły poziome także mają się między sobą w stosunku boków ab , bc , i. t. d. Nadto, w którymkolwiek bądź miejscu tych ścian, pomienione siły byłyby przyłożone, z przyczyny iż te ściany mają wysokość niezmiernie małą, można zawsze uważać te siły poziome, iakoby wszystkie przyłożone na płaszczyźnie poziomej $abcdef$, każda z nich prostopadle na środek boku, służącego za podstawę odpowiadającej ścianie wielościanu, o którym mowa. Mówię na środek; bo łatwo widzieć się daie, że siła złożona z tłoczeń skutkujących przeciwko powierzchni któregokolwiek z nierównoległoboków, składających powierzchnią zrazu, powinna przechodzić przez taki punkt linii, któryby łączył środki dwóch boków wzajemnie sobie równoległych; a zatem siła pozioma stąd wynikająca, powinna spotykać się z linią, łączącą środki dwóch boków przeciwnych, należących do odpowiadającej ściany wielościanu. Cała tedy rzecz wychodzi na to, ażeby wiedzieć, co to powinno sprawić w iakimkolwiek wielokacie (fig.

(fig. 96), kiedy każdy z jego boków jest po- fig. 96.
ciągnięty albo popychany, mocą siły przyłożonej do środka jego, i oznaczony przez tenże bok co do wartości swojej. Zobaczymy zaraz, że te siły muszą niszczyć się wzajemnie.

Niemiając na samprzód względu tylko na dwie siły P i Q (fig. 97), przyłożone prostopadle na środki dwóch boków AB , AC trójkąta ABC , i oznaczone przez też boki; iawna jest, że siła z nich złożona, przechodzić będzie przez punkt F , w którym spotykają się dwie siły przeczerzone, a który w przypadku teraznijszym, jest środkiem koła, przechodzącego przez trzy punkta A , B , C (Jeom 55). Przydaie nadto, że pomieniona siła złożona, powinna ieszcze przechodzić przez środek boku BC , któremu zatem byłaby prostopadłą; i że będzie oznaczona przez tenże bok BC .

Jakóż, rozłożywszy siłę P na dwie inne, iedną De równoległą, drugą Dh prostopadłą na bok BC , i zamknąszy równoległobok $Degh$, tudzież oznaczywszy przez e i h te dwie siły, mieć będziemy, $P : e : h :: Dg : De : Dh :: Dg : De : ge$; lecz spuściwszy prostopadłą AO , trójkąt geD będzie podobny trójkątowi AOB , (z przyczyny boków wzajemnie sobie prostopadłych); więc będzie $Dg : De : ge :: AB : AO : BO$; więc $P : e : h :: AB : AO : BO$. A że podług założonego przypuszczenia, siła P jest oznaczona przez AB ; więc siła e będzie oznaczona przez AO , a siła h przez BO .

Podobnież, rozłożywszy siłę Q na dwie inne, iedną Im równoległą, a drugą Ik prostopadłą na bok BC , tymże sposobem można by dowieść, że siła m będzie oznaczona przez AO , a siła k przez CO ; a zatem dwie siły m i e są sobie równe, iako ozna-
cza-

czone przez jedną linią AO ; skutkiem zaś w rozumieniach przeciwnych, w kierunku jednej linii DI , równoległej linii BC ; ponieważ D i I są środkami boków AB i AC ; więc te dwie siły muszą wzajemnie jedna drugą niszczyć. Siła tedy z nich złożona, powinna być też sama, co siła złożona z dwóch sił h i k . A że te ostatnie dwie siły są wzajemnie sobie równoległe; będąc prostopadłymi na bok BC , i że oraz skutkując w jednym rozumieniu, siła z nich złożona, powinna równać się summie i być prostopadłą na bok BC ; więc rząd Takowa siła musi być oznaczona przez $BO + OC$, to jest przez BC . Zreż też siła, ponieważ jest prostopadłą na BC , i ponieważ, iak powiedziało się dopiero wyżej, powinna przechodzić przez środek F , koła opisanego na ABC , więc musi także przechodzić przez środek boku BC .

To założywszy na przód, wnieśmy sobie, że w (fig. 96) siła V złożona z dwóch sił P, T będzie prostopadłą na środek linii BE , i będzie oznaczona przez tę linią. Z tejże przyczyny, siła X złożona z dwóch sił V i S , albo z trzech sił P, T, S , będzie prostopadłą na środek linii BD , i będzie oznaczona przez tę linią BD . Naostatek, siła T złożona z dwóch sił X i Q albo z czterech sił P, T, S, Q będzie prostopadłą na środek linii DC , i będzie oznaczona przez tę linią DC ; a zatem będzie równa i wbrew przeciwna sile R ; więc te wszystkie siły niszczą się wzajemnie. Jawną jest, że to rozumowanie ma zawsze miejsce; liczba sił i wielkość boków niechby była iaka chce. Więc w powłeczności: *Uśilności wynikające w rozumieniu poziomym z tłoczeń, iakie sprawia rościęk ważny, prostopadle przeciw-*

ko

ko powierzchni ciała zanurzonego, niszczą się wszystkie wzajemnie.

315. Owóż tedy mamy zasady, służące do obrachowania skutków, iakie czyni tłoczenie rościęku przeciwko ścianom naczynia zamykającego w sobie rościęk, i przeciwko ciałom zanurzonym w tymże rościęku. Teraz przystąpmy do użycia tych fundamentów.

Ponieważ uśilności rościęku, skutkujące w rozumieniu poziomym, niszczą się wzajemnie, więc ażeby utrzymać ciało w tém położeniu iakie mu dało się w rościęku, nietrzeba więcę, tylko zniszczyć uśilność pionową tłoczenia; ten zaś warunek wyciąga dwóch rzeczy: na przód, ażeby postawić naprzeciw, uśilność skutkującą z góry na dół, równającą się uśilności tłoczenia, skutkującego z dołu do góry; powtóre, ażeby ta uśilność znajdowała się być położona w téjże linii prostej, w której skutkuie tłoczenie pionowe rościęku. Lecz tłoczenie pionowe rościęku, równa się wadze objętości tegóż rościęku wyrugowanej z miejsca swojego; więc: *ieżeli ob-*

ie-

iętość rościku wyrugowanego, wiec
waży iak ciało zanurzone, to takowe
ciało będzie pływać, i wznosić się do
góry póty, aż objętość rościku, od-
powiadająca części zanurzonej, tyle
zaważy co całe ciało.

316. Więc kiedy ciało pływa, jeżeli wy-
mieć się albo przyda się do wagi iego iakikol-
wiek ciężar, to takowe ciało wznosić się be-
dzie albo głębiej zanurzać, póty aż umniey-
szenie albo pomnożenie wagi objętości ro-
ściku wyrugowanego, stanie się równem
nowému ciężarowi. Gdyby dodana albo
odjęta waga, była mała względem rościku
fig. 98. ninie wyrugowanego, to ilość IK (fig. 98)
o którą zanurzy się albo wzniesie się prze-
rznięcie AB téj figury, będzie tém mnię-
sza, im mnięjsza będzie takowa waga, a
oraz im większe będzie przerznięcie AB .
A zatem kiedy pominiona waga byłaby mała,
a przerznięcie AB byłoby wielkie, to linie
 AB i ab , można poczytać za równe iedną
drugiey, i objętość nowo wyrugowaną, ro-
zumieć równą powierzchni, oznaczonéy
przez linią AB rozmnożoną przez IK ; to
jest, przez $AB \times IK$. Więc jeżeli p jest wagą
stopy sześciennéy rościku, to $p \times AB \times IK$,
będzie wagą téy objętości; wartość ilości AB
 $\times IK$ wyraziwszy w stopach sześciennych.
A zatem, jeżeli waga dodana albo odjęta, jest
oznaczona przez P , to będzie $p \times AB \times IK$
 $= P$; skąd wyciąga się $IK = \frac{P}{p \times AB}$; to jest,
(przyśtośowałwszy to $np.$ do mostolodzi), że
ażeby wiedzieć, o wielz głębiej zanurzy się
mostolódz, mocą przydanego iéy pewnego ta-
du-

duku; trzeba rozdzielić wartość P przyda-
danego ciężaru, przez powierzchnią prze-
rznięcia uczynionego równo z powier-
sznią wody, wyrażonego w stopach kwa-
dratowych, trzeba mówię takowy przyda-
ny ciężar rozdzielić, przez pominioną po-
wierzchnią przerznięcia, rozmnożoną przez
wagę stopy sześciennéy wody.

317. Ponieważ, wagę ciała zo-
stawiliśmy odmienną, objętości iego
można zawżse dać taką rozległość
iak się spodoba, więc niema żadnéy
materji takiéy, choćby téż była nay-
ważnięysza, któręby niemożna tak
przyśposobić żeby pływała.

318. Ponieważ uymuiąc ciału wagi, a
w objętości iego nieczyniąc żadnéy odmi-
ny, takowe ciało musi wznosić się do góry,
z ufilnością którę oprzeć się niezdola, chy-
ba waga równa wadze odjętę; więc idzie
zatem, że można użyć bardzo pożytecznie
pionowéy czynności wody, do podzwignienia
ciężarów. $Np.$ możnaby wydobyć działo
iakie w dnie morskim lub w rzece uwię-
zione, przywiązawszy go do Statków, na-
przód ciężarami iakiemi lub wodą naładó-
wanych, a potém wypróznionych.

319. W powszechności, jeżeli
 P , jest ważnością przyrodną ciała
pływającego, albo jeżeli wyraża to,
coby ważyła $np.$ stopa sześcienna
tego ciała, gdyby było złożone z
materji iednorodnéy; jeżeli obję-
tość

tość iego oznaczmy przez V ; ważność przyrodną rościku przez p ; a przez u objętość części zanurzonej; to waga tego ciała będzie wyrażona, przez $P \times V$ albo PV ; a wagą rościku wyrugowanego będzie pu ; a zatem musi być $PV = pu$; zrównanie, z którego wnosi się $u = \frac{PV}{p}$; co znać daie, że wagę PV zostawiwszy nieodmienną, część zanurzoną będzie tém mniejsza, im większa będzie rościku ważność przyrodna.

320. Tóż famo zrównanie, daie $V:u::p:P$; to iest, że objętość ciała i objętość części zanurzonej, mają się między sobą w stosunku odwrotnym ważności przyrodnej ciała, i ważności rościku.

321. I na tymto fundamencie bywają robione pewnego gatunku *ważki do rospłynów* (areomètre). Sąto narzędzia, które przez ilość o jaką zanurzają się albo wznoszą się w pewnych rospłynach, pokazują ważność przyrodną tychże rospłynów.

Zeby to pojąć, zmyślmy sobie wałek fig. 99. wydrażony $ABCD$ (fig. 99), w dennę części DC zatopiony jaką materią ważną, ażeby go utrzymać w położeniu pionowém; daymy że takowy wałek wpuszczony w rościk, zastanawia się sam przez się, zanurzy

rzywfszy się o ilość ED . W takim razie, pewna iest (312), że objętość rościku, którego miysce zabiera część wałka $EDCF$, tyle waży, co wałek cały $ADCB$. Więc mając wiadomą wagę ciała $ADCB$, tém samém iest wiadoma i waga objętości rościku, równaiący się części wałka $EDCF$. Więc obrachówawszy bryłowatość czyli objętość części $EDCF$ up. na cale sześciennne, a wagę wałka $ADCB$ na łoty; i rozdzieliwszy wagę ciała $ADCB$ przez liczbę calów sześciennych, zawartych w $EDCF$, wieloraz pokaże, wiele waży cal sześcienny rościku o który rzecz idzie.

Wynalázłszy tym sposobem przyrodną ważność iednego rościku, ważność innych rościków wynayduie się już nierównie prędzej; a to zawżę na tymże fundamencie. Albowiem zmyślmy sobie bok AD podzielony na pewną liczbę części równych, i naznaczmy punkt E , w którym zastanowił się wałek pod czas pierwszego doświadczenia. Natenczas, zanurzywszy go w innym rościku, jeżeli w nim zatopi się o ilość De większą lub mnieyszą iak DE , to stąd wnieść sobie będzie należało, że nowy rościk, ma mnieyszą lub większą ważność przyrodną od pierwszego, a to w stosunku wysokości De do DE ; to iest (320), że przyrodna ważność pierwszego rościku, ma się do takiejże ważności drugiego, iak $De:DE$; tak iż przytósówawszy ilości części zawartych w DE i De iedne do drugich, mieć będziemy stosunek zachodzący między ważnościami przyrodnemi tych dwóch rościków. Albo też ieszcze, naznaczywszy w punkcie E przyrodną ważność rościku, do którego mają przyrównywać się wszystkie inne, jeżeli zechcemy poznać w różnych punktach e ważności przy-

przyrodne rościeków, w których wałki zatopilyby się aż po e , to trzeba rozdzielić liczbę części równych zawartych w DE , przez liczbę części równych zawartych w De , a wieloraz rozmnożyć przez ważność przyrodną, odpowiadającą punktowi E ; wypadek stąd wynikający, pokaże ważność odpowiadającą punktowi e ; to jest, liczbę którą trzeba napisać w punkcie e , dla oznaczenia przyrodnej ważności tego rościeku, w którym wałek zastanowiłby się na tym przedziale.

Ale mając przyrównywać między sobą, przyrodne ważności rościeków, mało różniących się w gęstości iedn od drugiego, byleby wałek miał iakózkolwiek znaczną szerokość, iawna jest, że różnica w zanurzeniach jego będzie tém mnieysza, im mnieysza jest różnica między gęstościami rościeków, a im większa byłaby średnica wałka. W takim tedy przypadku, trzebaby używać wałka bardzo małej średnicy; ale żeby go uczynić sposobnym, do utrzymania się zawsze w położeniu pionowém, można by do niego przyprawić iak w (fig. 100), drugi wałek $GHIK$, zatopiony u dna, iak powiedzialo się wyżej.

Wreszcie, niekoniecznie potrzeba, ażeby część $GHIK$ była wałkowa, niemniej iako téż i część $ABCD$. Części $GHIK$, można dać taką postać iaka się spodoba, byleby była zgodna do utrzymania narzędzia w położeniu pionowém; a część $ABCD$ może być wielościenna iakiéykolwiek postaci. Dostyc na tém, ażeby była taka, iżby na niéy, równe podziały objętości $ABCD$, odpowiadały równym podziałom długości AC , tak iż tego rodzaju wałków, można dać kształt wyrażony w fig. 101. Ta-

figura
100.

figura
101.

Takowych narzędziów skład i postać może odmięniać się bez liczby, a to zawsze na tychże samych fundamentach. Atoli po tém co poprzedziło, my tu nieopiszemy więcej, tylko narzędzie wyrażone w fig. 101. Narzędzie poprzedzające, służy do wynależenia przyrodnej ważności rościeków, przez różne jego zanurzenia się; to zaś okazuje takowe ważności, przez zanurzenie się nieodmięnnie.

$ABCD$, jest niby butel szklany, wydęty, z długą szyją, w dónnej części C zatopiony żywém sżrębrém. Do więrszchu A jest przysposobiona miseczka na którą kładzie się waga. E jest znak, wskazujący punkt, na którym zastanawia się narzędzie mocą własnej wagi, w rościeku najmniej ważnym. To narzędzie zanurzywszy w innym rościeku ważniejszy, będzie się do góry wznosić, i niemoże inaczey być zatopione do przerzeczonego punktu, tylko przyłożeniem iakiéy wagi na miseczkę A . Ilosć takowey wagi przydaney, naznacza różnicę między ważnościami przyrodnymi ninieyszego i pierwszego rościeku; a zatem mając ważność przyrodną pierwszego rościeku, tym sposobem można dóysdż ważności wszelkiego innego rościeku.

322. Jeżeli ciało iakie więcej waży, od podobnéyże objętości rościeku, to musi tonąć, i niemoże być inaczey utrzymane na więrszchu, tylko mocą siły równaiącey się zbytko wi téy przewagi, o której ciało przeważa podobną objętość rościeku.

Tom III.

Aa

O-

figura
102.

Oznaczmyż iak wyżej przez p i P , ważności przyródne rościeku i ciała; a przez V objętość ciała, mieć będziemy $PV - pV$ na wyrażenie przewagi ciała nad wagę podobneyże objętości rościeku. Więc zmyśliwszy sobie to ciało zawieszone na nitce u kibici (fseau) ważek, iak pokazuje fig. 102, i oznaczywszy przez P' wagę, mocą której pomienione ciało mogłoby utrzymać się w równowadze; to będzie $P' = PV - pV$; skąd wyciąga się $\frac{p}{P} = \frac{PV - P'}{PV}$. Lecz PV wyraża wagę ciała w powietrzu, a P' wyraża wagę jego kiedy jest zanurzone w rościeku; więc mając wiadomą wagę ciała w powietrzu, i wagę jego w rościeku, łatwo będzie można mieć stosunek między ważnościami przyrodnymi tegoż rościeku i ciała, rozdzielivszy różnicę téy dwoiakiéy wagi, przez wagę ciała w powietrzu.

Np. jeżeli iakie ciało waży 6. uncyi w powietrzu a w wodzie tylko 5 unc: to dzielę różnicę 1 przez 6, a wieloraz $\frac{1}{6}$ dać mi znać, że ważność przyrodna tego ciała, ma się do ważności wody, iak 6 do 1.

Ponieważ powietrze, jest rościekiem ważnym, więc ciałom musi także uymować wagi; takliż waga iaką mają w powietrzu, nie-

nie jest ich wagą rzetelną. Ale iż powietrze jest rościekiem bardzo rzadkim, którego ważność przyrodna, niewynosi iak tylko około 850tą część podobneyże ważności wody, przeto umniejszenia wagi z téy przyczyny możemy wcale zaniedbać.

323. Zmyśliwszy sobie znowu toż samo ciało co wyżej, zanurzone w inżym rościeku, którego ważnością przyrodną byłoby p' , a P'' byłaby waga, mogąca utrzymać go w równowadze, to podobnież iak mieliśmy wyżej $P = PV - pV$, mielibyśmy i w tym razie $P'' = PV - p'V$; lecz te dwa zrównania, dają $pV = PV - P'$ i $p'V = PV - P''$; więc rozdzielivszy to ostatnie przez poprzedzające, będzie $\frac{p'}{p} = \frac{PV - P''}{PV - P'}$; a zatem mając wiadomą wagę PV ciała iakiego w powietrzu, wagę jego P'' w pewnym rościeku, i wagę jego P' w innym rościeku, łatwo także mieć można wartość ilości $\frac{p'}{p}$, to jest stosunek, między ważnościami przyrodnymi dwóch rościeków. Na tych fundamentach nietrudno byłoby złożyć sobie Tablicę, opisującą ważności przyrodne różnych ciał,

Aa2

tak

tak brylastych iak płynnych; iaka w saméy rzeczy położy się na końcu tego Tomu.

324. Podług tego co poprzedziło, iakwna jest, że ważność przyrodna rozmnożona przez objętość, daie prawdziwą wagę ciała. Lecz gęstość rozmnożona przez objętość, daie miąższość (160), która podług (171) jest proporcjonalna wadze; więc ważność przyrodna rozmnożona przez objętość, jest proporcjonalna gęstości rozmnożonéy także przez objętość; więc *ważność przyrodna ciał, jest proporcjonalna gęstości onychże.*

325. Powróćmy nazad do ciał pływających. Ażeby ciało mogło utrzymać równowagę w jakim rościeku, trzeba, iak widzieliśmy wyżéy (315), ażeby iego cała waga, równała się wadze objętości rościeku, wyrugowanéy. Ale na tym warunku niejest dosyć. Trzeba ieszcze nadto, ażeby linia przechodząca przez środek ciężkości części zanurzonéy, była pionowa.

Albowiem, ponieważ ważność ciała i tłoczenie rościeku, każde z nich skutkuje w kierunku linii pionowéy, z których pierwsza przechodzi przez środek ciężkości ciała, a druga przez środek ciężkości objętości wyrugowanéy, więc te dwie siły niemogą być sobie wbrew przeciwne, (czego koniecznie trzeba do równowagi) tylko kiedy te dwie linie zniydą się w iedną

326. I tak ażeby wiedzieć, iezeli ciało $ACEDB$ (fig. 103) postaci i materyi wiadoméy, potrafi utrzymać równowagę w rościeku, i to po-

figura
103.

położenie iakie ma bydź mu dane; trzeba poprowadzić płaszczyznę poziomą CD , oddzielającą część CED taką, ażeby objętość iéy, miała się do całéy objętości AEB , iak się ma ważność przyrodna ciała, do ważności rościeku; a wynalazłszy środek ciężkości G , odpowiadający objętości AEB , i środek ciężkości G' , odpowiadający objętości CED , iezeli linia GG' wypada prostopadła płaszczyźnie CD , to równowaga będzie miała miéysce.

327. W tém co powiedziało się dopiero, ciało AEB rozumiemy bydź iednorodném; to jest, że materya składająca onego wagę, jest wszýstka iednakowego rodzaju i rociągająca się wszędzie iednokształtnie po tém miéyscu, które zabiera cała objętość. Gdyby zaś tak niebyło, to naprzód trzeba by obrachować wartość objętości rościeku, równaiący się w wadze, całéy wadze ciała AEB , a potem trzeba by zrobić CED równe takowéy objętości, gdzie CD , rozumie się bydź linią poziomą; działanie, które wychodzi na rozwiązanie zagadnienia iedynie Jeometrycznego, niepodpadaiącego żadnéy trudności, dla tych, którzy z fundamentami dotąd podanémi dobrze obeznali się.

328. Przy pomocy tychże samych zasąd, można téż rozwiązać i to drugie zagadnienie, to jest: Jakby naznaczyć różne położenia, w

Aa 3

któ-

których ciało położone w pośród rościku utrzymałoby równowagę; ale że nam nic ważnego na pamięć nieprzychodzi, do czego mogliśmy, to oboje zagadnienie przytósować, przeto je pomiiamy.

figura

104.

329. Zmyślmy sobie ciało CED (fig. 104) utrzymujące się ninie w równowadze, w pośród rościku, którego powierzchnia byłaby AB ; G byłoby środkiem ciężkości ciała; a G' środkiem ciężkości części zanurzonej AEB ; daymy że takowe ciało nachyliło się o ilość niezmiernie małą, tak iż część aEb stała się częścią zanurzoną, której G'' byłoby środkiem ciężkości. Takowe ciało powroci nazad do swego położenia, jeżeli pionowa $G''M$, odpowiadająca temu ostatniemu położeniu, spotyka się z pionową $G'M$ odpowiadającą pierwszemu położeniu, jeżeli mówię te dwie linie spotykają się z sobą, powyżej środka ciężkości ciała, to jest, powyżej punktu G . Przeciwnym sposobem, musi się wywrócić, jeżeli punkt M , będzie położony poniżej punktu G jakoto w M' .

Jakóż, kierónek $G''M$, w jakim natenczas skutkować będzie tłoczenie wody, i który będzie pionowy, ponieważ w takim razie nieprzechodzi przez środek ciężkości G , więc podług (290) dąży do nadania ciału dwojakiego ruchu, z których jeden podnoszący środek ciężkości, byłby niszczonej mocą wagi ciała; a drugi byłby dążący do obracania go około środka ciężkości G . Lecz łatwo widzieć się daie, że jeżeli punkt G jest poniżej M , to ruch kołowy około punktu

punktu G , odprawiłby się od A ku C , a zatem przywiódłby punkt G' do ninijszego pionowego położenia $G''M$. Przeciwnym sposobem jeżeli M jest poniżej G jakoto w M' , to ruch kołowy około punktu G , odprawiłby się od C ku A , a zatem niemógłby oddalić punktu G' od punktu G'' ; to jest, że takowy ruch dążyłby do wywrócenia ciała. Więc ażeby ciało, mogło powrócić do swego pierwszego położenia, to trzeba ażeby linia $G'M$, była większa od linii $G'G$.

Punkt M nazywa się *graniczny środek* (metacentre), z przyczyny, że naznacza granicę wysokości, w której może być położony środek ciężkości G , chcąc ażeby ciało pływające, niewywróciło się za małym nachyleniem; bo byleby punkt G był cokolwiek wyżej położony nad punkt M , to ciało musiałoby się wywrócić.

330. Rościki sprężyste, mają tę spólną własność z rościkami niesprężystymi, że nietykając ważności, tłoczenie roschodzi się w nich zarówno w wszelakiem rozumieniu. Ale pierwsze w tém różnią się od drugich, iż przyłożywszy do powierzchni AB (fig. 105) rościku niesprężystego iakiegokolwiek, tłoczenie P , skutkujące przeciwko wieku ruchomemu AB , jeżeli odéymie się z nagłą takowa waga P , to rościk ustanie skutkować przeciwko temuż wieku AB . Zamiast że w roście-

Aa 4

figura
105.

ściekach sprężystych, jeżeli tłoczenie P , przywiodło nakrywające wieko AB do iakiegokolwiek położenia ab , to po odjęciu takowego tłoczenia, wieko ab zostanie odparte od b ku B , z taką siłą, z jaką było przyprowadzone od B do b .

Atoli bądź co chce, tłoczenie w rościeku sprężystym, zawsze roschodzić się będzie w tenże sam sposób co w rościeku niesprężystym; to jest że takowe tłoczenie skutkować będzie prostopadle przeciwko powierzchni; i że w rościekach sprężystych a ważnych, które niebyłyby utłoczone tylko mocą swojej ważności, uślisności tłoczenia przeciwko ścianom naczynia, albo przeciwko powierzchni ciał zanurzonych w takowych rościekach, że mówię te uślisności, w rozumieniu poziomym niszczą się wzajemnie, a w rozumieniu pionowym, składają iedną uślisność, której kierunek przechodzi przez środek ciężkości téj objętości, przeciwko której skutkuje rościek.

33r. Co się tycze rzetelnéj wartości utłoczenia przeciwko iakiéykolwiek powierzchni, mocą saméj tylko ważności rościeku sprężystego; niemożna wątpić, ażeby takowe utłoczenie przeciwko powierzchni poziomym, (zostawiwszy inne okoliczności w nieodmiennym stanie), ażeby mówię takowe tłoczenie

nie niebyło proporcjonalne powierzchni przeciwko którym skutkują. Ale niemierzają się iak w innych rościekach, przez wagę wielościanu albo wálka, mającego za podstawę takową powierzchnią, a za wysokość swoię, mającego odległość téj powierzchni od wierzchniej powierzchni rościeku.

Jakóż, jeżeli rościek sprężysty jest taki, że bez ważności mógłby zabierać miéysce $A E F B$ (fig. 106); to rozumiejąc go byż figura 106. ważnym, iawna jest, że zrazy czyli warstwy tego rościeku, naybliższe dna $E F$, utłoczone własnym ciężarem i ciężarem warstw wyższych, znajdować się będą mocniéj utłoczone, iak tamte; a zatém zmyśliwszy sobie dwie warstwy iednéjże wysokości, iedną przy samém dnie $E F$, a drugą wyżej, materia piérwśzéj warstwy będzie gęstsza od drugiéj, a zatém będzie ważniéjsza. Przeto ponieważ warstwy lubo iednakiéj wysokości, tém mniéj obciążają dno $E F$, im bardziéj od niego będą odległe; więc utłoczenie przeciwko temuż dnu $E F$, powinno miarkować się, nietylko podług wielkości takowego dna, i podług liczby warstw zawierających się od D aż do F , ale téż podług ważności przyrodnéj zosobna każdéj warstwy, która wypada co wyżej to insza. Tak iż oznaczywszy przez x odległość $F Q$ iakiéykolwiek warstwy od dna $E F$; przez dx , wysokość niezmiérnie małą téjże warstwy, a przez D ważność przyrodną albo gęstość onéjże; $D dx$ wyrażać będzie wagę pro-

promyka takowéy warstwy; a skutek czynności iego przeciwko dnu EF , będzie wyrażony przez $EF \times Ddx$; więc czynności wszystkich warstw, czyli całkowite utłoczenie przeciwko dnu EF będzie wyrażone przez $EF \int Ddx$; to jest, że trzeba wziąć całą ilość Ddx i rozmnożyć ją przez EF . Trzebaby tedy mieć znaną wartość głośki D , wyrażoną w x , to jest trzebaby wiedzieć, podług jakiego prawa odmienniają się gęstości, w odległościach coraz większych od dna EF .

Wynalazłszy skutek utłoczenia przeciwko powierzchni poziomej, łatwo będzie można mieć utłoczenie przeciwko wszelakiej innej powierzchni, rozdzielwszy takową powierzchnią na części niezmiernie małe; albowiem każdą z tych części można uważać tak utłoczoną, iak gdyby była pozioma.

332. Spomiędzy wszystkich rościeków sprężystych, naywięcej zależy nam na znajomości powietrza; dla tego umyśliłszy tu zastanowić się nad istotniejszymi własnościami onego; a przynajmniej nad temi, co naywięcej służą do zamiaru naszego.

333. *Powietrze jest rościekiem ważnym.* Ta prawda potwierdza się wielką liczbą doświadczeń. Owóż z nich niektóre:

figura

107.

Wziąwszy rurkę szklaną (fig. 107), długą około na 30 cal., zalutowaną z jednego końca swego A , a z końca otwartego wprowadziwszy w całą objętość téy rurki mer-

merkuryuszu; jeżeli odwróciwszy rurkę zanurzy się iéy otwarty koniec, w naczyniu mającém także w sobie merkuryusz, to merkuryusz zawarty w rurce, ustępować z niéy będzie, tak iż go niezoftanie tylko na 27 $\frac{1}{2}$ cal. około wysoko, * rachując od powierzchni merkuryuszu będącego w naczyniu.

Zobaczmy teraz, iak wnosi się z tego doświadczenia ważność powietrza. Słup merkuryuszu zawartego w długości CB , sprawia w punkcie B , utłoczenie przeciwko merkuryuszowi dółnemu, któremu niemoże oprzeć się tylko równa ufilność czyniąca w rozumieniu przeciwném. Lecz merkuryusz będący w naczyniu, w którym rurka jest zanurzona, nieskutkuie przeciwko temu słupowi, tylko w stosunku odległości od wierzchołkowej powierzchni iego, aż do otwarcia B ; więc mu niemożby się oprzeć. Ufilności tedy potrzebny do takowego oparcia się, niemożna gdzieindziej szukać, tylko w rościeku, roschodzącym się po wszystkich punktach górnej powierzchni merkuryuszu, zawartego w naczyniu; to jest, trzeba téy ufilności szukać w powietrzu; więc powietrze mocą wagi swoiey, czyni równowagę słupowi BC merkuryuszu.

Zastanówmy się ieszcze nad drugim doświadczeniem niemniéy pożytecznym, które

* Ta ilość odmienna się podług różnego stanu powietrza, i podług wysokości miéysca, w którym czyni się doświadczenie; tu rozumiemy powietrze znajdujące się w miernym stanie, a położenie miéysca iak np. jest położony Paryż. Rozumiemy nadto że merkuryusz w rurce zawarty, był wprzód wyczyszczony z powietrza. Nie jest tu zaś miéysce opisać iak się to czyni.

re służyć może na poparcie pierwszego. Jeżeli to jest prawda, że powietrze utrzymuje słup BC , to nalawszy w rurkę rościeku mniej ważnego jak jest merkuryusz, wysokość tego nowego rościeku w rurce zawieszzonego, powinna wypaść większa jak była wysokość BC merkuryusza; a to podług (302), w stosunku odwrotnym przyrodnych ważnościów tych dwóch rościeków. Wiemy zaś że woda ma 14 razy mniejszą wagę niż merkuryusz; więc używając wody zamiast merkuryusza, powietrze powinno utrzymać takowy w równowadze, słup wysoki na 14 razy po $27\frac{1}{2}$ cal. to jest słup wysoki około na 32 ft. Jakóż to w rzeczy samej potwierdza doświadczenie. Albowiem wiadomo jest, że chcąc przy pomocy bieguna (piston) podnieść wodę w rurmusie (pompe) nad 32 ft. woda zawsze niedaleko w tej mierze zastanawia się. Nie można tedy o tym wątpić, ażeby powietrze nie było ważne, i ażeby mocą tej wagi na powierzchni ciała nietłoczyło, z taką użytecznością, jakby czynił słup wody, takie podstawy iaka jest powierzchnia, a wysoki na 32 ft.

I takoweto utłoczenie będąc przyłożone do wszystkich ciał, a zatem i do powierzchni wody, przymusza ją do podnoszenia się w rurmusach, kiedy robiąc biegnem, robi się próżne miejsce między nim i wodą, w której zanurzony jest rurmus. Ale ażebyśmy jasnie pojęli, jakim sposobem woda podnosi się w rurmusach, trzeba nam zastanowić się nad drugą własnością powietrza, to jest nad sprężystością jego.

334. Powietrze jest tłoczliwe, jest sprężyste; i objętości, do których
mo-

może być przyprowadzone mocą utłoczenia, dosyć widocznie mają się między sobą, w stosunku odwrotnym wag iakiemi będzie przyciśnione. Ta ostatnia własność, wynika z następującego doświadczenia.

W rurkę szklaną zakrzywioną ABC (fig. 108), której kolanko AB miałoby przynajmniej 30 albo 40 cal., a której kolanko BC wszędzie jednakowej średnicy byłoby zalutowane w C , należy tyle merkuryusza, ażeby najniższa część B rurki została napełniona; przyłożywszy takową rurkę, na tablicę podzieloną na równe części, uważaj iaka liczba przedziałów zawiera się między B i C . Daymy niech będzie 8 cal. Należy znowu merkuryusza w kolanko AB tyle, żeby zbytek jego nad wysokość merkuryusza zawartego w kolanku BC , wynosił około $27\frac{1}{2}$ cal. Powietrze wypełniające z razu całą objętość BC , niebędzie już teraz zabierać ię tylko połowę. Nieprzeftając dalej nalewać merkuryusza w kolanko AB , póty ażby różnica wysokości merkuryusza w dwóch kolankach, wynosiła dwa razy $27\frac{1}{2}$ cal. albo około; powietrze pozostałe w kolanku BC , niebędzie w takim razie więcej zabierać, tylko $\frac{1}{2}$ objętości BC ; jeżeli zaś różnica między przerzeczonymi dwiema wysokościami, wynosiła trzy razy $27\frac{1}{2}$ cal. albo około, to powietrze pozostałe w kolanku BC , niezabierałoby tylko $\frac{1}{3}$ objętości onego; i tak dalej.

Z tego doświadczenia pokazuje się, że powietrze tym bardziej by-

bywa utłoczone, im większą wagą jest przyciśnione, i że to utłoczenie jest proporcjonalne wadze naciskającej, z niewielkiem uchybieniem.

Jakóż póki niebyło więcej merkuryusza, tylko w dolnej objętości *B*, powietrze zamknięte w kolanku *BC*, będąc także natury co powietrze w kolanku *AB*, znajdowało się być naciskane, całą wagą powietrza, odpowiadającego pionowo otwarciu rurki. Było tedy uciśnione wagą, wyrównyującą słupowi merkuryusza, wysokiego na $27\frac{1}{2}$ cal. około. A ponieważ przydawać coraz jedno, dwa, trzy i. t. d. utłoczeń podobnych pierwszemu, powietrze zawarte w kolanku *BC*, iak widzieliśmy dopiero wyżej, zbija się w miejsce dwa, trzy, cztery razy mniejsze od objętości *BC*, więc pomienione powietrze, tłoczy się w stosunku wag. nań naciskających.

Co się tycze sprężystości powietrza; z odwrotnego poprzedzającemu doświadczenia, można o nię zapewnić się że ma miejsce i że pomnaża się w proporcji utłoczenia, albo też umniejsza się, w proporcji ubywającego tegoż utłoczenia.

Albowiem wylévając nazad merkuryusz z rurki *AB*, da się widzieć, że powietrze roschodzi się znowu w kolanku *BC*, i zajmuje w nim tęm większą objętość, im więcej ubędzie utłoczenia. Powietrze tedy

nie-

nie tylko jest tłoczliwe, ale też będąc przywiedzione do iakiegolwiek bądź stanu utłoczenia, zawsze dąży do rozprężenia się, i do zaięcia coraz większej rozległości, tak, iż kiedy ubywa wagi która go naciskała, to rozległość po której roschodzi się, ma się do rozległości w której było zamknięte, iak się ma waga, iaką było przyciśnione w tym ostatnim przypadku, do wagi iaką ninie znajduje się być obciążone.

335. Powietrze tedy, które nazywamy *naturalnem* czyli *swobodnem*, znajduje się w nieustannem utłoczeniu, i to w takiem, iż gdyby z nagłą utraciło swoją ważność, natychmiast dążyłoby do rozprężenia się na wszystkie strony, z taką ufilnością, iż część powietrza zamknięta w takiej rozległości iak *ABC* (fig. 108), niemo-
głaby inaczej być zatrzymana, tylko przyłożwszy do otwarcia *A*, siłę równającą się wadze słupa merkuryusza, mającego za podstawę, pomienioną otwartość, a wysokiego na $27\frac{1}{2}$ cal.

figura
108.

336. Stąd co się rzekło (330), o różnicy między róściekami sprężystymi i niesprężystymi, pokazuje się, że powietrze zamknięte ze wszystkich stron w iakiem naczyniu, z taką ufilnością dąży do wydobycia się zewnątrz, z iaką ufilnością powietrze otaczające, naciska od strony zewnętrznej na wewnętrzną; i taćto jest przyczyna, dla czego ciała nieustępu-
ją

ią tak znacznemu utłoczeniu, iakiemu podlegała podług tego co w téj mierze powiedziało się wyżej (333).

figura 107. 337. Przyłożywszy na tablicę podzieloną na pewne części, rurkę wzwyż opisaną (333) (fig. 107), tak ażeby przerzeczone podziały poczynaly się od linii poziomej, czyli od powierzchni merkuryusza w dolnej bańce zamkniętego; tak naprawione narzędzie, nazywa się *Wilgoćmiar* (*Baromètre*); i służy do sądzenia o tłoczeniu powietrza, przeciwko powierzchniom ciał, z wysokości, do iakię merkuryusz znajduje się być podniesiony w rurce *AB*.

A teraz już łatwo pojąć można, dla czego to narzędzie, wskazuje też samą wysokość w miejscu zamkniętym, co i w miejscu swobodnym. Bo powietrze zamknięte, mocą swojej sprężystości, sprawia takież samo utłoczenie przeciwko merkuryuszowi zawartemu w dolnej bańce, iakieby sprawowało swobodnie mocą wagi swojej.

338. Merkuryusz nieutrzymuje się statecznie w jednakowej wysokości lubo na jednymże miejscu. W Paryżu trzyma się pospolicie już to cokolwiek wyżej nad $27\frac{1}{2}$ c. już też cokolwiek niżej, a to podług tego, iak utłoczenie pochodzące czyto od wagi czy od sprężystości powietrza, rośnie albo ubywa. Ponieważ sprężystość powietrza, może powiększać się albo umniejszać, lubo cała waga jego ani się powiększa ani umniejsza,

śza, iakoto zdarza się z przyczyny gorącości lub zimna; więc odmiany merkuryusza trafiające się w Wilgoćmiarze, niepowinny być iedynie przypisowane odmianom wagi powietrza.

Atoli bądź co chce, ponieważ takowe odmiany dają znać, że powietrze jest zdolne, do trzymania równowagi z większym lub mniejszym słupem merkuryusza, a zatem z większym lub mniejszym słupem wody; więc należy stąd wniesć, że najwyższa wysokość, do której może być podniesiona woda tylko w jednym rurku, nie zawsze jest jednakowa, to jest na 32 ft., ale że się odmienna podług wysokości merkuryusza w wilgoćmiarze.

339. Przenióśszy Wilgoćmiar z iednego miejsca na inne wyższe lub niższe; w pierwszym przypadku merkuryusz opadnie, a w drugim podniesie się do góry. Bo słup powietrza, przypiérający do merkuryusza, w pierwszym przypadku będąc krótszy iak w drugim, powinién też w pierwszym przypadku mieć węższy iak w drugim; a zatem niemożę trzymać równowagi, tylko, w pierwszym przypadku z słupem mniejszym, a w drugim przypadku, z większym słupem merkuryusza. Tak

iż w pierwszym przypadku, upły-
nie cokolwiek merkuryusza z rurki
do bańki, a w drugim, z bańki
przejdzie go cokolwiek do rurki;
co też i doświadczenie potwierdza.
Ale trzeba uważać że te odmiany
nie są widoczne, tylko w odmianach
wysokościów miéysca na kilka sążni.
Można powiedzieć ogółem, że ró-
żnica na 12 sąż. w wysokości miéysca
iednego od drugiego, daie w Wil-
goćmiarze iedną linią różnicy. Więc
największa wysokość do której mo-
żna podnieść wodę przy pomocy
tylko iednego rurmuśu, różni się po-
dług wysokościów miéysc, gdzie to
dzieie się, i iest proporcjonalna
wysokości Wilgoćmiaru w tako-
wych miéyscach.

340. Powiedziało się wyżej, iż po-
wietrze, bywa utłoczone w stosunku wagi
naciskającej go, z małym uchybieniem. Lu-
bo doświadczenie które służyło nam do ta-
kowego wywodu, daie takowy stosunek wy-
padający dość doskonale; atoli iednak stąd
nie należy sobie wnośić, iż obciążywśy po-
wietrze wszelką bądź iakąkolwiek wagą, po-
dobnyż następowałby skutek. Niezdaie się
to rzeczą podobną do prawdy, ażeby coraż
bardziej obciążając powietrze, można było
zbić go i skupić w miéysce niezmiernie ma-
łe, i przeciwnie uymuiąc mu utłoczenia, aż
do

do niezmierności, żeby można było przy-
wieść go do zabrania rozległości niezmiér-
nej. Ta zbyt duża tłoczliwość i ta zbyt
duża rozległość nieznamytną się w naturze.
Z tem wszystkiem, kiedy rzecz nieidzie tyl-
ko o mierne wysokości, można rozumieć
że powietrze w różnych wysokościach, by-
wa utłoczone w stosunku wagi nań naciska-
jącej; a zatem można naznaczyć z małym
uchybieniem, w iakiéy wysokości trzymać
się powinién Wilgoćmiar, mocą samey wagi
powietrza, w różnych wysokościach położén.

Jakóż widzieliśmy wyżej (331), że ozna-
czywśy przez D ważność przyrodną albo gę-
stość powietrza, odpowiadającą iakiéykolwiek
wysokości, utłoczenie iakie odbierać albo spra-
wować może powietrze w tém miéyscu, bę-
dzie wyrażone przez $\int Ddx$; więc oznaczy-
wśy przez h wysokość Wilgoćmiaru, odpow-
iadającą takowemu miéyscu, a przez 1 , gę-
stość merkuryusza, mieć będiem $\int Ddx = h$
albo raczy $\int - Ddx = h$; bo gdy x rośnie, h
umniejsza się. Z drugiey strony, ponieważ
powietrze staie się tém gęstsze, im iest bar-
dziej obciążone, więc gęstość iego czyli
ważność przyrodna, pomnaża się w miarę
wagi obciążającej; a zatem oznaczywśy
przez H wysokość Wilgoćmiaru, w poło-
żeniu poziomém z powierzchnią morza,
a przez p przyrodną ważność powietrza w
témże miéyscu, mieć będiem $H : h :: p : D$;

więc $h = \frac{DH}{p}$; więc $\int - Ddx = \frac{HD}{p}$. Zró-
źniczkuymy to zrównanie, uważając p i H
iako stacyczne; co nam da $- Ddx = \frac{HdD}{p}$; -
skąd wyciąga się $\frac{dD}{D} = \frac{pdx}{H}$; więc (too),
Bb 2 1D

$lD = \frac{-px}{H} + lC$. Lecz w położeniu pozie-
mném z powierzchnią morza, to jest, kiedy
 $x = 0$, powinno być $D = p$; więc $l.p = l.C$;
więc $C = p$. A zatem będzie $l.D = \frac{-px}{H}$
 $+ l.p$; skąd wyciąga się $lD - lp = \frac{-px}{H}$, al-

bo $l \frac{D}{p} = \frac{-px}{H}$; albo naostatek $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$;
gdzie przez e rozumié się liczba, mająca za

logarytm 1 (90). Więc będzie $D = pe^{\frac{-px}{H}}$.
Powróciwszy tedy do zrównania $f - Ddx = h$, i położywszy w niem zamiast D wár-

tość onego, będzie $h = f - pe^{\frac{-px}{H}} dx$; całka,
której wartością podług (122) pokaże się

bydź $He^{\frac{-px}{H}}$; więc naostatek $h = He^{\frac{-px}{H}}$;

albo $lh = l.H - \frac{px}{H}$; co nam da wysokość

Wilgoćmiaru, odpowiadającą wysokości x
nad powierzchnią morza, byleby była wia-
doma wysokość H tegoż wilgoćmiaru w
poziemnem położeniu z powierzchnią mo-
rza, i przyrodna ważność powietrza w tém-
że położeniu.

Zeby to wyrażenie zrobić tém zgodniéj-
sze do Rachunków, można poczytać $\frac{px}{H}$ za lo-
ga-

garytm iakiéy pewnéy liczby A ; i rozumiéć

$\frac{px}{H} = lA$. A natenczas będzie $lh = l.H - l.A$
 $= l \frac{H}{A}$. Ale tu pilnie uważać trzeba, iż w
wzrównaniu $\frac{px}{H} = lA$, kiedy po położeniu w
niém wartościów zamiast p , x i H , wynay-
dzie się wartość ilości $\frac{px}{H}$ a zatem $l.A$, trze-
ba mówię pilnie uważać, że takowy loga-
rytm, jest logarytmem Hiperbolicznym; tak
iż ażeby wynaleśdź liczbę A przy pomocy
pospolitych Tablic logarytmowych, trzeba
przerzeczony logarytm zamienić w logarytm
pospolity, rozmnożywszy go podług (88).
przez 0,43429448 i. t. d.

Co się tyczy zrównania $lh = \frac{H}{A}$, lubo

logarytmy w niem zawierające się, są hiper-
boliczne, atoli można poczytać je za loga-
rytmy pospolite; bo jeżeli dwie liczby ma-
ją logarytmy równe w jednym układzie, to
mieć będą logarytmy równe w wszelkim
innym układzie, spólnie do nich należącym.

Zebyśmy tego co dotąd w téy materii
mówiło się, dali jakie przystósowanie, zamiérz-
my tobie wynaleziénie, iaka powinna być
wysokość Wilgoćmiaru na wierzchołku góry
Teneryffy; to jest porównamy takową wyso-
kość wyniknąć mającą z poprzedzającego ra-
chunku, z wysokością doświadczoną. Wyso-
kość téy góry znaleziono wynoszącą 13158
stóp Paryskich, albo 157896 calów nad powier-
szchnią morza. W położeniu poziomém z
powierzchnią morza, merkuryusz trzymał
się wysoko na 27 cal. i 10 lin.; na wierzchoł-

Bb 3

ku

ku góry trzymał się wysoko na 17 cal. i 5 lin. to jest, że podług doświadczenia wypada $h = 17 \text{ cal. } 5 \text{ lin.}$. Zobaczmy teraz co nam pokazuje Rachunek.

Ważność przyrodna powietrza, jest około 850tą częścią ważności wody pospolitej; a téj znowu ważność przyrodna, jest około 14tą częścią takież ważności merkuryusza. Będzie tedy $p = \frac{1}{850 \times 14} = \frac{1}{11900}$.

$$x = 157896 \text{ cal.}; H = 27 \frac{5}{6} \text{ cal.} \quad \text{Więc } \frac{px}{H} = \frac{157896}{11900 \times 27 \frac{5}{6}} = 0,4767153; \text{ liczba, która jest}$$

logarytmem Hiperbolicznym, ilości oznaczony przez A ; więc rozmnożywszy ją przez 0,4342945, mieć będziemy 0,2070346 na logarytm pospolity, odpowiadający ilości A .

Więc $\log \frac{H}{A} = 1,2375306$; więc $\log H = 1,2375306$; logarytm, który w Tablicach pospolitych odpowiada liczbie 17,28. A zatem $h = 17,28 \text{ cal.} = 17 \text{ cal. } 3 \frac{1}{2} \text{ lin.}$ A że doświadczenie dało 17 cal. 5 lin.; więc różnica między rachunkiem i doświadczeniem, niewynosi tylko 1 $\frac{1}{2}$ lin.

Wreszcie nienależy nam tu tego zamilczyć, iż niemożna żądać, ażeby ten rachunek miał pokazać niezawodną wysokość Wilgoćmiaru, zwłaszcza w położeniach bardzo wysokich. Bo róż, iak już indziej uważaliśmy, powietrze nie w każdej odległości bywa utłoczone w proporcji wagi. 2re Bo w odległościach znaczniejszych ważność umniejsza się. 3cie Bo ważność przyrodna p powietrza, jest bardzo odmienna. 4te Bo ponieważ odmiany zachodzące w wysokościach Wilgoćmiaru, mogą zależeć po części od sprężystości po-

powietrza rozszerzonego w gorącu, albo zbitego na zimnie, więc trzeba by mieć znaną czynność tych przyczyn, w różnych wysokościach położenia. 5te Bo pary i inne obce ciała, któremi powietrze bywa pospolicie obciążone, mogą być okazywać do wielu odmienności.

341. Na drugie przyśtósowanie tychże wzwyż założonych fundamentów, a bardzo służące do zamiaru naszego, będąc zgodne do objaśnienia odporu, iaki daje powietrze ruchowi pocisków, (jak zobaczymy w Tomie następującym), możemy sobie obrać, wynalezienie gęstości powietrza w różnych wysokościach.

Na wyrażenie takowej gęstości, znale-

ziliśmy byli wyżey $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$; gdzie -

przez H rozumiemy się wysokość merkuryusza w Wilgoćmiarze, w poziomym położeniu z powierzchnią morza, czyli w punkcie od którego poczynają się rachować ilości x . Oznaczmy sobie przez a wysokość, do której podniosłaby się powietrzna, gdyby nie odmienniejąc swojej wagi, miała wszędzie tę samą gęstość p , iaką ma w punkcie od którego rachują się ilości x . Podług tego przypuszczenia, byłoby $x \times H = pa$; gdzie przez x , rozumiemy się być wyrażoną ważność przyrodna merkuryusza, iak wyżey. Położywszy tedy zamiast H wartość onego pa , bę-

dzie $\frac{D}{p} = e^{\frac{-x}{a}}$, a zatem $D = pe^{\frac{-x}{a}}$.

Co się tyczy ilości a ; takowa zawisła od stosunku między przyrodnymi ważnościami

mi powietrza i wody, w tém miejscu, o które rzecz idzie; np. jeżeli przyrodna ważność powietrza, ma się do ważności wody :: 1 : 850, co ma miejsce w średnim umiarkowaniu powietrznym, i w podniesieniach mało wyższych nad powierzchnię morza, to w takim razie, powietrze mocą swoję pośrednię ważności, zdołałoby utrzymać się w równowadze z słupem wody wyłokim na 32 ft.; a zatem wyłokość a , będzie $= 850 \times 32 \text{ ft.} = 27200 \text{ ft.}$ Wtę gdyby zapytano było w tychże samych okolicznościach, iaka jest gęstość powietrza w wy-

łokości na 1000 ft.; mieli byśmy $D = pe^{\frac{-1000}{27200}}$
 $= pe^{\frac{-10}{272}}$, albo $\frac{D}{p} = e^{\frac{-10}{272}}$; a zatem $\log. \frac{D}{p}$

$= \frac{-10}{272}$. Trzebaby tedy wynaleść liczbę, której logarytm Hiperboliczny byłby $\frac{-10}{272}$, albo liczbę, której logarytm pośpolity byłby $\frac{-10}{272} \times 0,4342945$; to jest liczbę, która w Tablicach pośpolitych odpowiadałaby logarytmowi $-0,0159593$; a taką jest 0,964 z ma-

łym uchybieniem; więc $\frac{D}{p} = 0,964$; więc D
 $: p :: 1 : 0,964 :: 1000 : 964 :: 250 : 241$; to jest, że w wysokości na 1000 ft. od powierzchni morza, gęstość powietrza zmniejszyła się na $\frac{1}{27}$. Podobnież znaleźlibyśmy, iż w wysokości na 1000 ft. taż gęstość zmniejszyła się około na $\frac{1}{100}$; to jest więc iak na $\frac{1}{100}$.

342. Na fundamencie tego co dotąd powiedziało się o wadze i o sprężystości powietrza, tudzież o tłoczeniu rościaków w powszechności, łatwo jest zrozumieć, iak woda po-

podnosi się w Rurmusach. Trzy główniejsze części uważać się mają w rurmusie; to jest rury, klamki, i bieguny. Biegun jest to walec $ABCD$ podstawy kołowej (fig. 109, 110, 111) mogący przebiegać wewnętrzną objętość rury, która nazywa się *Jamo ciała* (corps), i w biegun swoim wypełniający doskonale objętość tężże rury. Klamka E , *Kłapa* fluży do otworzenia i zamknięcia na przemian przechodu dla wody. Ciało rurmufu, jest rura którą biegun przebiega. $FGHK$ jest druga rura spojona z ciałem rurmufu, mająca swój dółny koniec zanurzony w wodzie, której poziomność rozumiemy tu bydź oznaczoną przez RS .

Daymy tedy że siła P (fig. 109) przyłożona do trzonka bieguna, podnosi do góry takowy biegun. To powietrze zamknięte w rozległości $DVKHGF$ mocą swoję sprężystości, będzie usiłowało zabrać to miejsce, z którego ustąpił biegun, a zatem podnieść klamkę E dla wnięcia w ciało rurmufu. To powietrze im obszerniey będzie się rozciągać, tém więcéy ubywać mu będzie sprężystości; więc mnieysze utłoczenie sprawować będzie przeciwko powierzchni wody GH , aniżeli sprawuje powietrze naturalne przeciwko częściami zewnętrznym RG , HS ; tak iż przemożność powietrza zewnętrz-

sznego, podnieś wodę w rurze GK do pewnej wysokości HN , póki aż waga tego słupa, złączona z sprężystością pozostałego powietrza, niewyrówna wadze powietrza zewnętrznego. A natenczas klamka E zamknie się sama przez się. Spuściwszy potem na dół biegun, powietrze zamknięte między biegunem a między podstawą TV ciała rurmurowego, tćm więkŝej nabywać będzie sprężystości, im bardziej biegun spuszczać się będzie; przeto uŝilność swoją będzie wywierało przeciwko podstawie bieguna, a przyszedłszy do więkŝej sprężystości jak powietrze zewnętrzne, jeżeli w biegunie będzie zrobiona dziura, przymknięta klamką L , mogącą otwierać i zamykać się, iak pierwsza, to pomienione powietrze, przez nie wydobędzie się.

Po wyjściu tego powietrza, klamka sama nazad opada; a podnosząc na nowo biegun, woda znowu podnieś się w rurę $FG-HK$, do więkŝej wysokości, z tćyżę przyczyny co pierwszćy; tak iż po pewnćy liczbie razy przerobić biegunem, woda dostanie się do ciała rurmurowego, dokąd raz wszedłszy, za każdym spuszczeniem bieguna, dobywać się i przechodzić będzie przez dziurę w nim zrobioną, podnosząc klamkę, zamykającą się potem mocą własną wagi, i utrzymując wodę która do góry przeszła, i która dalćy wraz z biegunem podnosi się. Taka tedy jest sprawa Rurmuŝu ciagnącego (Pompe aspirante).

Co się tycze Rurmuŝu *deptającego*, (pompe foulante), skutki jego są następujące. Spuściwszy biegun PCD (fig. 110), (który tu rozu-

figura
110.

zumiemy być połoŝony poniżej powierzchni wody RS), między klamką E natenczas zamkniętą, a między podstawą bieguna, robi się próżne miejsce. Waga wody czyniąca spólnie z wagą powietrza zewnętrznego przeciwko klamce L , podnosi wodę do ciała rurmuŝu. A gdy woda ustanie podnosić się, klamka E zamyka się sama przez się. Natenczas podnosząc biegun do góry, takowy wypędza przed sobą wodę wprowadzoną, przymuszając do otworzenia się klamkę E , i podnosi wodę do części $TVYX$. Po podniesieniu bieguna, klamka E zamyka się, i zatrzymuje wodę, aż za nowćm działaniem podobnćm pierwszymu, napędzi się nowćy wody, która w części $TVYX$ podnosić się będzie, w proporcję liczby razy przerobić biegunem. Czaćem biegun daie się powyżej powierzchni wody; ale niech będzie połoŝony iak chce, skutek rurmuŝu, zawsze da wytłumaczyć się w sposób temu podobny. Taka tedy znowu jest sprawa Rurmuŝu *deptającego*.

Rur-

Rurmus *ciągnący i deptający* dla tego tak nazywa się, że w sobie łączy te oboje *figura* skutki. Biegun $ABCD$ podnosząc się (*fig. III, III*), wpuszcza wodę w objętość $CDTVO$ przy pomocy rury $FGHK$, iak w rurmusie *ciągnącym*. A potem spuszczaąc się, depce wodę zamkniętą w tęg objętości, która niemogąc dobyć się przez kłankę E , podnosi kłankę L i przechodzi w rurę $MOmn$. Budowla i rozporządzenie części w rurmusach, może być wielorako odmienna; ale skutki, przez te które dopiero opisa-
liśmy, bardzo łatwo zawsze wytłómaczyć się dadzą.

343. Zastanówmy się teraz nad fundamentalnemi własnościami tych filniów. Przy pomocy Rurmusu deptającego, można podnieść wodę do takięj wysokości iak się spodoba, byleby użyć siły dostatecznéj. Ale oszacowanie takowęj siły wyciąga nie iednéj uwagi. Trzeba mieć wzgląd na wymiary bieguna i rury; na wysokość do któręj ma być woda podniesiona; na szypkość z którą ma być podniesiona. Nie-myślimy my tu rozbiierać teraz tego zagadnienia, ale tylko przestaniemy na niektórych zasadach, do rozwią-zania go służyć mogących.

To pewna, że siła potrzebna do podniesienia wody do wysokości za-da-

daney, powinna przynajmnię być zdolna, do utrzymania równowagi z utłoczeniem, iakie odbierałaby podstawa bieguna, gdyby, iak warstwa rościeku dojdzie do wysokości zadanéj, wszystko zostało w równowadze. I takowe to utłoczenie zechcemy tu oszacować. Ogólém powiedziawszy ta siła powinna być przynajmnię zdolna, do utrzymania słupa wody, mającego za podstawę, podstawę bieguna, a za wysokość mającego odległość od powierzchni wody RS (*fig. 110*), aż do wierz-
chnéj warstwy XT . *figura 110.*

Jakóż, kiedy podstawa DC bieguna, znajduje się być położona poniżej powierzchni wody RS , iawna jest, że siła nie-ma nie do czynienia z utrzymowaniem tłoczenia wody zawartęj między RS i DC ; bo takowe tłoczenie bierze odpór, od tłoczenia wody zewnątrz otaczającey, która wchodzi wewnątrz przez dólne otwarcie ciała rurmusowego. A zatem siła niema więcéj do wytrzymania, tylko tłoczenie iakie (prawu-
ie rościek zawarty między RS i XT przeciwko powierzchni DC . Lecz takowe tłoczenie, powinno ważyć tyle, co tłoczenie iednego promyka, wysokiego od RS do XT , mówię tyle co tłoczenie tego promyka, powtórzone tyle razy, ile znajduje się punktów w powierzchni DC ; więc w rzeczy samęj takowe tłoczenie, równa się wadze słupa wody, mającego za podstawę DC , a za wysokość, podniesienie war-

warstwy XT nad powierzchnią wody RS . Gdyby biegun znajdował się być położony powyżej powierzchni wody oznaczony przez $R'S'$; iawna jest, że woda zawarta między DC i $R'S'$ wcale nieobciążałaby bieguna. Ale że w takim razie nie może inaczey być utrzymana, tylko mocą tłoczenia powietrza zewnętrznego na otaczającą powierzchnią wody, więc takowe tłoczenie powietrza, już niemoże oraz być zdolne do trzymania równowagi z tłoczeniem owego powietrza, które skutkuje przeciwko powierzchni XT . A zatem powierzchnia DC bieguna, znajduie się być obciążona wagą, wyrównyującą słupowi wody, mającemu za podstawę DC , a za wysokość, mającemu odległość od D do $R'S'$. To utłoczenie, złączone z owém, iakie sprawuie przeciwko podstawie DC woda zawarta między DC i XT , tyle wartająca ile waży słup wody mający za podstawę DC , a za wysokość, mający odległość od DC do XT ; to mówię dwojakie tłoczenie, równa się wadze słupa wody, mającego za podstawę DC , a za wysokość, podniesienie warstwy XT nad powierzchnią wody $R'S'$.

344. Co się tyczy Rurmufu ciągnącego, mając sądzić o skutku iego, niedosyć jest oszacować dzielność siły; ale nasamprzód trzeba zastanowić się nad tém, czy woda będzie mogła dóysdź do bieguna, a nawet czy zdoła podnieść się wyżej; bo zachodzą takie okoliczności, dla których woda może zastanowić się w pewnym punkcie, chociażby biegun.

guném robiło się iak naydłużey. Żeby to zrozumieć daymy że woda doszła już aż do I (fig. 109), ^{figura 109.} gdzie położenie bieguna rozumie się już być nayniższe iakie tylko mieć może; a dla prościéyszego rzeczy wyobrażenia, daymy, że rurmus jest wszędzie iednostaynéy grubości. Jawna jest, że powietrze zawarte w rozległości $CDIZ$, jest téyże saméy mocy i sprężystości, co powietrze zewnętrżne, (przynaymniéy odłączywszy na stronę wagę kłamki L i odpór pochodzący z tarcia onéyże). Bo gdyby miało większą sprężystość, to podniósłby kłamki, musiałoby się wydobydź. Zmyślmy sobie teraz, że skokiém bieguna, czyli rozległością, iaką przebiega za każdém podniesiém, jest DO . Gdy podstawa CD doydzie do QO , powietrze zabiérające miéysce $CDIZ$, dąży do rozéyscia się po rozległości $QOTZ$; i wrzeczy saméy rozéydzie się po niéy, ieżeliby woda już daléy niepodnosiła się. Naténczas sprężystość tego powietrza, będzie mniéysza od sprężystości powietrza naturalnego, w stosunku rozległościów $CDIZ$ do QO .

QOIZ, albo w stósunku wysokości DI do OI . Więc jeżeli takowa siła sprężystości, złączona z wagą słupa wody, tak wysokiego jaka jest odległość od ZI do RS , wyrównywa wadze słupa wody na 32 ft . wysokiego, (bo takie jest tłoczenie powietrza przeciwko powierzchni wody RS), to rzecz oczywista, że równowaga będzie miała miejsce, i woda już do góry wycę niepójdzie; jeżeli zaś ta waga będzie większa, od wagi słupa wody na 32 ft . wysokiego, to woda naład na dół upadać musi, wprzód nim klamka będzie mogła zapaść: a jeżeliby przeciwnie była mniejsza, od wagi słupa przerzeczonego, to woda dalej podnosić się będzie w górę. Zobaczmy teraz, iakby można wynaléśdź takową wagę.

Oznaczmy sobie przez h , wysokość od punktu O aż do powierzchni wody RS ; przez i skok bieguna, czyli rozległość DO którą przebiega; przez x odległość OI . Mieć będziemy $DI = x - i$, a wysokość punktu I , będzie wyrażona przez $h - x$. Ponieważ powietrze zamknięte w rozległości $CDIZ$, ma też samę sprężystość co powietrze zewnętrzne; więc siła jego może mieć za wymiar, słup wody, wysoki na 32 ft .; a zatem kiedy siła powietrza rościagnionego po rozległo-

ści

ści QOIZ, ma bydź mniejsza w stósunku wysokości DI do DO , to takowa siła będzie czwartym wyrazem proporcji następującej, $x : x - i :: 32 : \frac{32 \times (x - i)}{2}$. Lecz wy-

miarém siły, mocą której skutkuje woda zawarta między ZI i RS przeciwko zewnętrznemu tłoczeniu powietrza, jest wysokość $h - x$; więc siła sprężystości powietrza, zabierającego rozległość QOIZ, złączona z wagą wody zamkniętą między IZ i RS , wynosi razém wagę wyrażoną przez $\frac{32 \times (x - i)}{x}$.

$+ h - x$. Zeby tedy woda mogła podnosić się do góry, trzeba ażeby takowa waga była mniejsza, od wagi słupa wody, wysokiego na 32 ft .; więc oznaczywszy przez y ilość o którą jest mniejsza, będzie $\frac{32 \times (x - i)}{x}$.

$+ h - x = 32 - y$; Ikąd wyciąga się $- 32i$

$+ hx - xx = -xy$; a zatem $x = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}y$

$+ \sqrt{[(\frac{h+y}{2})^2 - 32i]}$.

Zeby się woda załanoowała, oczywiście potrzeba ażeby y było zerém. A że w takim razie wypada $x = \frac{1}{2}h + \sqrt{(\frac{1}{4}hh - 32i)}$, gdzie obie wartości będą rzetelne, jeżeli jest $\frac{1}{4}hh$ większe od $32i$; więc można powiedzieć, że kiedy kwadrat połowy największej wysokości, do iakiéy może bydź podniesiona podstawa bieguna nad powierzchnią wody, jest większy nad skok tegóż bieguna, powtórzony 32 razy, to zawsze znajdować się będą takie dwa punkta w rurmusie ciągnącym, na których woda może się załanoować. Tak iż rurmus powinien bydź poczytany za zły, kiedy biegun będąc najniżey położony, znajduje się między temi dwoma punktami.

Tom III.

Ca

Lecz

Lecz jeżeli $32i$ jest większe od $\frac{1}{4}hh$, to dwie wartości głoski x , wynikające w takim przypadku, kiedyby było $y = 0$, wypadają zmyślane; co daie znać, że w rumusie podobowanym podług tego warunku, niepodobna jest, ażeby y było zerem; więc utłoczenie powietrza zewnętrznego, będzie w nim zawsze mocniejszy, i woda zaстанawiać się niebędzie. Więc, ażeby rumus ciągnący uczynił niezawodnie swody skutek, trzeba ażeby kwadrat połowy największego wyniesienia bieguna nad powierzchnią wody, był mniejszy od skoku tegoż bieguna, powtórzonego 32 razy.

Jeżeli z wyżey wynalezionego zrównania, $-32i + hx - xx = -xy$, wyciągniemy wartość głoski y , mieć będziemy $y = \frac{xx - hx + 32i}{x}$.

figura

112.

113.

figura

112.

Teraz daymy, że AB (fig. 112. 113) oznacza najwyższe podniesienie bieguna nad powierzchnią wody, a zaś AD oznacza skok tegoż bieguna; jeżeli na wartość głoski x weźmiemy z kolei różne części AP linii AB , i jeżeli na prostopadłych PM , powznaczamy wartości głoski y , odpowiadające użytym wartościom głoski x , to z takowych punktów powytykanych powstaie linia krzywa MMC , która w (fig. 112), (kiedy $\frac{1}{4}hh$ będzie większe od $32i$), przecinać będzie linią AB w dwóch punktach I i I' ; tak iż rzędne PM będą położone z obu stron linii AB ; te co po prawey stronie, odpowiadając wartościom twierdzącym głoski y ; a te co po lewey stronie odpowiadają będą wartościom przeczącym téż głoski. Skąd pokazuje się, że kiedy $\frac{1}{4}hh$ jest większe od $32i$, to tłoczenie powietrza zewnętrznego, zawsze wypada większe, póki aż woda nie-

dóy-

dóydzie wysokości BI' ; gdzie dopiero za-
stanowi się (odłączywszy na stronę ruch na-
byty), bo tam y przemienia się w zero. Ale
jeżeli woda mocą nabytego ruchu, pominą-
wszy wysokość BI' , dóydzie do którego
punktu położonego między I i I' , to już tam
niebędzie mogła zastanowić się, ale musi na dół
opadać, (byleby iey klamka nieprzeszkadzała);
bo w tém miejscu wartość głoski y wypa-
da przecząca, co daie znać, że tłoczenie ze-
wnętrznego powietrza, jest słabsze od obo-
ięy uślności razem złączonę, to jest wody
i sprężystości wewnętrznego powietrza. Je-
żeli woda dóydzie wysokości punktu I , to
znowu z téż przyczyny co wyżey, bę-
dzie mogła tam zastanowić się. Ale gdy
raz pominie punkt I , już nietrzeba więcej
obawiać się żeby miała opadać; bo natén-
czas rzędne PM zawarte między A i I bę-
dąc wszystkie twierdzącemi, daia znać, że
tłoczenie powietrza zewnętrznego, począ-
wszy od wysokości punktu I aż do A , za-
wsze jest mocniejszy.

Przeciwnym sposobem, kiedy wartość
ilości $\frac{1}{4}hy$, jest mniejsza od $32i$ (fig. 113),
to linia krzywa nigdzie nieprzecina osi AB ;
tak że wszystkie rzędne PM wypadają twier-
dzące; więc w takim razie, tłoczenie powie-
trza zewnętrznego jest zawsze mocniejszy;
a zatem nietrzeba obawiać się zastanowienia
wody. Jest to potwierdzeniem i objaśnieniem
tego, co poprzedziło wyżey.

figura
113.

345. Gdyby rumus ciągnący
był postawiony na wysokości albo
w głębokości znacznie różnney od
téy, w której waga powietrza wyró-
wnywa wadze słupa wody na $32\frac{1}{2}$.

Cc2

wy-

wysokiego; to w tém wszystkim co przepisało się wyżej, trzebaby położyć mnięj albo więcej nad 32 *ft.* Ta zaś ilość mnięjszości albo większości, może być wynaleziona przy pomocy Wilgoćmiaru, rachując tyle razy 14 linii więcej albo mnięj względem 32 *stop*, ile merkuryusz wskazywać będzie linii więcej lub mnięj nad 27½ *cal.*

W poprzedzającym rachunku, uważaliśmy rurmus, iakoby wszędzie iednostaynéj grubości; atoli chociażby tak niebyło, ale inaczej iak w (fig. 109), to rozwiązanie nie wypadłoby przeto trudnięjsze. Zeby wyrachować uśilność powietrza wnętrznego, w ten czas, póki woda niewniydzie ieszcze w ciału rurmusu *XV*, np. póki ieszcze jest w położeniu *MN*, trzeba ułożyć tę proporcją: Rozległość *QOVNMTQ* : *CDVNMTC* :: 32 *ft.* do czwartego wyrazu, który dodany do wagi słupa wody, mającego za wysokość *NH*, powinién potém być zrównany z ilością 32 — *y*, iak wyżej. Nadto, kiedy rura *FG*, którą ciągnie się woda, jest mnięjszý średnicy od samego ciała rurmusu, to w nim niezawodny skutek nastąpić musi, i jeżeli ma miejsce warunek wyżej założony; bo powietrze łatwięj rozszerza się w takim rurmusie, aniżeli gdyby był iednostaynéj grubości.

346. Co się tycze mocy, iaką powinna mieć siła, chcąc ażeby utrzymała wodę w pewnéj wysokości *XT* (fig.

figura
109.

(fig. 109); takowéj wymiarém, (iak *figura* 109. powiedziało się o rurmusie deptaiącym), powinna być waga słupa wody, mającego za podstawę, podstawę *DC* bieguna, a za wysokość, podniesienie naywyższéj warsztwy *XT*, nad powierśzchnią wody *RS*; (w czém odłączamy na stronę skutek tarcia i wagę bieguna). To zaś dowodzi się przez rozumowanie, podobne owemu, którego użyliśmy względem rurmusu deptaiącego, w położeniu bieguna powyżej powierśzchni wody *R'S'* (fig. 110).

figura
110.

347. Wazność i sprężystość powietrza, służy do wytłómaczenia wielu innych skutków; my przestaniemy tu tylko na niektórych.

Jeżeli tedy w naczyniu napelnioném wodą, lub iakiémkolwiek innym rościęciem, zanurzy się krótsze kolanko rurki zakrzywionéj *DEF* (która nazywa się lewaram) (fig. 114); wyciągnąwszy niby przez wyślanie, lub iakimkolwiek innym sposobém powietrze z tego lewara; woda podnosić się będzie do góry, i spływać na dół końcem *F*, póty póki powierśzchnia iéy w naczyniu, nie zrówna się z otwarciem *D* krótszego kolanka.

figura
114.

Przyczyna tego jest ta: że wyciągnąwszy powietrze zawarte w rozległości *DEF*, tłoczenie powietrza zewnętrznego, skutkujące przeciwko powierśzchni *AB*, przymu-

fza rościęk do podniesienia się w lewarze, i do wypłynienia, kolankiem EF . A lubo powiętrze tłoczy w punkcie F rościęk poczynający płynąć, z ufilnością mało nierówną tęg, która skutkuje przeciwko powierzchni wody w naczyniu, atoli warstwa F znajduje się bydź nadto przytłoczona całym słupem wody IF , w rozumieniu przeciwném; więc tén słup musi opaść; lecz opadając, sprawia miejsce próżne w I , które musi zaraz bydź napełnione, mocą zawsze przytomnej czynności czyli tłoczenia powietrza na powierzchnię wody zawartej w naczyniu, więc t. d.

Z tego rozumowania pokazuje się, że pod czas tego płynienia, powietrze nieskutkuje, tylko z ufilnością proporcjonalną różnicy IF między poziomem punktu F , i powierzchnią wody zawartej w naczyniu; tak iż płynienie będzie tén nagłysz, im bardzię dwa kolanka lewara w długości różnić się będą; a zatém gdyby oba punkta F i D , znajdowały się w położeniu poziomém, to płynienie rościęku niémogłoby nastąpić.

Mówi się pospolicie, że kolanko EF powinno bydź dłuższe od kolanka ED ; ale iawna jest, iako przez to wyrażenie rozumieć się ma, iż podniesienie pionowe punktu E nad punkt F powinno bydź większe, aniżeli podniesienie tegóż punktu E nad punkt D . Na długości zaś bezwzględnej tych kolanek, wcale nic niezależy. Można zrobić kolanko DE daleko dłuższe od kolanka EF , pokręciwszy rozmaicie kolanko DE ; byleby punkt D , był wyżey położony nad punkt F , to rościęk póty nieustanie płynąć, póki nie opadnie aż do punktu D ; rozumie się atoli, że podniesienie punktu E nad punkt D , nie przenosi 32 stóp.

348. Przyłożywszy usta do szyiki butelki, i ciągnąc do siebie przez wyśfanie rospłyn w nięj zawarty, usta przypną się mocno do brzegów otwartości szyiki; i tén trudnięj ie będzie oderwać, im było mocniysz to pociągnięcie w siebie.

Przyczyna tego jest; iż wyciągnąwszy część powietrza zawartego w butelce, umnięsza się sprężystość pozostałego powietrza, w proporcji wyciągnionęj ilości iego; a zatém czynność wewnętrznej powietrza, już niewyrównywa czynności powietrza zewnętrznego. Ta różnica może bydź tak wielka, iżby się i flaszka sfłukła, zwłaszcza kiedy jest płaska.

349. Podobnymże sposobem wytłomaczyć można, dla czego trudno jest otworzyć miech, zatkawszy w nim rurkę. Bo rościągając ściany, powietrze wewnętrzne, roschodzi się po obszérniyszém miejscu, przez co mu ubywa sprężystości; a zatém powietrze zewnętrzne filnię skutkuje z wierzchu, aniżeli powietrze zamknięte wewnątrz.

T A B L I C A

Ważnościów, przyrodnych materyóm naypospolicięj używanym.

P R Z E S T R O G A.

Liczbę odpowiadającą każdemu rodzajowi materyi w następującej Tablicy, wyrażają stosunek między wagą iakiękolwiek objętości tęg materyi, a między wagą podobnęj objętości wody deszczowęj; którą ostatnia wyraża się tu przez iedność. Stopa Francuska sześcienna wody deszczowęj, waży 70 stóp Paryskich; 73.5 Kolońskich albo Warszawskich Mienicznych; a Warszawskich sklepowych mnięjszęj wagi 90,

90,837; takichże większą wagę. 84,678. Stopa znówu Warszawska sześcienna téż wody deszczowej, waży ftów Paryskich 53,43; ftów Kolońskich 56,1; ftów mniejszych Warszawskich sklepowych 69,33; takichże ftów większych. 64,63; to wszystko z małym uchybieniem. A zatem ażeby przy pomocy téj Tablicy, mieć wagę stopy sześciennéj iakiegokolwiek innéj materyi, trzeba liczbę odpowiadającą takowéj materyi w téj Tablicy, rozmnożyć przez wagę stopy sześciennéj wody. Np. liczba odpowiadająca tu merkurysowi, jest 13,593; co daie znać że merkurys waży 13 i $\frac{1000}{1000}$ razy, tyle co woda. Chcąc tedy wiedzieć wiele wagi stopa Francuska sześcienna takowego merkurysu, wiele mówić waży ftów czyto Paryskich, czy Kolońskich, czy Warszawskich sklepowych mniejszych lub większych, mnożę 13,593 w pierwszym przypadku przez 70, w drugim przez 73,5; w trzecim przez 90,837; a w czwartym przez 84,678. A wypadające mnogości pokazują mi, że stopa Paryska merkurysu, waży ftów Francuskich 951,51; Kolońskich 999,08; Warszawskich mniejszych. 1234,75; Warszawskich większych 1151,028; z małym uchybieniem. Podobnymże sposobem chcąc wiedzieć wiele wagi Stopa Warszawsku sześcienna tegóż merkurysu, w funtach czyto Francuskich, czy Kolońskich, czy Warszawskich, rozmnożyłbym liczbę 13,593 w pierwszym przypadku przez 53,43; w drugim przez 56,1; a w trzecim przez 69,33; albo przez 64,63. Toż rozumie się o innych materjach.

W A Z N O S C I P R Z Y R O D N E

niektórym ciałom Brylastym.

Antimonium Niemieckie - - -	Brzoft drzewo -	0,600.
Antimonium Węgierskie - - -	Bukspan drzewo	1,030.
Borax - - -	Cedrowe drzewo	0,613.
Brezylia Drzewo, 1,030.	Cegła - - -	1,857.
	Cyna czysta -	7,320.
	Cyna mieszana Angielska	

W A Z N O S C I O W.

gielska - - -	7,471.	Mosiądz - - -	7,829.
Cynober naturalny	7,300.	Olizyna - - -	0,530.
Cynober kunsztowny - - -	8,200.	Ołów - - -	11,828.
Dąb zielony - - -	1,143.	Orzech drzewo	0,600.
Dąb suchy - - -	0,857.	Piasek rzeczany	1,900.
Gaiak drzewo - - -	1,337.	Proch wojenny	0,914.
Gips - - -	1,228.	Róg wołowy -	1,814.
Gлина - - -	1,929.	Róg Jeleni - -	1,875.
Guma Arabska -	1,375.	Rokicina - - -	0,543.
Grabina drzewo	0,854.	Salitra - - -	1,900.
Gryspan - - -	1,714.	Salitra obrocona w sól martwą (fixe)	2,745.
Hałun - - -	1,714.	Siarka naturalna	2,000.
Heban drzewo -	1,177.	Siarka pospolita	1,800.
Jalun - - -	0,845.	Smola - - -	1,150.
Jawór albo klón	0,755.	Sól kopana - -	1,143.
Jodła - - -	0,550.	Stoniowa kość -	1,825.
Kamiień łupki (ardoise) - - -	3,500.	Srebro przednie	11,091.
Kamiień twardy	2,371.	Srebrna piana -	6,044.
Kamiień pospolity	1,642.	Stal nie hartowna	7,738.
Koperwas Angielski	1,880.	Stal hartowna -	7,704.
Krzemiień nieprzeźroczysty -	2,542.	Szkło białe - -	3,150.
Krzemiień przeźroczysty - - -	2,641.	Tucia mosiężna albo Zynkuned	5,000.
Krwawnik - - -	4,360.	Węgiel ziemny	1,240.
Marmur - - -	2,700.	Wosk żółty - -	0,995.
Merkuryusz -	13,593.	Zelazo lane - -	7,114.
Miódz - - -	9,257.	Zelazo kute - -	8,286.
		Złota piana - -	6,000.
		Złoto przednie	19,640.

Ważności, przyrodne niektórym ciałom rościelnym.

Powietrze - - -	0,001 $\frac{1}{2}$	Wódka Serwaferow.	1,300.
Woda deszczowa	1,000	Duch Salitrzany	1,315.
Woda dystrylowana - - -	0,993	Ténże zrektifikowane. - - -	1,610.
Woda rzeczana	1,009	Duch Soli morskiej (sel marin) -	1,130.
Woda morska -	1,030	Duch Soli winny (tar-	
Wódka Węgierska	1,234		

424 WAZNOSCI PRZTODNE.

(tartre) - - -	1,073.	Oléy Iniany - - -	0,932.
Duch Terpentyno-		Oléy terpentynowy	0,792.
wy - - -	0,874.	Oliwa - - -	0,913.
Duch winny zrekty-		Ocet winny - - -	1,011.
fikowany - - -	0,866.	Ocet dystryllowany	1,030.
Duch koperwałowy	1,203.		

PRZYDATEK

Niektórych Zagadnień przystósowanych do Artyleryi, a rozwiązujących się na fundamentach, w tym i w poprzedzających Tomach założonych.

ZAGADNIENIE PIERWSZE.

Daymy że znajduie się w Ludwisarni Spiż stary np. troiakiego rodzaju; pierwszy taki, że w nim na każde 104 fty miedzi wchodzi 8 ftów cyny; w drugim na każde 101 ftów miedzi wchodzi 11 ftów cyny; w trzecim na każde 92 fty miedzi wchodzi 20 ftów cyny; * chcąc z tego troiakiego gatunku starego spiżu, zrobić nowy odlów taki, ażeby w nim na każde 100 ftów miedzi wchodziło 12 ftów cyny: jest pytanie, w iakięj proporcji ma być wzięto do pieca każdego z tych trzech rodzajów spiżu.

Oznaczmy sobie przez x ilość ftów, jaką trzeba wziąć z pierwszego gatunku, przez y ilość ftów drugiego gatunku a przez z ilość ftów z trzeciego gatunku. Ponieważ w 112 ftach pierwszego spiżu znajduje się 104 fty miedzi, więc można wynaleźć wiele miedzi być musi w x ftach tegoż spiżu,

* Te gatunki rozumieją się być rozróżnione, sposobem podanym do tego w Tom. I. Artyl. l. 133.

PRZYDATEK ZAGADN. 425

wyrachowawszy czwarty wyraz następujący proporcji $112 : 104 :: x : \frac{104x}{112}$; podobnymże właśnie sposobem znaleźlibyśmy że w y ftach drugiego rodzaju, powinno być miedzi $\frac{101y}{112}$, a w z ftach trze-

ciego rodzaju powinno być $\frac{92z}{112}$. Te trzy ilości

razem dodane uczynią $\frac{104x + 101y + 92z}{112}$. A że nowa mieszanina ma być taka, ażeby w 112 ftach znajdowało się 100 ftów miedzi, więc musi być $\frac{104x + 101y + 92z}{112} = 100$.

Co do cyny, uważam podobnie, że biorąc x ftów pierwszego rodzaju, biorę następnie $\frac{8x}{112}$ cyny, biorąc y ftów drugiego rodzaju, biorę $\frac{11y}{112}$, a z trzeciego rodzaju biorę $\frac{20z}{112}$ cyny; a że w 112 ftach nowego spiżu, ma być znajdować się 12 ftów, więc musi być $\frac{8x + 11y + 20z}{112} = 12$.

Ponieważ w to zagadnienie wchodzi trzy niewiadome, a niemamy tylko dwa warunki, a zatem też tylko dwa z nich wynikające z równania, więc zaraz wnoszę sobie, iż to Zagadnienie jest nieokreślone, to jest, że wiele sposobami może być rozwiązane. A zatem postąpiwszy sobie podług reguł w Algebrze przepisanych, mieć będziemy iak następuje.

$$\frac{104x + 101y + 92z}{112} = 100.$$

$$\frac{8x + 11y + 20z}{112} = 12.$$

albo

PRZTDATEK

$$\text{albo } 104x + 101y + 92z = 11200.$$

$$\text{ i } 8x + 11y + 20z = 1344.$$

a z każdego z tych zrównań wyciągnąwszy wartość głoski x , będzie

$$x = \frac{11200 - 101y - 92z}{104}$$

$$x = \frac{1344 - 11y - 20z}{8}$$

Zrównawszy te dwie wartości jedną z drugą, i wyrugówawszy mianownika będzie

$$89600 - 808y - 736z = 139776 - 1144y - 2080z,$$

$$\text{albo przedstawwszy, } 1144y - 808y = 139776 - 89600 - 2080z + 736z.$$

$$\text{a po zebraniu. } 336y = 50176 - 1344z.$$

$$\text{A zatem } y = \frac{50176 - 1344z}{336}.$$

Teraz żeby dokonać zagadnienia, dosyć jest, zamiast z położyć liczbę taką iaka się spodoba. Atoli iawna jest że, przecięż powinna być taka,

ażeby wypadek z ilości $\frac{50176 - 1344z}{336}$ był znacznie

mniejszy od 112, a znacznie większy od 1. Obierzmy tedy sobie np. na wartość głoski z 30 ftów; to

$$\text{mieć będziemy } y = \frac{50176 - 1344 \times 30}{336} = \frac{50176 - 40320}{336}$$

$$= 29 \frac{112}{336}.$$

Te dwie wartości położywszy za-

$$\text{miast } y \text{ i } z \text{ w zrównaniu } x = \frac{1344 - 11y - 20z}{8},$$

$$\text{znaydziemy } x = 52 \frac{224}{336}.$$

A zatem, żeby nowy od-
lów był taki, iżby w nim na każde 100 ftów mie-
dzi wchodziło 12 ftów cyny; trzeba by wziąć spi-
żu starego pomienionych trzech gatunków w takię
proporcyi, ażeby ilość pierwszego gatunku miała
się, do ilości drugiego gatunku, i do ilości trze-
cie-

ZAGADNIEN.

$$\text{ciego gatunku} :: 52 \frac{224}{336} : 29 \frac{112}{336} : 30.$$

ZAGADNIENIE DRUGIE.

Mając wielorakiego gatunku zepsuty proch np. dwoiakiego lub troiakiego; a oraż wiadomo, każdy gatunek, z iakię proporcji składa się Salitry, Siar-
ki i węgla; daymy że w pierwszy wchodzi na 100 ftów salitry 20 ftów siarki, a 24 ftów węgla, w drugi na 100 ftów salitry 12 ftów siarki a 20 ftów węgla; a w trzeci, na 100 ftów salitry, 10 ftów siarki, a 24 ftów węgla; chcąc go przerobić na ieden gatunek taki, ażeby na każde 100 ftów salitry wchodziło 12 ftów siarki a 15 ftów węgla, jest pytanie, w iakię proporcji, trzeba by wziąć każdego z trzech pomienionych, gatunków?

Ponieważ to Zagadnienie, jest podobne do poprzedzającego, (oprócz że jest określone); prze-
to rozwiązanie onego, dla wprawienia się, zesta-
wiamy Czytelnikowi.

ZAGADNIENIE TRZECIE.

Daymy że do moździerza ma być dana kómo-
ra w postać Stożka ściętego, takię wielkości, ażeby
mieściła w sobie 2 fty prochu; z tym warunkiem,
ażeby średnica większey podstawy stożka miała 4 cal.
a średnica mniejszey podstawy, miała 2 c. Niechay
będzie nadto wiadomo że stopa sześcienna prochu wa-
ży 51 ftów. Jest zadano, wynaléść potrzebną wy-
sokość téj stożkowéj kómory.

Oznaczmy sobie przez x tę zadaną wysokość.
Naprzód trzeba mi wiedzieć, iaka bryłowatość od-
powiadać ma ilości 2 ftów prochu, kiedy 51 ftów
zawierają się w iednéj stopie; czego dochodzę,
przez proporcją następującą.

$$51 : 1728^{ccc} :: 2 : 67,777^{ccc}$$

Wynalázłszy tedy 67,777 na objętość odpowia-
dającą 2 ftóm prochu; ponieważ ta objętość ma
mieć postać stożka ściętego, więc podług Jeometryi,
równać się powinna, trzem całym stożkóm téż-
wy-

wysokości co stożek ścięty, z których pierwszy miałby za podstawę, większą podstawę stożka ściętego, drugi miałby za podstawę, mniejszą podstawę; a trzeci miałby za swoją podstawę, podstawę średnią proporcjonalną, między większą i mniejszą podstawą tegoż stożka ściętego. A zatem oznaczwszy sobie promienie tych trzech podstaw $2\frac{1}{2}$ i 1 przez a, b, d , a przez c : r stółunek okręgu do średnicy, na wyrażenie bryłowości

tych trzech stożków mieć będziemy $\frac{a^2c}{r} \times \frac{1}{3}x, \frac{b^2c}{r} \times \frac{1}{3}x,$

$\frac{d^2c}{r} \times \frac{1}{3}x$; więc musi być $\frac{a^2c}{r} \times \frac{1}{3}x + \frac{b^2c}{r} \times \frac{1}{3}x + \frac{d^2c}{r} \times \frac{1}{3}x$

$\times \frac{1}{3}x = 67,777$. albo $(\frac{a^2c}{r} + \frac{b^2c}{r} + \frac{d^2c}{r}) \times \frac{1}{3}x = 67,777$.

Więc $\frac{1}{3}x = \frac{67,777}{\frac{a^2c}{r} + \frac{b^2c}{r} + \frac{d^2c}{r}}$, a za-

tem $x = \frac{67,777 \times 3}{\frac{a^2c}{r} + \frac{b^2c}{r} + \frac{d^2c}{r}}$; a położywszy za-

miał ilościów literalnych, onych wartości, będzie $x = \frac{67,777 \times 3}{\frac{4 \times 3\frac{1}{2}}{r} + \frac{2\frac{1}{2}}{r} + \frac{1 \times 3\frac{1}{2}}{r}} = \frac{203,331}{12,57 + 6,87 + 3,14}$

$= \frac{20333}{2258} = 9$. To jest, że komora takowa powin-

naby być wysoka na 9 cal. zaniedbawszy resztę, niewynoszącą i jednę tysięczną części cala.

ZAGADNIENIE CZWARTE.

Mówiąc o Szturmakach (Artyl. tom II. Rozdz. IV), do pospolitego użycia naznaczyliśmy im tylko komory stożkowe; atoli do sprawienia niemi iakiego dzielnego skutku, zwykły im dawać się komory pa-

raboliczne. Daymy tedy iż do takowego szturmaka, ma być uproporcyonowana komora paraboliczna wysoka na 12 cal. takię wielkość, ażeby mieściła w sobie 51 stów prochu.

Wynayduię naprzód objętość odpowiadającą ilości 51 stów prochu; tymże sposobem iak w poprzedzającym przykładzie; to jest, $51 : 1728 :: 51 : 1728$. Teraz żeby mieć wymiary paraboli odpowiadające téj objętości; uważam naprzód że podług (80 Mechaniki), bryłowość paraboli, równa się połowie wałka téż podstawy i téż wysokości co parabola; tak iż oznaczwszy sobie daną wysokość przez x , promień podstawy, czyli rzędną przez y ; na bryłowość paraboli mieć będziemy $\frac{y^2 \times 3\frac{1}{2} \times x}{2}$, a zatem będzie $1728 = \frac{y^2 \times 3\frac{1}{2} \times x}{2}$ albo

$3456 = y^2 \times 3\frac{1}{2} \times x$; a zatem $y^2 = \frac{3456}{3\frac{1}{2}x}$; a zaś $y = \sqrt{\frac{3456}{3\frac{1}{2}x}}$. Zrównanie, któreby nam dało, wartość

promienia podstawy, odpowiadającego żadaney komorze paraboliczney. Ale że do nakryślenia iey trzeba mieć wiadomą palirzędną, więc zobaczmy iakby znaleźć iey wartość. Mamy w (Alg. 291. po 4te) $yy = px$, gdzie przez y jest oznaczona rzędna, przez x odcinek, a przez p palirzędną, więc będzie $p = \frac{y^2}{x}$; to jest, położywszy zamiast y^2 wartość iego dopiero wzwyż wynalezioną, będzie $p = \frac{3456}{3\frac{1}{2}x^2}$.

A że zadana wysokość komory paraboliczney ma wynosić 12 cal. które tu w oboim zrównaniu jest wyrażone przez x ; więc naostatek mieć będziemy $p = \frac{3456}{3\frac{1}{2} \times 144} = 7,636$; a y będzie $= \sqrt{\frac{3456}{3\frac{1}{2} \times 12}} = 9,6$ c. z małym uchybieniem.

ZA-

PRZTDATEK
ZAGADNIENIE PIĄTE.

Zdarzają się częstokroć do obrachowania w budowlach Artylerycznych sklepienia Elliptyczne; niechay tedy będzie iedno takie, długie na 22. łokcie, grube na $\frac{1}{2}$; większa średnica Ellipsy niechay wynosi 12 łok. a mniejsza 8 łokci; jest zadano wynaléżdź, wiele to sklepienie czyni łokci sześciennych?

Jawna iest, że do rozwiązania tego Zagadnienia nietrzeba więcej, tylko wyrachować powierzchnię sklepienia, i rozmnożyć ją przez grubość. A że powierzchnia płaska Ellipsy ma się do powierzchni płaskiej koła opisanego na większej średnicy; iak się ma większa średnica do mniejszej średnicy (Algebr. I. 232); więc w tymże samym stosunku, musi się mieć i obwód i powierzchnia wypukła Ellipsy do okręgu i do powierzchni wypukłej koła. A zatem uważam naprzód to sklepienie, iakoby było kołowe mające średnicy 12 łok. Zeby tedy mieć powierzchnię Półwa. ka sklepowego, szukam naprzód okręgu koła przez tę proporcją.

$$7 : 22 :: 12 : 37\frac{1}{2}$$

A wzięwszy połowę tego okręgu i rozmnożywszy go przez długość 22. mieć będę powierzchnię sklepienia, gdyby było kołowe, iakoto

$$\frac{18\frac{5}{8}}{22} = 36$$

skąd wnoszę sobie po-
wierzchnią sklepienia }
Elliptycznego przez tę } 18 $\frac{5}{8}$

414 $\frac{5}{8}$. powierzchnia kołowa

proporcją 12 : 8 :: 414 $\frac{5}{8}$: 237 $\frac{3}{8}$ powier. Eliptyczna
Naostaték rozmnożywszy ją przez grubość, to iest przez $\frac{1}{2}$ łok. mam na bryłowatość przereczonego sklepienia Elliptycznego, 168 $\frac{3}{8}$ łokci sześciennych.

ZAGADNIENIE SZOSTE.

Mając zadaną proporcją i wagę mostołodzi, iak wynaléżdź, wiele takowa ciężaru znieść potrafi bez za-

ZAGADNIENIE.

zatoniénia. Np. niechay będzie waga mostołodzi, (iakié są Francuskie), 975 stow, a proporcya taka: to iest, długość wierzchnia mająca zostać równo z powierzchnią wody 17 $\frac{1}{2}$ ft. długość denna 13 $\frac{1}{2}$ ft. szerokość 5 ft. głębokość zarurzona w wodzie 2 ft.

Podług (Mech: 315), ażeby ta mostołódz nie zatoneła, trzeba, ażeby waga wyrugowaney przez nią wody, równała się wadze téżże mostołodzi nalożowaney. Nieidzie tedy tylko o wyrachowanie wagi wody, którey miéysce zastępuje mostołódz. Ta zaś wynaydzie się, obrachowawszy objętość mostołodzi w stopach sześciennych, i tę objętość rozmnożywszy przez wagę iednéy stopy sześciennéy wody. Lecz oznaczywszy wierzchnią długość mostołodzi przez AI , denną przez CL , dwie trójkątne płaszczyzny przerznięcia przez EHG i EFG ; na wyrażenie objętości mostołodzi mamy, podług

$$(Jeom. 258), EHG \times \frac{2AI + CL}{3} + EFG \times \frac{2CL + AI}{3}$$

więc nietrzeba tylko zamiast tych ilościów literalnych, położyć liczebne; a tak będzie w naszym przykładzie

$$AI = 17\frac{1}{2}$$

$$CL = 13\frac{1}{2}$$

Co się tycze powierzchni trójkąta EHI ; ta powinna równać się podstawie, którą tu oznacza wierzchnia szerokość, to iest 5 ft. rozmnożonéy przez połowę wysokości, to iest przez 1 ft.; a powierzchnia drugiego trójkąta EFG , powinna równać się podstawie, którą tu oznacza denna szerokość, to iest 4 $\frac{1}{2}$ ft. rozmnożonéy także przez połowę wysokości, to iest przez 1 ft.

$$\text{A zatem będzie } EHG = 5 \times 1 = 5 \\ EFG = 4\frac{1}{2} \times 1 = 4\frac{1}{2}$$

Więc objętość mostołodzi, będzie wynosić

$$5 \times \frac{2 \times 17\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2}}{3} + 4\frac{1}{2} \times \frac{2 \times 13\frac{1}{2} + 17\frac{1}{2}}{3} = \frac{242\frac{1}{2}}{3} + \frac{211\frac{1}{2}}{3}$$

Tom III

Dd

$= \frac{453\frac{7}{8}}{3} = 151\text{sss} . r$ odrzuciwszy ułamek. Którą rozmnożywszy przez wagę jednéj stopy sześciénéj wody, to jest przez 70 *ftów*, mieć będziemy na wagę wody wyrugowanęj przez zanurzoną mostolódz 11570 *ftów*.

Taki tedy ciężar może znieść bez zatonięcia mostolódz wzwyż opisana. A że sama mostolódz waży 875 *ftów*; więc można na nią władować jeszcze 10595 *ftów*.

Są tedy te Mostolodzie dostatecznie uporcyonowane pod 24 *ftów*e armaty; Bo takowe ważą 5400 *ftów*, a łoża i pociąg niebędą też pełnie więcéj ważyły nad 5195 *ftów*.

KONIEC TRZECIEGO TOMU.



ZBIOR



ZBIOR

Materyi zawartych w tym trzecim Tomie.

FUNDAMENTA RACHUNKÓW

Służących za wstęp do Nauk Fizyczno-Matematycznych.

Wiadomości poprzeczające karta - 1.
Co ma się rozumieć, przez *Składki, Różniczki*, czyli przez wzrosty niezmiernie małe Ilościów. 2.
Co rozumie się przez ilości niezmiernie małe, albo niezmiérne; i o zawisłości w Rachunkach tych ilościów iednych od drugich. - 3-12.
Fundamenta Rachunku Różniczkowego.
Co rozumie się przez *Różnicę, Różniczkę*, i jakim sposobem wskazuje się *Różniczkę* danéj ilości. - 13.
Jak znajduje się *Różniczkę* ilości, której wszystkie części byłyby liniowe. - 14.
Reguła służąca do różniczkowania mnogości, w której wszystkie czynniki byłyby nierówne. 15.
Reguła do różniczkowania ilościów wynie-

sionych do iakiego stopnia. karta - 17.
Przyśtółowanie tych reguł do różniczkowania różnego rodzaju ilościów. - 18-20.
O *Różniczkach* drugich, trzecich, i. t. d.. 20.
Jak wskazują się takowe *Różniczki*. - *Tamże*.
Jak wynajdują się też *Różniczki*. - 22-25.
Przeostroga względem znaku, iaki powinien być dany *Różniczkom* ilościów ubywających, a iaki *Różniczkom* ilościów rosnących. - 26.
O *Różniczkach* Wstaw i Dostaw; co one są i jak wynajdują się. - 27.
O *Różniczkach* Logarytmowych. - 30.
Reguła służąca do wyznalezienia *Różniczki* Logarytmu, odpowiadającego iakićkolwiek ilości. - 34.
O *Różniczkach* Ilościów wy-

Dd 2

wykładniczych. kar. 36.
*Przystósowanie Reguł po-
 przedzających.*
 1o Do Podtycznych,
 Stycznych, Między-
 głych, i. t. d. w Linjach
 krzywych - - - 38.
 2re Do ograniczenia
 Linii krzywych, i ogó-
 łem do ograniczenia
 wszelkich ilościów, tu-
 dzież do Zagadnień o
 Największościach i Naj-
 mniejszościach. - - 50.
 3cie Do promieniów
 wszelkiey krzywości,
 czyli do Linii nazwaney
 Rozwiyka. - - - 75.
*Fundamenta Rachunku
 Całkowego.*
 Jaki jest zamiar Ra-
 chunku Całkowego. 80.
 Co rozumie się przez
 związek Ilości. - - 82.
 Jak wskazuje się Cał-
 kowańcy ilości. *tamże.*
 Reguła fundamen-
 talna, służąca do całkowa-
 nia Różniczek jedno-
 wnych z jedną odmi-
 eną. - - - 83.
 Uwaga względem Ilo-
 ści stateczney iaka ma
 być przydana do wy-
 nalezioney Całki - 85.
 O Różniczkach wie-
 oślownych, których cał-
 kowanie podpada pod
 Regułę fundamen-
 talną. - - - 87.
 O Różniczkach dwu-
 słownych, które mogą
 być całkowane Alge-
 braicznie. karta - 91.
*Przystósowanie Reguł po-
 przedzających.*
 1o Do kwadratury
 Linii krzywych. - 101.
 2re Do sprostowania
 Linii krzywych. - 110.
 3cie Do Powierz-
 chniów krzywych. 113.
 4te Do pomiaru Bry-
 łowości. - - - 116.
 Sążniowanie Léyka
 podkopowego. - 122.
 O całkowaniu Ilo-
 ściów, zawierających
 w sobie Wstawy i Do-
 stawę. - - - 126.
 O sposobie całkowa-
 nia przez przybliżenie,
 i niektóre użycia tego
 sposobu. - - - 130.
 Przystósowanie do
 sprostowania koła *Tamże.*
 Przystósowanie do
 wyrachowania Loga-
 rytmów. - - - 138.
 Użycia przybliżeń
 poprzedzających do
 całkowania różnych
 ilościów. - - - 151.
 O sposobie naprowa-
 dzenia (kiedy to być
 może) całki zadanej
 Różniczki dwusłowney,
 do wiadomey całki in-
 ney Różniczki także
 dwusłowney. - - 165.
 O Ułamkach niepię-
 ciastkowych. - - 174.
 Jak

Jak trzeba sobie po-
 stąpić w ich całkowa-
 niu, kiedy wszystkie
 czynniki, składające mia-
 nownika, są rzetelne
 a nierówne. karta 176.
 Jak trzeba sobie po-
 stąpić, w ich całkowa-
 niu, kiedy niektóre z
 czynników składają-
 cych mianownika są
 sobie równe - *Tamże.*
 Jak wynayduia się
 spólczynnik ułamków
 cząstkowych, na które
 ma być rozłożony uła-
 mek zadany do całko-
 wania. - - - 179.
 Co trzeba czynić kie-

dy mianownik zawie-
 ra w sobie czynników
 zmyślonych. kar. 184.
 O niektórych Prze-
 kształceniach, służących
 do łatwiejszego cał-
 kowania. - - - 188.
 O całkowaniu Ilo-
 ściów wykładniczych 194.
 O całkowaniu ilo-
 ściów z dwiema lub
 większą liczbą od-
 miennych. - - - 195.
 O Zrównaniach Ró-
 żniczkowych. - - 200.
 O Ilościach i o Zró-
 wnaniach Różniczko-
 wych, drugiego, trze-
 ciego i. t. d. porządku 217.

FUNDAMENTA POWSZECHNE MECHANIKI.

Wiadomości poprzę-
 dzające karta 227.
 Co to jest Mechani-
 ka, definicje ruchu, cia-
 ła, siły, równowagi,
 spoczynku. - 227.-228.
 Pierwsze prawidło
 Ruchu. - - - 228.
 O Ruchu jednokształ-
 tnym; co jest - - 229.
 Coto jest szypkość *Tam.*
 Miara szypkości, w ru-
 chu jednokształtnym 230.
 Miara rozległości i
 czasu, w ruchu jedno-
 kształtnym. - - *Tamże.*
 O sposobie przysto-
 sowania między sobą

tych trzech rzeczy, to
 jest, rozległości, szyp-
 kości i czasu, w dwóch
 ciałach nadanych ru-
 chem jednokształtnym 231.
 O siłach, i o ilości
 ruchu. karta. - - 233.
 Co rozumie się przez
 miąższość ciała. *Tamże.*
 Miara ilości ruchu *Tam.*
 Stosunki między siła-
 mi, miąższościami i
 szypkościami. - - 234.
 Co rozumie się przez
 gęstość ciała. - - 235.
 Jak mierzy się tak-
 wa gęstość. - - *Tamże.*
 O Ruchach jedno-
 kształt-

kształtnie przyspieszo-
nych. *liczba* - - 236.

Stosunek między
szypkosćmi i cza-
sami, w ruchu iedno-
kształtnie przyspieszo-
nym. - - - - 238.

Porównanie rozle-
głości przebieżony, z
mocą ruchu przyspie-
szonego, z rozległo-
ścią przebieżoną w
tymże czasie iedno-
kształtnie, mocą szyp-
kości nabytę w ruchu
przyspieszonym 239. 240.

Stosunek między roz-
ległościami przebieżo-
nemi mocą ruchu ie-
dnokształtnie przyspie-
szonego. - *Tamże.*

Porównanie rozle-
głościów, czasów i szyp-
kościów w tymże ru-
chu iednokształtnie
przyspieszonym 240-241.

O swobodnym ruchu
ciał ważnych. - - 241.

Coto jest ważność;
w jakim kierunku skut-
kuje; i jakie jest natęże-
nie téj siły w różnych
odległościach od środ-
ka ziemi, i w różnych
odległościach od E-
kwatora. - - - 242.

Szypkosć jaką nada-
je ważność różnym
częstokom materji, nie-
zależy od ich liczby,
a zatem ani od miąż-

szości. *liczba*. 243-244.

Różność między wa-
żnością i wagą. *Tamże.*

Miaższosć ciał jest
proporcjonalna wa-
dze onychże. - *Tamże.*

Prawa czyli ustawy
należące do ruchu swo-
bodnego ciał ważnych,
są też same co owe któ-
re które należą do ru-
chu iednokształtnie
przyspieszonego. - 244.

Jak wynayduie się
rozległość przebieżo-
na od ciała ważnego,
i szypkosć nabyta, w
pewnym zadany
czasie. - - - 245-249.

O Ruchach różno-
kształtnych, w spo-
sób bądź iaki chce rozma-
ity. - - - - 249.

O Równowadze mię-
dzy siłami wbrew so-
bie przeciwnemi. - 254.

Zasada fundamental-
na téj Równowagi. 256.

O Ruchu składanym 258.

Zasada fundamental-
na tego Ruchu. - - 259.

O składaniu i roskła-
daniu sił. - - - 266.

Różne sposoby wy-
rażenia stosunku, mię-
dzy dwiema siłami skła-
dającemi, i między ie-
dną siłą z nich złożo-
ną. - - - - 268.

Składanie i roskłada-
nie sił mających kie-
rón-

rónki równoległe. - 272.

O Momentach, i
onych użyciu do skła-
dania i roskładania sił 277.

Jak przez nie wno-
si się położenie i wielkość
siły złożony z wielu
sił, mających swoje kie-
rónki na iednéjże pł-
szczyźnie. - - - 279.

O siłach, skutkuia-
cych na różnych pł-
szczyznach. - - - 290.

Takowe siły, kiedy są
wzajemnie sobie równo-
ległe, zawsze mogą bydź
przemienione w iedną
siłę; i iakim sposobem
to wykonywa się. - 291.

Kiedy zaś niebędą
sobie równoległe, to za-
wsze mogą bydź prze-
mienione w dwie siły,
z których iedna miała-
by swój kierónek na
płaszczyźnie wiadomej,
a druga byłaby prosto-
padłą téjże płaszczy-
źnie. - - - - 294.

Częstokroć wygo-
dnię bywa przemienić
czyli zebrać ie we trzy
siły, prostopadle trzem
płaszczyznom wiado-
mym; co zawsze da się
uczynić; i w iaki spo-
sób. - - - - 296.

O środkach ciężko-
ści. - - - - 298.

Coto jest środek
ciężkości ciała; i co
rozumie się przez
układ ciał. - - *Tamże.*

Jak wynayduie się
odległość środka cięż-
kości spólnego wielu
ciałom, od pewnéj ia-
kiéj linii prostéj. - 299.

Coto są osi momen-
tów. - - - - 302.

Własność tych osiów,
która dowodzi, że środ-
kiem ciężkości ciała,
jest szczególnie ieden
punkt. - - - 303-304.

Na czém zależy wy-
nalezienie środka cięż-
kości, w wszelkim
przypadku. - - - 306.

Przytóżowanie tych
fundamentów, do wy-
nalezienia środków
ciężkości w różnych
ciałach. - - - 310.

Własności środków
ciężkości, stosujące się
do ruchu ciał. - - 335.

Zasada powszechna,
na której gruntuie się
Równowaga ciał. - 346.

Zasada powszechna
na której gruntuie się
Ruch ciał. - - - 349.

Wnioski wynikaia-
ce z dwóch zasad po-
przedzających, a stó-
sujące się do ruchu
śródku ciężkości ciał 350.

O ROWNOWADZE ROSCIEKOW.

*I o Ciałach brylastych zanurzonych
w tychże Rościekach.*

Pierwsza zasada wnosi
się z doświadczenia;
na czem zależy. *licz. 355.*

Wniołki wypływa-
jące z téj zasady, wzglę-
dém sposobu, iakim tło-
czenie skutkuje i roschod-
zi się w rościekach; tu-
dzież względem kierón-
ku, w iakim czyni toż
tłoczenie przeciwko ścia-
nóm naczynia, w którym
rościek znayduie się
zawarty. - 356. *i dalej.*

Jak wynayduie się
tłoczenie, które spra-
wuie rościek ważny,
przeciwko zadanéj po-
wierzchni poziomej 361.

Ustawa czyli prawo
równowagi między ro-
rospłynami różnéj gę-
stości. - - - *Tamże.*

Sposób oszacowania
tłoczenia skutkuiącego
przeciwko powierz-
chni płaskiej nachylo-
néj. - - - 365.

O skutkach, pocho-
dzących z tłoczenia

rościeków, uważo-
nych i oszacowanych
tak w rozumieniu po-
ziemném, iako téż i
w pionowém. 366 *i dalej.*

Ciało zanurzone w
rościeku, utracą w nim
część swoięj wagi,
równaiącą się wadze
objętości rościeku,
wyrugowanego przez
toż ciało. - - - 372.

Różne sposoby flu-
jące do wynalezienia
przyrodnej ważności
ciał. - - - 380 *i dalej.*

O Rościekach sprę-
żytych. - - - 389.

O wadze powietrza 392.

O sprężystości po-
wietrza. - - - 394.

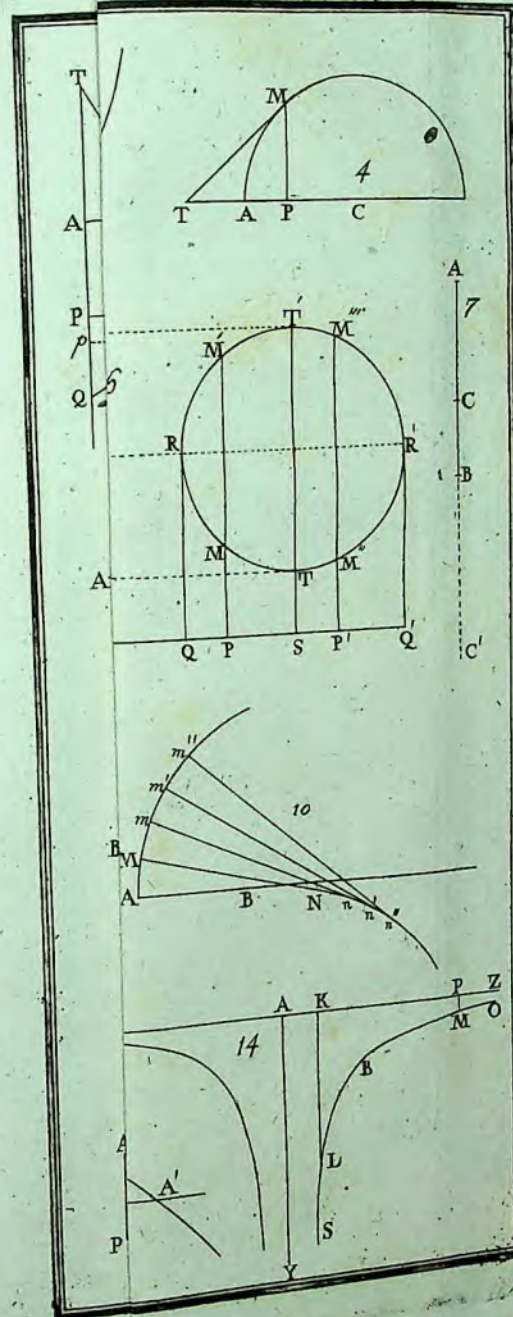
Jak wynayduie się
gęstość powietrza, w
różnych odległościach
od poziomu - - 401.

O Rurmusach. - 407.

Tablica ważnościów
przyrodnych różnym
materjom brylastym i
rościecznym. - - 422.

KONIEC ZHIORU MATERTI.
TRZECIEGO TOMU.

Mechaniki. część II.



O ROWNOWADZE ROSCIEKOW.

*I o Ciałach brylastych zanurzonych
w tychże Rościekach.*

Pierwsza zadada wnosi
się z doświadczenia;
na czem zależy. *licz. 355.*

Wnioski wypływa-
jące z téy zadady, wzglę-
dém sposobu, jakim tło-
czenie skutkuje i roschod-
zi się w rościekach; tu-
dzież względem kierón-
ku, w jakim czyni toż
tłoczenie przeciwko ścia-
nóm naczynia, w którém
rościek znajduje się
zawarty. - 356. *i dalej.*

Jak wynayduie się
tłoczenie, które spra-
wuie rościek ważny,
przeciwko zadany po-
wierzchni poziomey 361.

Ustawy czyli prawo
równowagi między ro-
rospłynami różney gę-
stości. - - - *Tamże.*

Sposób oszacowania
tłoczenia skutkującego
przeciwko powierz-
chni płaskiey nachylo-
néy. - - - 365.

O skutkach, pocho-
dzących z tłoczenia

rościeków, uważo-
nych i oszacowanych
tak w rozumieniu po-
ziemném, iako téż i
w pionowém. 366 *i dalej.*

Ciało zanurzone w
rościeku, utracą w nim
część swoiey wagi,
równaiącą się wadze
objętości rościeku,
wyrugowanego przez
toż ciało. - - - 372.

Różne sposoby flu-
jące do wynalezienia
przyrodney ważności
ciał. - - - 380 *i dalej.*

O Rościekach sprę-
żytych. - - - 389.

O wadze powietrza 392.

O sprężystości po-
wietrza. - - - 394.

Jak wynayduie się
gęstość powietrza, w
różnych odległościach
od poziomu - - 401.

O Rurmusach. - 407.

Tablica ważnościów
przyrodnych różnym
materjom brylastym i
rościecznym. - - 422.

KONIEC ZHIORU MATERYI.
TRZECIEGO TOMU.

Mechaniki, część I. Pl. I

